



HAL
open science

Dynamique transitoire de treillis de poutres tridimensionnels soumis à des chargements impulsionsnels

Yves Le Guennec, Eric Savin

► **To cite this version:**

Yves Le Guennec, Eric Savin. Dynamique transitoire de treillis de poutres tridimensionnels soumis à des chargements impulsionsnels. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592926

HAL Id: hal-00592926

<https://hal.science/hal-00592926v1>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique transitoire de treillis de poutres tridimensionnels soumis à des chargements impulsionnels

Y. Le Guennec¹, É. Savin¹

¹ ONERA, Département Aéroélasticité et Dynamique des Structures, France, {yves.le_guennec,eric.savin}@onera.fr

Résumé — Dans ce travail de recherche, la dynamique transitoire de treillis de poutres de Timoshenko tridimensionnels soumis à des chocs mécaniques ou acoustiques est étudiée grâce à un modèle de transport de l'énergie vibratoire. Celui-ci permet d'exhiber le régime transitoire caractéristique de la propagation d'ondes hautes fréquences jusqu'à l'établissement d'un état diffusif, et suivre les chemins d'énergie. Cet article introduit le modèle de transport proposé et présente la construction de conditions aux limites dédiées ainsi qu'une méthode de résolution numérique des équations obtenues.

Mots clés — Vibration, Hautes fréquences, Modèle de transport, Poutre de Timoshenko.

1 Introduction

Les structures spatiales sont souvent soumises à des chargements de type choc qui entraînent des propagations d'ondes hautes fréquences (HF). Ces chargements peuvent perturber le fonctionnement de la structure ou des équipements embarqués. Par exemple, les chocs pyrotechniques sont très utilisés dans le domaine spatial comme lors du déploiement des panneaux solaires des satellites ou lors de la séparation du lanceur et de sa charge utile. Il est donc important de pouvoir prévoir la réponse transitoire HF des structures avec un modèle théorique et numérique efficace afin de connaître les niveaux d'énergie présents dans celles-ci.

On s'intéresse dans ce travail de recherche à la propagation d'ondes HF dans des treillis de poutres tridimensionnels. Dans le domaine HF, la méthode des éléments finis classique n'est plus applicable à cause de la densité modale importante et des longueurs d'ondes trop petites. Plusieurs stratégies heuristiques ont été développées. Des approches globales, comme l'analyse statistique énergétique (SEA) des systèmes vibro-acoustiques [1], donnent des informations sur les niveaux d'énergie moyens par sous-structures. La principale difficulté de la SEA est l'estimation des paramètres physiques de la formulation tels les coefficients de perte par couplage ou les puissances injectées. Des approches locales telles que les modèles de diffusion de l'énergie vibratoire [2] ont aussi été proposées, mais leurs applications à des structures complexes s'avèrent difficiles voire impossibles. Un autre problème typique de la modélisation de la propagation d'ondes HF se pose avec la résolution de l'équation eikonale régissant l'évolution de la phase dans ce régime : celle-ci ne vérifie pas de principe de superposition [3] et rend difficile la prise en compte de conditions aux limites. Il est néanmoins possible de traiter ces dernières dans le cas des domaines convexes en utilisant des faisceaux gaussiens [4] ; ou grâce à une technique alternative aux dérivées partielles fondée sur la méthode des segments projetés [5] pour des domaines non convexes. L'approche mise en œuvre dans cet article s'intéresse à la propagation de l'énergie associée aux ondes HF dans l'espace des phases position \times vecteurs d'onde [3].

En effet l'analyse dite micro-locale des systèmes d'onde classiques permet de prouver que la densité d'énergie associées à leurs solutions HF satisfait une équation de transport de type Liouville [15]. Cette théorie peut être adaptée aux ondes quantiques, ou aux ondes acoustiques, élastiques ou encore électromagnétiques comme montré dans [3]. Les équations de transport peuvent être résolues numériquement par une méthode de Monte-Carlo directe [6] ou des éléments finis "Galerkine" discontinus (DG) nodaux ou spectraux [7]. Les deux techniques ont l'avantage d'être peu dissipatives et peu dispersives. Elles sont donc appropriées pour les simulations en temps longs dont on a besoin pour exhiber le comportement diffusif des équations de transport [8]. Ces méthodes ont été implémentées dans le cas des assemblages de poutres ou de coques bidimensionnelles dans [9], aussi bien que dans le cas des coques aléatoirement

hétérogènes dans [10].

Ce travail a deux objectifs principaux. Premièrement, il s'agit d'étendre la formulation bidimensionnelle donnée dans [9] au cas de treillis de poutres tridimensionnelles éventuellement courbées. Deuxièmement, on cherche à simuler la réponse transitoire afin de prédire, entre autres, le comportement diffusif aux temps longs ou les chemins d'énergie suivis dans les différents éléments d'un treillis de poutres. La première partie de cet article expose brièvement le modèle mécanique de poutres retenu. Dans la section suivante, l'approche transport d'énergie vibratoire dédiée au domaine HF est adaptée aux cas des treillis de poutres. Dans cette partie est également exposé le traitement des conditions aux limites et aux interfaces. Nous donnons ensuite un aperçu de la méthode de résolution numérique des équations de transport par un schéma DG et nous présentons un exemple d'application. Quelques conclusions et perspectives sont proposées dans la section Sect. 5.

