



HAL
open science

Formulation non-locale du problème level-set.

Stéphane Valance

► **To cite this version:**

Stéphane Valance. Formulation non-locale du problème level-set.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592932

HAL Id: hal-00592932

<https://hal.science/hal-00592932>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une formulation non-locale du problème level-set

S. Valance¹

¹ Paul Scherrer Institut, Nuclear Energy and Safety, 5232 Villigen PSI, Switzerland;
Stephane.Valance@psi.ch

Résumé — Bien qu'efficace pour modéliser numériquement les problèmes impliquant la présence d'hyper-surfaces, la méthode level-set reste difficile à manipuler. Ce papier propose une formulation non-locale de l'équation d'évolution level-set s'appuyant sur l'approche des champs de phases. L'équation d'évolution obtenue permet l'utilisation de la méthode level-set par le biais d'une unique équation aux dérivées partielles. Le problème associé est ensuite résolu dans le cadre des éléments finis iso-géométriques. Un exemple classique démontre l'efficacité de la démarche adoptée.

Mots clés — level-set, champ de phases, iso-geometric analysis.

1 Modélisation des hyper-surfaces

Dans le contexte de la mécanique des milieux continus, la modélisation des hyper-surfaces permet la réalisation de simulations suivant au plus près les dérivations théoriques : les surfaces de ruptures sont décrites par une discontinuité du champ de déplacement, les interfaces de changements de phase sont des surfaces de discontinuité pour le champ de déformation, *etc.*

Lorsqu'il est nécessaire de modéliser numériquement de tels problèmes, la méthode level-set est sans doute l'une des plus efficaces. Dans cette approche, les hyper-surfaces sont modélisées implicitement. En mécanique des structures, cette approche a été utilisée avec succès pour la modélisation de surface de rupture en association avec la méthode X-FEM [1], ainsi que pour la modélisation d'interfaces de changement de phase [2, 3].

Cependant, la technique level-set comme introduite par Osher et Sethian [4], n'est pas d'utilisation aisée : il est nécessaire de résoudre trois différentes équations aux dérivées partielles – *i.e.* propagation de l'iso-0, extension du champ de vitesse et ré-initialisation à la distance signée – à des instants imprédictibles du calcul. De plus, l'équation de propagation se trouve être difficile à résoudre dans le contexte d'une formulation Galerkin du problème sans l'aide de termes de stabilisation [5, 6].

Ce travail introduit une formulation non-locale du problème level-set qui permet de se débarrasser des problèmes mentionnés ci-dessus : il devient possible de résoudre complètement la propagation d'une hyper-surface en utilisant une seule équation. Pour présenter ce problème, une définition de l'espace des fonctions level-set qui permet de souligner l'importance de la non-nullité du gradient à l'interface est introduite. Ensuite, l'utilisation de quelques résultats issus de la théorie des champs de phases permettra de formuler une équation aux dérivées partielles non-locale pour le problème level-set. Cette équation est alors résolue dans le contexte des éléments finis iso-géométriques. Enfin, un résultat de calcul obtenu pour un cas test classique de la méthode level-set sera présenté.

2 Le problème level-set

Dans la suite du papier, un champ ϕ est un champ level-set défini sur le domaine \mathcal{D} si il appartient à l'espace \mathcal{LS} suivant :

$$\mathcal{LS} = \{ \phi \in C^1(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}) \mid \forall \underline{M} \in \mathcal{D}, \phi|_{\underline{M}} = 0 \Rightarrow \|\nabla\phi\|_{\underline{M}} \neq 0 \} . \quad (1)$$

La définition d'une surface S_ϕ à partir du champ ϕ appartenant à l'espace \mathcal{LS} , est alors la surface régulière :

$$\forall \phi \in \mathcal{LS}, S = \{\underline{M} \in \mathcal{D} \mid \phi|_{\underline{M}} = 0\} . \quad (2)$$

L'équation de propagation de la surface S_ϕ s'obtient en attachant le champ level-set à une particule \underline{x} :

$$\phi = \hat{\phi}(t, \underline{x}(t)) , \quad (3)$$

en imposant ensuite la stationnarité de champ level-set par rapport à toute particule \underline{x} :

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{Dt} = 0 &\iff \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(t, \underline{x}(t)) + \frac{\partial \underline{x}(t)}{\partial t} \cdot \underline{\nabla} \hat{\phi}(t, \underline{x}(t)) \\ &\iff \frac{\partial \phi}{\partial t} + F \|\underline{\nabla} \phi\| = 0 , \end{aligned} \quad (4)$$

où $\|\bullet\|$ est la norme euclidienne de *bullet*. F est une donnée externe du problème définie en accord avec la vitesse de propagation \underline{u}_S de la surface S_ϕ par :

$$\begin{aligned} F \in C(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}), F|_{\underline{M} \in S_\phi} &:= \underline{u}_S \cdot \frac{\underline{\nabla} \phi}{\|\underline{\nabla} \phi\|} \\ &= \frac{\partial \underline{x}(t)}{\partial t} \cdot \frac{\underline{\nabla} \phi}{\|\underline{\nabla} \phi\|} . \end{aligned} \quad (5)$$

L'équation 4 est l'équation de propagation de la surface S_ϕ définie implicitement par le champ level-set ϕ .

3 Formulation non-locale de l'équation de propagation level-set

Pour établir une forme non-locale de l'équation de propagation introduite ci-dessus, nous allons utiliser des résultats connus obtenus dans le contexte de la méthode de champ de phases [7]. L'équation d'Allen-Cahn utilisée pour modéliser des phénomènes d'ordonnement dans les milieux continus par l'intermédiaire d'un champ η est la suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + M(\psi'(\eta) - \kappa \Delta \eta) = 0 , \quad (6)$$

où M , le coefficient de mobilité, et κ , le coefficient d'énergie d'interface, sont des paramètres du modèle ; ψ est une fonction associant un état d'énergie à une valeur de η .

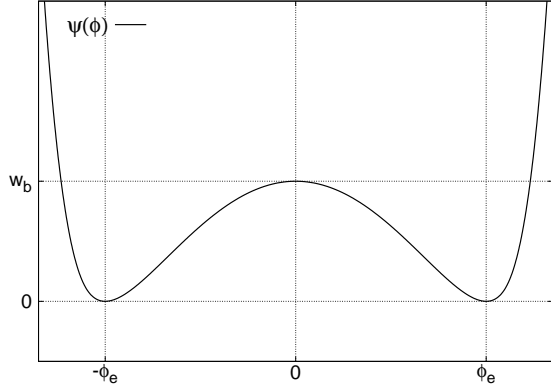
L'équation ci-dessus est la solution du problème de minimisation de l'énergie associée à un champ d'énergie potentielle défini par :

$$E(\eta) = \psi(\eta) + \frac{\kappa}{2} \underline{\nabla} \eta \cdot \underline{\nabla} \eta . \quad (7)$$

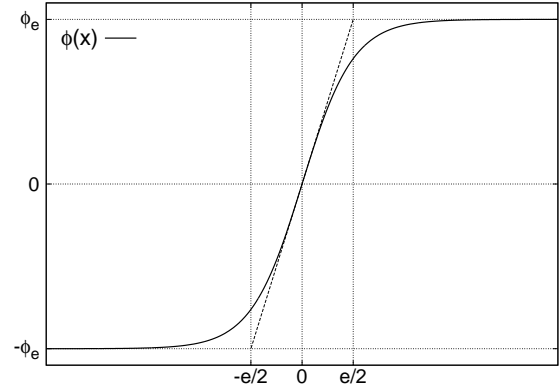
Dans la définition ci-dessus, ψ est un potentiel à deux puits comme décrit sur la figure 1(a). Les deux minima locaux représentent les états d'énergie stable. Le maximum local entre ces deux minima rend possible, en association avec le second terme de l'équation 7, l'existence d'une interface stable d'épaisseur finie.