2 Modèle de poutre tridimensionnelle

La mise en œuvre du modèle de transport évoqué ci-dessus nécessite d'abord d'établir le comportement dynamique d'une poutre de Timoshenko tridimensionnelle, c'est-à-dire ses équations d'équilibre et de comportement. Le but de cette section est d'exposer ces équations dans l'optique du paramétrage HF proposé par la suite dans la Sect. 3.

2.1 Modèle géométrique et cinématique

Pour décrire le comportement vibratoire des poutres, on adopte le modèle cinématique de Timoshenko. Les sections d'une poutre sont donc supposées rigides, et celle-ci est constituée d'un matériau isotrope dont les hétérogénéités varient lentement par rapport aux longueurs d'ondes. De plus, les paramètres décrivant ce matériau sont supposés être distribués symétriquement sur les sections transversales par rapport à la fibre neutre, qui est supposée traverser les sections par leur centre d'inertie. Le modèle prend également en compte ses courbures. Soit $\hat{\mathbf{t}}(s)$, $\hat{\mathbf{n}}(s)$, $\hat{\mathbf{b}}(s)$ les vecteurs tangent unitaire, normal et bi-normal constituant un repère de Frenet-Serret défini par rapport à la fibre neutre \mathcal{C} , qui est paramétrée par l'abscisse curviligne s appartenant à un sous-ensemble (non borné dans un premier temps) de \mathbb{R} . Les coordonnées curvilignes correspondantes sont $\mathbf{s} = (s, s_2, s_3)^T$ telles qu'un point \mathbf{x} dans le sous-ensemble Ω de \mathbb{R}^3 occupé par la poutre est paramétré par $\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{s})$ dans un repère fixe. Ω peut également s'écrire sous la forme $\Omega \equiv \mathcal{C} \times \Sigma(s)$, où Σ est la section transversale de la poutre. La courbure $\kappa(s)$ est définie par $d\hat{\mathbf{t}}/ds = \kappa\hat{\mathbf{n}}$ (c'est-à-dire la courbure autour de $\hat{\mathbf{b}}$), et la torsion $\tau(s)$ est définie par $d\hat{\mathbf{b}}/ds = -\tau\hat{\mathbf{n}}$ (la courbure autour de $\hat{\mathbf{n}}$). Les dimensions de la section doivent être petites par rapport à la courbure et la torsion [11]. Dans le cadre des hypothèses cinématiques de Timoshenko, le déplacement d'un point \mathbf{s} de la section s'écrit dans le repère local :

$$\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{u}_c(s, t) + \boldsymbol{\theta}(s, t) \times \mathbf{s}_\perp,$$

où $\mathbf{s}_\perp = \mathbf{s} - (s \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}} \in \Sigma(s)$, $\mathbf{u}_c(s, t) = u_c(s, t)\hat{\mathbf{t}}(s) + v_c(s, t)\hat{\mathbf{n}}(s) + w_c(s, t)\hat{\mathbf{b}}(s)$ est le déplacement de la fibre neutre, et $\boldsymbol{\theta}(s, t) = \theta_1(s, t)\hat{\mathbf{t}}(s) + \theta_2(s, t)\hat{\mathbf{n}}(s) + \theta_3(s, t)\hat{\mathbf{b}}(s)$ est le vecteur des petites rotations de la section. Ce modèle pourrait être raffiné afin d'être plus précis dans le domaine HF. Par exemple, il serait possible d'ajouter un degré de liberté lié à la déformation non-linéaire de la section [12], ou d'introduire une troisième courbure de la fibre neutre associée à la torsion de la poutre au repos [13]. Ces aspects font l'objet de recherches en cours.

2.2 Relations de comportement et dynamique des poutres de Timoshenko

Les équations d'équilibre dynamique et les relations de comportement d'une telle poutre, sous l'hypothèse des petites perturbations, sont :

$$D\mathbf{F} = \rho S \ddot{\mathbf{U}}_c, \quad (1)$$

$$D\mathbf{M} + \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{F} = \mathbf{J} \ddot{\boldsymbol{\Theta}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = S \mathbf{C}_1 (D\mathbf{U}_c + \hat{\mathbf{t}} \times \boldsymbol{\Theta}), \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}_2 D\boldsymbol{\Theta}, \quad (4)$$

où les deux points représentent la double dérivation par rapport au temps. $\rho(s)$ est la densité volumique du matériau. $\mathbf{F}(s,t) = (T_1(s,t), T_2(s,t), T_3(s,t))^T$ et $\mathbf{M}(s,t) = (M_1(s,t), M_2(s,t), M_3(s,t))^T$ représentent respectivement les efforts et les moments résultants sur la section d'aire S exprimés dans le repère local, \mathbf{U}_c et $\mathbf{\Theta}$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 composés des coordonnées de \mathbf{u}_c et $\mathbf{\theta}$ dans le repère local de Frenet. $\mathbf{J}(s) = \text{diag}(I(s), J(s), K(s))$, $\mathbf{J} = \rho \int_{\Sigma} s_3^2 d\Sigma$, $\mathbf{K} = \rho \int_{\Sigma} s_2^2 d\Sigma$, $\mathbf{I} = \mathbf{J} + \mathbf{K}$ sont les inerties de la poutre, $\mathbf{C}_1(s) = \text{diag}(E, (\mu G), (\mu G))$ est le tenseur de relaxation, avec $(\mu G)(s)$ la moyenne du module de cisaillement réduit sur la section, et $E(s)$ est le module de Young moyen de la section, et $\mathbf{C}_2(s) = \text{diag}(\mu GI, EJ, EK)$ est le tenseur de relaxation moyen pour les mouvements de rotation. Enfin $\mathbf{D}(s)$ est la matrice de Frenet, introduite par la dérivation par rapport à l'abscisse curviligne :