Une version légèrement modifiée de l'équation d'Allen-Cahn est connue comme l'équation de Ginzburg-Landau. L'existence et les caractéristiques des solutions de cette équation a été largement étudiée. Particulièrement, Caginalp [8] a démontré l'existence de solutions pour cette équation, et que l'interface obtenue entre deux valeurs stable de l'énergie potentielle associée reste stable au cours du temps.

Notre objectif est désormais d'utiliser cette équation de sorte à obtenir une équation de propagation level-set où le champ level-set est assuré de rester dans l'espace \mathcal{LS} au cours de la propagation. Cet objectif sera rempli si l'on peut construire une interface d'épaisseur non-nulle autour de la surface iso-0 du champ level-set.



(a) Prototype du potentiel à deux puits ψ .



(b) Évolution spatiale de la solution à l'équilibre de l'équation 6.

FIGURE 1 – Potentiel à deux puits et solution de l'équation 6.

À proprement parler, dans le contexte des champs de phases, l'épaisseur de l'interface est indéfinie. Cependant, il est possible d'introduire une mesure pertinente de l'épaisseur d'interface e via :

$$e = 2 \frac{\eta_e}{\|\nabla \eta\|_{\eta=0}}, \quad (8)$$

où η_e est une caractéristique du potentiel à deux puits représenté figure 1(a). La signification géométrique de cette définition est représentée sur la figure 1(b). Dans ce cadre, on peut montrer que, à l'équilibre, la relation suivante entre le paramètre κ et l'épaisseur est vérifiée :

$$\kappa = \frac{w_b}{2} \left(\frac{e}{\eta_e} \right)^2 \quad (9)$$

Pour le potentiel décrit sur la figure 1(a), la vitesse $F_{\bar{\kappa}}$ de la surface iso-0 du champ de phases en l'absence d'action extérieure est donnée par :

$$F_{\bar{\kappa}} = M \bar{\kappa}, \quad (10)$$

où $\bar{\kappa}$ est la courbure moyenne de la surface iso-0 du champ de phases au point considéré.

Finalement, si le champ de phases est, tout comme pour le champ level-set, attaché à un champ de particule \underline{x} se déplaçant à la vitesse $F - M \bar{\kappa}$, nous obtenons l'équation de propagation du champ level-set à la vitesse F et sous la condition que ce champ reste inclus dans $\mathcal{L}\mathcal{S}$. Après quelques manipulations, et en utilisant la formule de la courbure proposée par Goldman [9], cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F \|\underline{\nabla} \phi\| + M \left(\psi'(\phi) - \frac{\kappa}{\underline{\nabla} \phi \cdot \underline{\nabla} \phi} \underline{\nabla} \phi \cdot \underline{\underline{H}} \phi \cdot \underline{\nabla} \phi \right) = 0, \quad (11)$$

où $\underline{\underline{H}}$ représente l'opérateur différentiel Hessian.

4 Implémentation numérique

Le problème variationnel associé à l'équation de propagation level-set non-locale introduite ci-dessus est le suivant :

(\mathcal{P}_{12}) $\forall q \in \mathcal{U}_{\sigma}^0$, trouver $\phi \in \mathcal{U}_{\sigma}$ tel que:

$$\mathcal{B}_{\phi}(q, \phi) = 0, \quad (12)$$

où,

$$\mathcal{B}_{\phi}(q, \phi) = \left\langle q, \phi_t + F \|\underline{\nabla} \phi\| + M \left(\psi'(\phi) - \frac{\kappa}{\underline{\nabla} \phi \cdot \underline{\nabla} \phi} \underline{\nabla} \phi \cdot \underline{\underline{H}} \phi \cdot \underline{\nabla} \phi \right) \right\rangle_{\Omega}, \quad (13)$$

et les espaces $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}^0$ et $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ sont définis par :

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} = \{\rho \in H^1(\Omega) \mid \forall \underline{M} \in \Gamma_{\mathfrak{m}}, \rho = \mathfrak{m}\}, \quad (14a)$$

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}^0 = \{\rho \in H^1(\Omega) \mid \forall \underline{M} \in \Gamma_{\mathfrak{m}}, \rho = 0\}. \quad (14b)$$

La discrétisation en temps du problème est réalisée par l'utilisation de la méthode *generalized- α* développée par Chung et Hulbert [10]. Cette méthode a déjà été utilisée avec succès par Gómez *et al.* [11] pour la résolution de problèmes de type champ de phases avec une approche iso-géométrique. Définissant le vecteur discrétisé $\underline{\Upsilon}$ par :

$$\underline{N}^T \cdot \underline{\Upsilon} \simeq \phi, \quad (15)$$

où \underline{N}^T est le vecteur des fonctions de forme exprimé aux nœuds, on peut définir le vecteur résidu \underline{R} par :

$$\underline{R} = \hat{\underline{R}}(\dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_m}, \dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_f}, \underline{\Upsilon}_{n+\alpha_f}), \text{ avec,} \quad (16a)$$

$$\underline{R} = \{\mathcal{B}(N_A, W^h)\}. \quad (16b)$$

Le problème discrétisé en temps s'écrit alors :

(\mathcal{P}_{17}) étant donnés $\ddot{\underline{\Upsilon}}_n, \dot{\underline{\Upsilon}}_n, \underline{\Upsilon}_n$,

trouver $\ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+1}, \dot{\underline{\Upsilon}}_{n+1}, \underline{\Upsilon}_{n+1}, \ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_m}, \dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_f}, \underline{\Upsilon}_{n+\alpha_f}$, tels que :

$$\hat{\underline{R}}(\ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_m}, \dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_m}, \underline{\Upsilon}_{n+\alpha_f}) = \underline{0}, \quad (17)$$

où,

$$\underline{\Upsilon}_{n+1} = \underline{\Upsilon}_n + \Delta t_n \dot{\underline{\Upsilon}}_n + \frac{\Delta t_n^2}{2} \ddot{\underline{\Upsilon}}_n + \beta \Delta t_n^2 (\ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+1} - \ddot{\underline{\Upsilon}}_n), \quad (18a)$$

$$\dot{\underline{\Upsilon}}_{n+1} = \dot{\underline{\Upsilon}}_n + \Delta t_n \ddot{\underline{\Upsilon}}_n + \gamma \Delta t_n (\ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+1} - \ddot{\underline{\Upsilon}}_n), \quad (18b)$$

$$\ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_m} = \ddot{\underline{\Upsilon}}_n + \alpha_m (\ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+1} - \ddot{\underline{\Upsilon}}_n), \quad (18c)$$

$$\dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_f} = \dot{\underline{\Upsilon}}_n + \alpha_f (\dot{\underline{\Upsilon}}_{n+1} - \dot{\underline{\Upsilon}}_n), \quad (18d)$$

$$\underline{\Upsilon}_{n+\alpha_f} = \underline{\Upsilon}_n + \alpha_f (\underline{\Upsilon}_{n+1} - \underline{\Upsilon}_n). \quad (18e)$$

Le problème discrétisé non-linéaire (\mathcal{P}_{17}) est résolu en utilisant l'algorithme prédicteur-correcteur présenté figure 2. Dans cet algorithme, l'étape de prédiction est réalisée sous l'hypothèse "même $\underline{\Upsilon}$ " [12].