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\kappa & 0 \\ \kappa & \frac{\partial}{\partial s} & -\tau \\ 0 & \tau & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}.$$

La dynamique de la poutre, paramétrée exclusivement par son abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$, est décrite par les équations (1-4). En introduisant le vecteur d'état $\mathbf{X}(s,t) = (\dot{\mathbf{U}}_c^T, \dot{\mathbf{\Theta}}^T, \mathbf{F}^T, \mathbf{M}^T)^T$ de \mathbb{R}^{12} , il est possible de les mettre sous la forme d'un système hyperbolique du premier ordre de dimension 12×12 :

$$\begin{cases} \mathbf{A}(s) \partial_t \mathbf{X} = (\mathbf{D}^1 \partial_s + \mathbf{D}^0(s)) \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}(0, s) = \mathbf{X}_0(s), \end{cases} \quad (5)$$

où \mathbf{A} est une matrice diagonale définie par $\mathbf{A}(s) = \text{diag}(\rho S \mathbf{I}_3, \mathbf{J}, (S \mathbf{C}_1)^{-1}, \mathbf{C}_2^{-1})$, \mathbf{I}_n est la matrice identité $n \times n$, et \mathbf{D}^1 et \mathbf{D}^0 sont des matrices 12×12 . On remarque que \mathbf{D}^1 est symétrique et ses éléments sont égaux à 0 ou 1, et que \mathbf{D}^0 est antisymétrique et contient les termes relatifs à la courbure. Dans notre cas $\mathbf{X}_0(s)$ est le vecteur des conditions initiales. La densité d'énergie mécanique de vibration de la poutre $\mathcal{E} \in \mathbb{R}_+$ peut alors s'écrire :

$$\mathcal{E}(s,t) = \frac{1}{2} (\mathbf{X}, \mathbf{X})_{\mathbf{A}}, \quad (6)$$

et la densité de flux d'énergie $\Pi \in \mathbb{R}$ dans la poutre est :

$$\Pi(s,t) = -\frac{1}{2} (\mathbf{X}, \mathbf{X})_{\mathbf{D}^1} = -(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{U}}_c + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{\Theta}}). \quad (7)$$

On adopte la notation $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{G}} := \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{v}$ où \mathbf{G} est une matrice carrée. Finalement, le produit scalaire de l'Eq. (5) avec \mathbf{X} mène à la loi de conservation de l'énergie, encore appelée équation de continuité :

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_s \Pi = 0. \quad (8)$$

3 Propagation d'ondes HF dans des treillis de poutres tridimensionnels

Dans cette partie, nous nous intéressons à la caractérisation de la solution du système (5) dans le domaine HF. Les vibrations HF sont initiées par des conditions initiales qui oscillent à une échelle ε comparable à la longueur d'onde. Elles peuvent être par exemple sous forme d'ondes planes $\mathbf{X}_\varepsilon^0(s) = \chi(s) e^{iks/\varepsilon}$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\chi(s)$ est un vecteur variant lentement. Le système (5) étant hyperbolique, sa solution $\mathbf{X}_\varepsilon(s,t)$ est de même nature que la condition initiale, il n'est donc pas possible de décrire sa limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (qui correspond au régime HF). Cependant, l'énergie injectée dans le système par les conditions initiales va se propager dans la poutre, et nous devrions être capables de suivre son évolution par l'Eq. (8). Le lien entre la solution \mathbf{X}_ε de l'Eq. (5) et son énergie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est établi grâce à la transformée de Wigner de \mathbf{X}_ε et sa limite, la mesure de Wigner. Il est montré dans [3, 15, 16] comment une relation de continuité pour la mesure de Wigner de la forme de l'Eq. (8) peut ensuite être obtenue.

3.1 Transport d'énergie HF dans une poutre de Timoshenko

Dans le cadre d'une paramétrisation HF, le problème (5) s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{A}(s) \partial_t \mathbf{X}_\varepsilon = (\mathbf{D}^1(\varepsilon \partial_s) + \varepsilon \mathbf{D}^0(s)) \mathbf{X}_\varepsilon, \\ \mathbf{X}_\varepsilon(0, s) = \mathbf{X}_\varepsilon^0(s). \end{cases} \quad (9)$$

La condition initiale \mathbf{X}_ε^0 varie à une échelle plus petite ou égale à ε , ce qui est le cas pour les ondes planes $\mathbf{X}_\varepsilon^0(s) \propto e^{iks/\varepsilon}$ considérées ci-dessus. À condition que la suite (\mathbf{X}_ε) reste bornée dans l'ensemble des fonctions de carré intégrable par rapport à $s \in \mathbb{R}$, sa transformée de Wigner $\mathbf{W}_\varepsilon[\mathbf{X}_\varepsilon]$ a une limite hermitienne faible (notée \mathbf{W}) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ qui est non négative, la mesure de Wigner de la suite (\mathbf{X}_ε) (voir [15, 16]). Celle ci peut être décomposée comme (voir [3, 10]) :

$$\mathbf{W}(s, k, t) = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{i,j=1}^{R_\alpha} w_\alpha^{ij}(s, k, t) \mathbf{v}_{\alpha_i}(s, k) \otimes \mathbf{v}_{\alpha_j}(s, k),$$

où $(\mathbf{v}_{\alpha_i})_{1 \leq i \leq R_\alpha}$ sont les vecteurs propres de la matrice de dispersion $\mathbf{L}(s, k) := k\mathbf{A}^{-1}(s)\mathbf{D}^1$ de l'Eq. (9) associés à la valeur propre λ_α de multiplicité R_α (supposée indépendante de $(s, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$) avec $\sum_{\alpha=1}^M R_\alpha = 12$ où M est le nombre de valeurs propres différentes. Le calcul des valeurs propres de \mathbf{L} donne :

$$\begin{aligned} \lambda_{P\pm}(s, k) &= \pm c_P(s)|k| = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} |k| && \text{chacune de multiplicité 3,} \\ \lambda_{T\pm}(s, k) &= \pm c_T(s)|k| = \pm \sqrt{\frac{\mu G}{\rho}} |k| && \text{chacune de multiplicité 3,} \end{aligned}$$

où $\mathbf{k} := k\hat{\mathbf{t}}$ est le vecteur d'onde dans une poutre orientée par son vecteur tangent unitaire $\hat{\mathbf{t}}$, c_P et c_T sont les vitesses de groupe des ondes longitudinales et transversales (comme ces ondes ne sont pas dispersives dans le régime HF, les vitesses de groupe et de phase sont les mêmes). On a $R_\alpha^\pm = 3$ pour $\alpha = P, T$ tant pour les ondes se propageant suivant $\hat{\mathbf{t}}$ (+) que pour les ondes se propageant suivant $-\hat{\mathbf{t}}$ (-). Par le calcul des vecteurs propres correspondants, on remarque que ceux associés aux valeurs propres $P\pm$ sont de type compression (mouvements de translation selon $\pm\hat{\mathbf{t}}$) et flexion (rotations autour de $\pm\hat{\mathbf{n}}$ et $\pm\hat{\mathbf{b}}$), tandis que ceux associés aux valeurs propres $T\pm$ sont de type cisaillement (translations selon $\pm\hat{\mathbf{n}}$ et $\pm\hat{\mathbf{b}}$) et torsion (rotation autour de $\pm\hat{\mathbf{t}}$). Ils sont linéairement indépendants, donc aucun couplage ne se produit entre les modes dans le régime HF en dehors des interfaces (lesquelles sont analysées dans la section suivante). Par ailleurs, on remarque que la courbure et la torsion de la fibre neutre n'interviennent pas dans la propagation de l'énergie associée aux ondes HF.

L'enjeu de l'approche proposée dans cet article est de caractériser les chemins et les niveaux d'énergie dans un assemblage de poutres. Grâce à la mesure de Wigner, la limite haute fréquence de la densité d'énergie (6) peut être exprimée comme :

$$\mathcal{E}(s, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A} : \mathbf{W} dk. \quad (10)$$

En utilisant la symétrie $w_{\alpha+}^{jj}(s, k, t) = w_{\alpha-}^{jj}(s, -k, t)$ [10] et l'orthogonalité $(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{v}_{\beta_j})_{\mathbf{L}} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$ des vecteurs propres de \mathbf{L} , l'Eq. (10) se réduit finalement à :

$$\mathcal{E}(s, t) = \sum_{\alpha \in \{P+, T+\}} \int_{\mathbb{R}} w_\alpha^{jj}(s, k, t) dk. \quad (11)$$

les w_α sont donc les densités d'énergie par mode α dans l'espace des phases $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_k^*$. Le vecteur de densité de flux de puissance $\mathbf{\Pi}(s, t) := \mathbf{\Pi}(s, t)\hat{\mathbf{t}}(s)$ s'écrit quant à lui :

$$\mathbf{\Pi}(s, t) = -\frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{D}^1 : \mathbf{W} dk \right) \hat{\mathbf{t}} = \sum_{\alpha \in \{P+, T+\}} \sum_{j=1}^{R_\alpha} \int_{\mathbb{R}} \pi_{\alpha_j}(s, k, t) dk, \quad (12)$$

où $\pi_{\alpha_j}(s, \mathbf{k}, t) := c_\alpha(s)w_\alpha^{jj}(s, k, t)\hat{\mathbf{k}}$ est la densité de flux de puissance du mode α dans une poutre orientée par son vecteur tangent unitaire $\hat{\mathbf{t}}$, avec $\hat{\mathbf{k}} := \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \text{sign}(k)\hat{\mathbf{t}}$: si $k > 0$, alors le flux d'énergie se déplace dans la même direction que $\hat{\mathbf{t}}$, mais si $k < 0$, il se déplace dans la direction opposée. Pour plus de commodité la fonction signe sera notée $\text{sign}(k) = \hat{k}$ par la suite.