La matrice tangente $\underline{\underline{T}}^{(i)}$ est définie *via* :

$$\underline{\underline{T}}^{(i)} = \left(\alpha_m \frac{\partial}{\partial \ddot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_m}^{(i)}} + \alpha_f \gamma \Delta t_n \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_f}^{(i)}} + \alpha_f \beta \Delta t_n^2 \frac{\partial}{\partial \underline{\Upsilon}_{n+\alpha_f}^{(i)}} \right) \hat{\underline{R}}(\dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_m}^{(i)}, \dot{\underline{\Upsilon}}_{n+\alpha_f}^{(i)}, \underline{\Upsilon}_{n+\alpha_f}^{(i)}). \quad (19)$$

Les paramètres du schéma en temps ont été choisis en se référant à Bazilevs *et al.* [13] :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f, \quad (20a)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left(\frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right), \quad (20b)$$

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (20c)$$

Input : $\ddot{\underline{Y}}_n, \dot{\underline{Y}}_n, \underline{Y}_n$

Output : $\ddot{\underline{Y}}_{n+1}, \dot{\underline{Y}}_{n+1}, \underline{Y}_{n+1}$

```

i ← 0;
// predictor stage
 $\underline{Y}_{n+1}^{(0)} \leftarrow \underline{Y}_n;$ 
 $\dot{\underline{Y}}_{n+1}^{(0)} \leftarrow \left[1 - \frac{\gamma}{\beta}\right] \dot{\underline{Y}}_n + \Delta t_n \left[1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right] \ddot{\underline{Y}}_n;$ 
 $\ddot{\underline{Y}}_{n+1}^{(0)} \leftarrow \left[1 - \frac{1}{2\beta}\right] \ddot{\underline{Y}}_n - \frac{1}{\beta\Delta t_n} \dot{\underline{Y}}_n;$ 
// multicorrector stage
while  $|\underline{R}^{(i)}| > \text{criterion}$  do
    i ← i + 1;
    // evaluate iterates
     $\ddot{\underline{Y}}_{n+\alpha_m}^{(i)} \leftarrow \ddot{\underline{Y}}_n + \alpha_m \left(\ddot{\underline{Y}}_{n+1}^{(i-1)} - \ddot{\underline{Y}}_n\right);$ 
     $\dot{\underline{Y}}_{n+\alpha_f}^{(i)} \leftarrow \dot{\underline{Y}}_n + \alpha_f \left(\dot{\underline{Y}}_{n+1}^{(i-1)} - \dot{\underline{Y}}_n\right);$ 
     $\underline{Y}_{n+\alpha_f}^{(i)} \leftarrow \underline{Y}_n + \alpha_f \left(\underline{Y}_{n+1}^{(i-1)} - \underline{Y}_n\right);$ 
    // assembling and solving linear system
     $\underline{\Delta\dot{Y}}^{(i)} \leftarrow -\left(\underline{T}^{(i)}\right)^{-1} \underline{R}^{(i)};$ 
    // update iterates
     $\ddot{\underline{Y}}_{n+1}^{(i)} \leftarrow \ddot{\underline{Y}}_{n+1}^{(i-1)} + \underline{\Delta\dot{Y}}^{(i)};$ 
     $\dot{\underline{Y}}_{n+1}^{(i)} \leftarrow \dot{\underline{Y}}_{n+1}^{(i-1)} + \gamma\Delta t_n \underline{\Delta\dot{Y}}^{(i)};$ 
     $\underline{Y}_{n+1}^{(i)} \leftarrow \underline{Y}_{n+1}^{(i-1)} + \beta\Delta t_n^2 \underline{\Delta\dot{Y}}^{(i)};$ 

```

FIGURE 2 – Algorithme prédicteur-correcteur pour la résolution du problème (17).

La sélection de la longueur de pas de temps se fait par l'utilisation de deux étapes d'intégration en temps successives avec un ordre de précision d'intégration de différence. Il est ainsi possible d'estimer l'erreur d'intégration. Un correcteur proportionnel-intégral est alors utilisé pour atteindre la précision d'intégration demandée [11, 14, 15, 16].

Enfin, on peut remarquer que, dans l'équation 11, le terme :

$$M \left(\psi'(\phi) - \frac{\kappa}{\underline{\nabla}\phi \cdot \underline{\nabla}\phi} \underline{\nabla}\phi \cdot \underline{H}\phi \cdot \underline{\nabla}\phi \right), \quad (21)$$

est directement relié à la non-nullité de la norme du gradient autour de l'iso-0. Le coefficient M peut donc être choisi de façon à ce que cette norme de gradient subisse un écart contrôlé à la valeur choisie par l'utilisateur en fonction des caractéristiques du maillage. Le contrôle de la variable M est réalisé, comme pour le découpage en temps, par l'intermédiaire d'un correcteur proportionnel-intégral. Dans les calculs effectués, les paramètres du terme non-local – autres que M – sont sélectionnés de telle façon que l'épaisseur d'interface e soit de l'ordre de la taille moyenne de maille.

Le potentiel à deux puits est construit en prolongeant par continuité le potentiel logarithmique D_w utilisé habituellement dans le contexte des champs de phases :

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[, \psi(x) = \begin{cases} P_4(x) & \text{si } x < \varepsilon_\psi \\ D_w(x) & \text{si } x \geq \varepsilon_\psi \text{ ou } x \leq 1 - \varepsilon_\psi \\ P_4(1-x) & \text{si } x > 1 - \varepsilon_\psi \end{cases}, \quad (22)$$

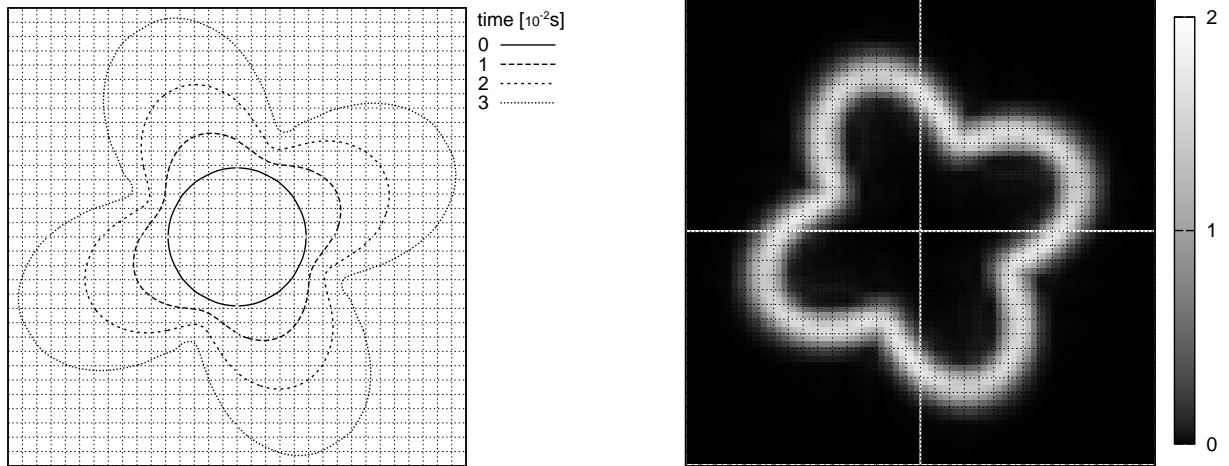
où P_4 est un polynôme d'ordre 4 et ε_ψ un réel petit devant l'unité.

5 Cas test classique

La figure 3 montre l'évolution du contour iso-0 d'un champ ϕ à différents instants pour un champ de vitesse \hat{F} :

$$\hat{F} = ((r - 3.)^2 + 1) \cdot (2. + \sin(4.\theta)) , \quad (23)$$

où (r, θ) sont les coordonnées cylindriques du point courant par rapport au centre du maillage. Ce problème appartient aux cas test classiques proposés par Sethian [17].



(a) Iso-0 du champ level-set durant la propagation pour le champ de vitesse \hat{F} .