Les densités d'énergie et de flux de puissance (Eq. (11) et Eq. (12)) que l'on désire calculer dépendent seulement des éléments diagonaux w_α^{jj} de \mathbf{W}_α , $\alpha \in \{P\pm, T\pm\}$ [3]. On ne s'intéresse donc qu'à la détermination des éléments $(w_{\alpha+}^{jj})$ de $\mathbf{W}_{\alpha+}$, $\alpha \in \{P, T\}$, car il existe une symétrie entre $\mathbf{W}_{\alpha+}(s, k, t)$ et

$W_{\alpha-}(s, -k, t)$. On introduit ainsi l'ensemble des modes énergétiques $E = \{P_1, P_2, P_3, T_1, T_2, T_3\}$ correspondant aux vecteurs propres v_{α_j} , $1 \leq j \leq 3$, et aux valeurs propres associées λ_{α} (comptées avec leurs ordres de multiplicité) pour $\alpha \in \{P+, T+\}$, et on décide de noter les éléments (w_{α}^{jj}) , $\alpha \in \{P+, T+\}$: (w_{α}) , $\alpha \in E$. Il est enfin possible de montrer (voir [3, 10]) que ces densités satisfont les équations de transport du type Liouville suivantes :

$$\partial_t w_{\alpha} + c_{\alpha} \hat{k} \partial_s w_{\alpha} - |k| \partial_s c_{\alpha} \partial_k w_{\alpha} = 0, \quad \alpha \in E. \quad (13)$$

Ces résultats étendent ceux décrits dans [9] pour les poutres bidimensionnelles.

3.2 Transport d'énergie dans les structures couplées

La propagation de la densité d'énergie des ondes HF dans une poutre est décrite par les équations de transport (13). Afin de pouvoir utiliser ce modèle pour des treillis tridimensionnels, les phénomènes en jeu aux jonctions doivent être analysés. Ils contribuent en effet à coupler les densités d'énergie w_{α} . Dans cette section on reprend le formalisme développé dans [9] pour le cas de jonctions bidimensionnelles. Considérons \mathcal{N} poutres occupant les domaines Ω_p de \mathbb{R}^3 , $p \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. Elles sont paramétrées par leurs coordonnées curvilignes $s = (s, s_2, s_3)^T \in \mathbb{R}^3$ telles que $s \in C_p \subset \mathbb{R}$ pour la poutre p . C_p est la courbe formant la fibre neutre de cette poutre, que l'on confond pour simplifier les notations avec l'intervalle de \mathbb{R} dans lequel l'abscisse curviligne varie. Leur jonction $\Gamma := \bigcap_{p=1}^{\mathcal{N}} C_p$ se réduit à un seul point $x_0 = \Psi_p(s_0^p)$ dans cette paramétrisation. Soit \hat{t}^p le vecteur tangent à C_p , $p \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$, pointant vers l'extérieur de la poutre p à la jonction Γ , on suppose également pour plus de commodité que s_0^p peut s'écrire $s_0^p = s_0 \hat{t}^p$ dans le repère de Frenet de chaque poutre p . De la condition de Rankine-Hugoniot écrite pour les équations de transport (13), on déduit que le flux de puissance total (12) est conservé à travers la jonction [17]. Par exemple, la densité d'énergie se propageant dans la poutre 1, impactant la jonction à $s_0 \hat{t}^1$ avec un vecteur d'onde incident k tel que $k \cdot \hat{t}^1 > 0$, est partiellement réfléchi et partiellement transmise tandis que le flux de puissance total reste constant. Le flux s'éloignant de la jonction dans la poutre p après réflexion et transmission s'écrit donc :

$$|\pi_{\alpha}^p(s_0, k, t) \cdot \hat{t}^p| = \sum_{\beta \in E} \left(\rho_{\alpha\beta}^{pp}(s_0) \pi_{\beta}^p(s_0, k_{\beta}^p, t) \cdot \hat{t}^p + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{\mathcal{N}} \tau_{\alpha\beta}^{pq}(s_0) \pi_{\beta}^q(s_0, k_{\beta}^q, t) \cdot \hat{t}^q \right) \quad (14)$$

pour $k \cdot \hat{t}^p < 0$, où $k_{\beta}^q = |k_{\beta}^q| \hat{t}^q$ tel que $c_{\alpha}^p(s_0) |k_{\alpha}^p| = c_{\beta}^q(s_0) |k_{\beta}^q| := \omega$ pour $1 \leq p, q \leq \mathcal{N}$, $\alpha, \beta \in E$, et où la trace à gauche de la jonction de π_{α} dans la poutre p est notée $\pi_{\alpha}^p(s_0, k, t) := \lim_{h \rightarrow 0} \pi_{\alpha}(s_0 \cdot \hat{t}^p - h, k, t)$. $\rho_{\alpha\beta}^{pp}(s_0)$ et $\tau_{\alpha\beta}^{pq}(s_0)$ sont respectivement les coefficients de réflexion et transmission en flux de puissance de la jonction, aussi appelés efficacités dans la littérature. Les relations (14) ci-dessus sont les conditions aux limites utilisées pour résoudre les équations de transport (13). Il est utile d'observer qu'elles restent valables partout dans les poutres lorsqu'on adopte la convention $\rho_{\alpha\beta}^{pp} = 0$ et $\tau_{\alpha\beta}^{pp} = \delta_{\alpha\beta}$ pour tout $s \neq s_0$. Ces coefficients sont calculés à partir des conditions de continuité en déplacement et en effort à la jonction et de l'équation des ondes classiques de la même manière que dans [14].

On observe par le calcul que dans la limite HF, les coefficients de réflexion/transmission relatifs à une onde incidente (notée avec l'exposant I) correspondant à un mouvement de translation u_c^I, v_c^I , ou w_c^I , et à une onde réfléchi ou transmise (exposant R/T) de type rotation $\theta_i^R, \theta_i^{Tq}$, $i = 1, 2$ ou 3 , sont nuls ; et ceux relatifs à un mouvement incident de type rotation et à une onde réfléchi ou transmise de type rotation s'annulent aussi. De plus, la somme de ces coefficients pour un angle donné est égale à 1 ce qui confirme que le flux est bien conservé à l'interface.

4 Simulation numérique

Les discontinuités des vitesses c_{α} à la jonction nous empêchent d'utiliser la méthode des éléments finis classique pour résoudre numériquement les équations de Liouville (13) avec les conditions d'interface de l'Eq. (14). En effet, bien que la densité de flux de puissance total soit continue à la jonction (en vertu de la condition de Rankine-Hugoniot), les densités d'énergie ne le sont pas forcément. Une méthode d'éléments finis "Galerkin" discontinus (DG) [7] est mise en place pour résoudre l'Eq. (13)

avec les conditions de réflexion/transmission de l'Eq. (14). Le principe de la méthode est rappelé dans la Sect. 4.1 et un exemple d'illustration est présenté dans la Sect. 4.2.

4.1 Éléments finis ‘‘Galerkine’’ discontinus

Considérons la partition $\mathcal{T}_h = \cup_{r=1}^K D_r$ d'un treillis $\cup_{p=1}^{\mathcal{N}} C_p$ (les fibres neutres C_p sont maintenant supposées bornées) en K sous-domaines distincts, ou éléments finis D_r , tels que $D_r = [s_{r-\frac{1}{2}}, s_{r+\frac{1}{2}}]$. On suppose que les vitesses c_α sont constantes par élément et notées c_α^r . Ici $|k|$ est fixé, et les w_α sont considérés comme des fonctions de \hat{k} plutôt que de k . Comme les solutions w_α peuvent être discontinues aux jonctions ou aux interfaces entre éléments, on introduit pour la formulation variationnelle du type Galerkine de (13) l'espace d'approximation $V_h = \bigoplus_{r=1}^K V_h^r$ où les espaces tests définis localement $V_h^r \subseteq H^1(D_r)$ n'imposent aucune condition aux limites particulières sur ∂D_r . En conséquence de l'absence de telles conditions pour la solution locale et les fonctions tests, la première est *a priori* multi-définie aux interfaces entre éléments (dont les jonctions) et le flux aux frontières $\pi_\alpha \cdot \hat{t}^r$ n'est pas défini (\hat{t}^r est la normale extérieure à $\partial D_r = \{s_{r-\frac{1}{2}}, s_{r+\frac{1}{2}}\}$). C'est la raison pour laquelle il est remplacé par un flux numérique π_α^* qui dépend de la trace de w_α de chaque côté de l'interface. On obtient la formulation variationnelle DG en multipliant l'Eq. (13) par une fonction test $v \in V_h$ et en intégrant par partie. Celle-ci s'écrit finalement : trouver $w_\alpha \in V_h$ tel que

$$\int_{D_r} \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}(s, \hat{k}, t) v(s) - c_\alpha^r \hat{k} w_\alpha(s, \hat{k}, t) \frac{dv}{ds} \right) ds = - [\pi_\alpha^* \cdot \hat{t}^r v]_{s_{r-\frac{1}{2}}}^{s_{r+\frac{1}{2}}}, \forall v \in V_h.$$

Le flux numérique π_α^* à l'interface $s = s_{r+\frac{1}{2}}$ est construit à partir des valeurs approchées de $w_\alpha(s_{r+\frac{1}{2}}, \hat{k}, t)$ dans V_h^r (la trace de w_α en $s_{r+\frac{1}{2}}$ sur D_r) et $w_\alpha(s_{r+1-\frac{1}{2}}, \hat{k}, t)$ dans V_h^{r+1} (la trace de w_α en $s_{r+1-\frac{1}{2}}$ sur D_{r+1}). Il doit être consistant et conservatif, voir [14] pour plus de détails. Dans notre cas, il est défini par :

$$\pi_\alpha^*(s_{r+\frac{1}{2}}, \mathbf{k}, t) \cdot \hat{t}^r = \sum_{\beta \in E} \left(\rho_{\alpha\beta}^{rr} \pi_\beta^r(s_{r+\frac{1}{2}}, \mathbf{k}_\beta^r, t) \cdot \hat{t}^r + \sum_{r' \in I_r} \tau_{\alpha\beta}^{r'r'} \pi_\beta^{r'}(s_{r'-\frac{1}{2}}, \mathbf{k}_\beta^{r'}, t) \cdot \hat{t}^{r'} \right)$$

pour $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{t}^r < 0$, et :

$$\pi_\alpha^*(s_{r+\frac{1}{2}}, t) \cdot \hat{t}^r = \pi_\alpha^r(s, \mathbf{k}, t) \cdot \hat{t}^r$$

pour $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{t}^r > 0$, où I_r est l'ensemble des indices des éléments voisins de l'élément r . Dans notre schéma, la discrétisation spatiale se fait par des polynômes de Jacobi d'ordre ℓ , et l'intégration temporelle par un schéma de Runge-Kutta de type SSP (strong stability-preserving) [18].