(b) Norme du gradient du champ level-set à l'instant 2.10^{-2} s.

FIGURE 3 – Solution numérique obtenue par la formulation non-locale du problème level-set pour le champ de vitesse \hat{F} et une surface iso-0 initialement circulaire ; le maillage est C^1 -continu et constitué de 32×32 éléments réguliers.

Sur la figure 3(a), la propagation de l'iso-0 du champ level-set est très régulière bien que le maillage reste grossier. De plus, comme il est observable sur la figure 3(b), la norme du gradient autour de l'iso-0 reste constante sans avoir recours à des calculs complémentaires.

Cette approche non-locale apparaît donc comme idéale pour traiter numériquement le problème level-set. Un autre avantage apporté par cette approche est de permettre la formulation numérique de problèmes couplés d'évolution d'interface et de, par exemple, l'état mécanique d'un milieu. Ainsi il devient possible de formuler un problème couplé aussi bien pour l'analyse numérique des changements de phase que l'optimisation de structures [18].

Remerciements : l'auteur remercie la société *swissnuclear* pour le soutien financier apporté lors de la réalisation de ce travail.

Références

- [1] A. Gravouil, N. Moës, and T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11) :2569–2586, 2002.
- [2] M. Coret, S. Valance, R. Laniel, and J. Réthoré. Étude mécanique d’un changement de phase allotropique à l’échelle mésoscopique Mechanical study of allotropic phase change at meso-scale. *Matériaux & Techniques*, 97 :81–87, 2009.
- [3] I. Harari and J. Dolbow. Analysis of an efficient finite element method for embedded interface problems. *Computational Mechanics*, 46(1) :205–211, 2010.
- [4] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J. Comput. Phys*, 79 :12–49, 1988.
- [5] S. Valance, R. De Borst, J. Réthoré, and M. Coret. A partition-of-unity-based finite element method for level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(10) :1513–1527, 2008.
- [6] J. Chessa, P. Smolinski, and T. Belytschko. The extended finite element method (XFEM) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8) :1959–1977, 2002.
- [7] J.W. Cahn and S.M. Allen. A microscopic theory for domain wall motion and its experimental verification in Fe-Al alloy domain growth kinetics. In *J. de Physique (Colloq. 7)*, volume 38, pages 51–55, 1977.
- [8] G. Caginalp. An analysis of a phase field model of a free boundary. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 92(3) :205–245, 1986.
- [9] R. Goldman. Curvature formulas for implicit curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 22(7) :632–658, 2005.
- [10] J. Chung and G.M. Hulbert. Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 60(2) :371–375, 1993.
- [11] H. Gómez, V.M. Calo, Y. Bazilevs, and T.J.R. Hughes. Isogeometric analysis of the Cahn-Hilliard phase-field model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(49-50) :4333–4352, 2008.
- [12] K.E. Jansen, C.H. Whiting, and G.M. Hulbert. A generalized- α method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(3-4) :305–319, 2000.
- [13] Y. Bazilevs, V.M. Calo, Y. Zhang, and T.J.R. Hughes. Isogeometric Fluid–structure Interaction Analysis with Applications to Arterial Blood Flow. *Computational Mechanics*, 38(4) :310–322, 2006.
- [14] G. Söderlind. Time-step selection algorithms : adaptivity, control, and signal processing. *Applied Numerical Mathematics*, 56(3) :488–502, 2006.
- [15] K. Gustafsson. Control-theoretic techniques for stepsize selection in explicit Runge-Kutta methods. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 17(4) :533–554, 1991.
- [16] K. Gustafsson. Control-theoretic techniques for stepsize selection in implicit Runge-Kutta methods. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 20(4) :496–517, 1994.
- [17] J.A. Sethian. Level Set Methods and Fast Marching Methods. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, by JA Sethian, page 400, 1999.
- [18] X. Xing, P. Wei, and M.Y. Wang. A finite element-based level set method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82(7) :805–842, 2010.