4.2 Exemple numérique

Le treillis de poutres considéré dans cet exemple est constitué de $\mathcal{N} = 13$ poutres tridimensionnelles : elles forment un cube de côté $L = 5$ ($L_p = L$ pour $1 \leq p \leq 12$) et la treizième poutre relie deux coins diamétralement opposés (sa longueur est donc $L_{13} = \sqrt{3}L$; voir Fig. 1). Toutes les poutres ont la même section Σ et sont constituées du même matériau élastique, isotrope et homogène. Les vitesses des ondes (c_P et c_T pour les modes de compression/flexion et ceux de cisaillement/torsion) sont donc identiques pour chaque poutre. Le coefficient de Poisson est $\nu = 0.3$ et le facteur de réduction de cisaillement est $\mu = 5(1 + \nu)/6 + 5\nu$. La propagation de la densité d'énergie dans les poutres est régie par (13) et les coefficients de réflexion/transmission sont directement calculés par l'approche exposée dans [14]. La condition initiale représente l'énergie d'un choc composé d'ondes de compression P_1 dont l'enveloppe est gaussienne, et appliqué à la poutre 1 dans la direction $\hat{\mathbf{k}} = +1$. La densité nodale est fixée à $20/L$ éléments uniformes par unité de longueur pour chaque poutre. Pour l'interpolation spatiale, on utilise des polynômes de Legendre du troisième ordre, et le schéma d'intégration temporelle est un schéma de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 4. L'échelle de temps $T = L/c_T$ est introduite : c'est le temps nécessaire à une onde transversale pour parcourir un côté du cube. Ce paramètre est fixé à $T = 50$. Le nombre de Courant $CFL := c_T \Delta t / h$ est égal à $CFL = 0.16$, h étant la plus grande longueur des éléments. La Fig. 2 montre l'évolution de l'énergie totale $\int_0^{L_p} \mathcal{E}(s, t) ds$ dans chaque poutre. On observe tout d'abord que les poutres parallèles convergent vers le même état énergétique ; c'est pourquoi, par souci de clarté, les résultats de la Fig. 2 sont affichés par groupe de poutres parallèles, et ensuite la somme des énergies

de chaque groupe. Le premier groupe est composé des poutres parallèles à la poutre initialement chargée (poutres 1, 5, 10 et 11), le second est constitué des poutres verticales 2, 4, 6 et 8, et le troisième des poutres restantes 3, 7, 9 et 12 tandis que la poutre diagonale 13 est traitée séparément. De plus, l'énergie totale dans l'ensemble du treillis est conservée ; c'est en effet une propriété du schéma numérique adopté (l'erreur théorique de dissipation est de l'ordre de $4 \cdot 10^{-9}$ pour $\ell = 3$, voir [19]). Enfin, l'énergie totale dans chaque poutre tend vers une limite quand $t \rightarrow \infty$ qui dépend apparemment de ses paramètres mécaniques. Ce phénomène exhibe le régime diffusif qui se met en place aux temps longs. La Fig. 3 montre l'évolution du rapport $\mathcal{E}_T^p(t)/\mathcal{E}_P^p(t)$ entre l'énergie totale des modes transversaux et celle des modes longitudinaux par poutre, où :

$$\mathcal{E}_\alpha^p(t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{\hat{k}=\pm 1} \int_0^{L_p} w_{\alpha_j}(s, \hat{k}, t) ds \quad 1 \leq p \leq 13, \quad \alpha = P, T.$$

Ce rapport converge vers une constante de la forme $n_T^p c_P / n_P^p c_T$, où n_P^p et n_T^p sont les nombres de modes longitudinaux et transversaux générés par les phénomènes de réflexion/transmission aux jonctions. n_P^p et n_T^p dépendent de la nature de la condition initiale (de type translation ou rotation) et de la forme du treillis. Cependant cette limite doit encore être analysée de façon plus systématique. Pour l'exemple présenté ici, la condition initiale est selon le mode de compression $\alpha = P_1$ dans la poutre 1. Elle se transmet sous forme de modes transverses de cisaillement ($\alpha = T_1$ ou T_2) dans les poutres perpendiculaires (poutre 2 et 12), et de modes de cisaillement et du même mode de compression dans la poutre 13. Il n'y a donc aucune conversion en mode de flexion ($\alpha = P_2$ or P_3) ou de torsion ($\alpha = T_3$) à aucun moment, et $n_P = 1$ et $n_T = 2$ dans ce cas. Les fortes oscillations du début de la simulation se produisent car certaines poutres ne sont pas encore chargées ou chargées exclusivement par des ondes longitudinales ou transversales.

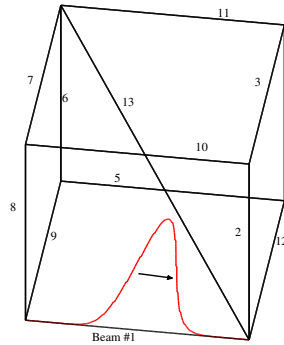


FIG. 1 – Vue de la géométrie du treillis de poutres et de la conditions initiale.

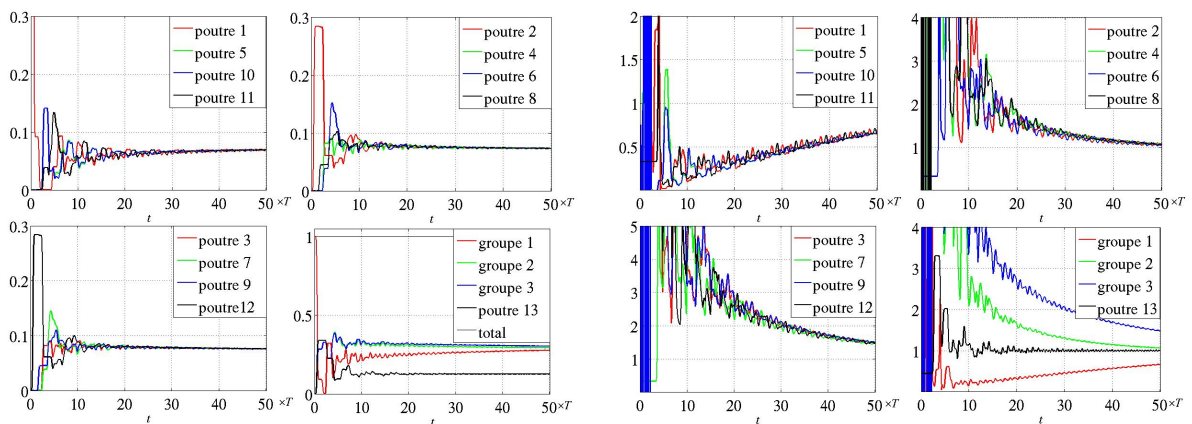


FIG. 2 – Évolution de l'énergie vibratoire totale dans le treillis pour une onde incidente longitudinale.

FIG. 3 – Évolution du rapport $\frac{c_T \mathcal{E}_T^p(t)}{2c_P \mathcal{E}_P^p(t)}$ dans chaque groupe de poutres.

5 Conclusion

Un modèle de transport de la densité d'énergie vibratoire HF dans un treillis tridimensionnel de poutres a été développé. Il prend en compte les phénomènes de réflexion/transmission aux jonctions dans ce domaine fréquentiel. Le modèle analytique proposé peut être intégré numériquement par un schéma d'éléments finis "Galerkin" discontinu couplé à un schéma d'intégration temporelle de Runge-Kutta. Grâce à ses faibles dispersion et dissipation numériques, ce schéma est adapté à des simulations temporelles longues. Les résultats numériques obtenus illustrent bien le régime transitoire et l'apparition d'un régime diffusif aux temps longs. Ce dernier est généré par les multiples réflexions et transmissions des modes énergétiques aux jonctions, avec de possibles conversions. Ce processus de diffusion est différent de celui obtenu dans des milieux aléatoirement hétérogènes (voir [3, 8, 10]), mais se traduit qualitativement et quantitativement par un comportement asymptotique similaire. La diffusion est caractérisée par l'équirépartition de l'énergie totale par sous structure et par mode d'énergie ; une situation que l'on retrouve dans l'hypothèse d'équirépartition modale évoquée dans l'analyse statistique énergétique (SEA) des systèmes vibro-acoustiques [1]. Cependant une analyse mathématique rigoureuse du comportement diffusif induit par les réflexions/transmissions multiples aux jonctions devrait être conduite. D'autres améliorations pourraient être le raffinement des hypothèses cinématiques dans le but de décrire des sections non rigides, ou la prise en compte d'efforts de précontrainte.

Références

- [1] R. H. Lyon, R. G. DeJong. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, Butterworth-Heinemann, 2nd edition, 1995.
- [2] D. J. Nefske, S. H. Sung. *Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and application to beams*, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress & Reliability in Design **111**, 94-100, 1989.
- [3] G. Papanicolaou, L. Ryzhik. *Waves and Transport* , in Hyperbolic Equations and Frequency Interactions, L. Caffarelli & W. E. eds., IAS/Park City Mathematics Series **5**, pp. 305-382, American Mathematical Society, 1999.
- [4] S. Bougacha, J.-L. Akian, R. Alexandre. *Gaussian beams summation for the wave equation in a convex domain*, Communications in Mathematical Sciences **7**, 973-1008, 2009.
- [5] B. Engquist, O. Runborg, A.-K. Tornberg. *High-frequency wave propagation by the segment projection method*, Journal of Computational Physics **178**, 373-390, 2002.
- [6] B. Lapeyre, É. Pardoux, R. Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les Équations de Transport et de Diffusion*, Springer-Verlag, 1998.
- [7] J. S. Hesthaven, T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*, Springer, 2008.
- [8] É. Savin. *Diffusion regime for high-frequency vibrations of randomly heterogeneous structures*, Journal of the Acoustical Society of America **124**, 3507-3520, 2008.
- [9] É. Savin. *A transport model for high-frequency vibrational power flows in coupled heterogeneous structures*, Interaction & Multiscale Mechanics **1**, 53-81, 2007.
- [10] É. Savin. *Transient transport equations for high-frequency power flow in heterogeneous cylindrical shells*, Waves in Random Media **14**, 303-325, 2004.
- [11] F. Treyssède. *Elastic waves in helical waveguides*, Wave Motion **45**, 457-470, 2008.
- [12] N.C. Huang. *Theory of elastic slender curved rods*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik **24**, 1-19, 1973.
- [13] A. Yu, M. Fang, X. Ma. *Theoretical research on naturally curved and twisted beams under complicated loads*, Computers & Structures **80**, 2529-2536, 2002.
- [14] Y. Le Guennec, É. Savin. *A transport model and numerical simulation of the high-frequency dynamics of three-dimensional beam trusses*, preprint, 2011.
- [15] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J. Mauser, F. Poupaud. *Homogenization limits and Wigner transforms*, Communications on Pure & Applied Mathematics **L**, 323-379, 1997.
- [16] P.-L. Lions, T. Paul. *Sur les mesures de Wigner*, Revista Matemática Iberoamericana **9**, 553-618, 1993.
- [17] É. Savin. *High-frequency structural dynamics*, preprint, 2010.
- [18] S. Gottlieb, C.-W. Shu, E. Tadmor. *Strong stability-preserving high-order time discretization methods*, SIAM Review **43**, 89-112, 2001.
- [19] M. Ainsworth. *Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous Galerkin finite element methods*, Journal of Computational Physics **198**, 106-130 (2004).