



HAL
open science

Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de modèles de comportement viscoplastiques

Delphine Notta-Cuvier, Bertrand Langrand, Eric Markiewicz, Franck Lauro

► To cite this version:

Delphine Notta-Cuvier, Bertrand Langrand, Eric Markiewicz, Franck Lauro. Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de modèles de comportement viscoplastiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592925

HAL Id: hal-00592925

<https://hal.science/hal-00592925>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de modèles de comportement viscoplastiques

D. Notta^{1,2}, B. Langrand¹, E. Markiewicz², F. Lauro²

¹ ONERA Centre de Lille, DADS/CRD, France, {delphine.notta,bertrand.langrand}@onera.fr

² Univ. Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Lille Nord de France, CNRS, France, {eric.markiewicz,franck.lauro}@univ-valenciennes.fr

Résumé — L'identification des paramètres de comportement du modèle viscoplastique de Johnson-Cook par la Méthode des Champs Virtuels est étudiée. L'utilisation de champs de déformations simulés numériquement permet de mettre en évidence et de quantifier les différents biais pouvant affecter la caractérisation de ces équations constitutives fortement non linéaires. Le traitement de données dynamiques et certaines spécificités du modèle constituent des difficultés supplémentaires.

Mots clefs — Identification, Méthode des Champs Virtuels, Viscoplasticité.

1 Introduction

Les procédures classiques d'identification de paramètres de comportement matériaux reposent en grande majorité sur des essais fortement normalisés (essais de traction, par exemple). Leur exploitation utilise des hypothèses de staticité, très contraignantes, assurant l'homogénéité des champs mécaniques dans l'éprouvette. Ces hypothèses sont évidemment violées dès l'apparition de localisations (comme la striction) et ne sont donc respectées que pour de faibles gammes de déformation. De plus, leur respect est un frein à l'identification de certains paramètres de comportement. Par exemple, le respect de l'homogénéité des champs de vitesse de déformation empêche l'identification de paramètres viscoplastiques sur un seul essai et plusieurs tests, à différentes vitesses de déformation, doivent être mis en œuvre. Le développement des mesures de champs (eg. par stéréo-corrélation d'images numériques) permet une exploitation tensorielle des grandeurs mécaniques et surtout le traitement des hétérogénéités. L'exploitation des essais peut alors être poussée au-delà des restrictions habituelles, en grandes déformations, même jusqu'à rupture. De plus, le traitement de champs hétérogènes permet l'implication de plus de paramètres de comportement simultanément et/ou de façon plus équilibrée ce qui ouvre de nouvelles perspectives d'identification. Par exemple, l'identification de paramètres viscoplastiques est envisageable sur un seul essai, à vitesse de sollicitation constante, grâce à la présence de différentes gammes de vitesses de déformations dans l'éprouvette.

La Méthode des Champs Virtuels (MCV) [3] est dédiée au traitement de mesures de champs de déformations pour l'identification de paramètres matériau. La MCV repose sur le Principe des Travaux Virtuels (1), exprimant l'équilibre mécanique (ici en négligeant les forces volumiques à distance et le travail virtuel des quantités d'accélération). La MCV est donc théoriquement applicable pour la caractérisation de tous types de modèles de comportement, linéaires (eg élasticité linéaire) ou non-linéaires (élastoplasticité, viscoplasticité, endommagement...).

$$\int_V \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}^* dV = \int_{S_f} \vec{T} \cdot \vec{u}^* dS \quad (1)$$

Avec V le volume de l'éprouvette ; $\bar{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy, \vec{T} le vecteur contrainte associé aux efforts appliqués sur la surface S_f . \vec{u}^* est un champ virtuel (CV) en déplacement cinématiquement admissible et $\bar{\varepsilon}^*$ le tenseur des déformations virtuel, dérivant de \vec{u}^* .

Les paramètres de comportement à identifier sont introduits dans l'équation (1) par l'intermédiaire du calcul de $\bar{\sigma}$ à partir des champs de déformation réels mesurés, selon le modèle de comportement considéré. Alors, pour des lois de comportement linéaires, l'expression du PTV (1) pour différents CV conduit à un système linéaire d'équations dont l'inversion permet l'identification directe des paramètres matériaux [4]. Pour des comportements non-linéaires, la MCV repose sur un processus itératif de minimisation des écarts au PTV (1) en fonction des paramètres matériaux [1]. On peut noter que, dans tous les cas, l'application de la méthode avec des CV appropriés ne nécessite pas la connaissance de la répartition précise des efforts dans l'éprouvette (contrairement aux méthodes de type recalage par éléments finis), mais uniquement de leur résultante.

De précédentes recherches [2] ont montré l'identifiabilité par la MCV de modèles plastiques du type Prandtl-Reuss à écrouissage isotrope linéaire. Cette communication vise à étendre l'utilisation de la MCV à la caractérisation du modèle viscoplastique de Johnson-Cook, très utilisé pour des applications industrielles. Les spécificités de ce modèle conduisent à devoir lever de nombreux verrous. L'identifiabilité de ses lois constitutives fortement non-linéaires (voir section 2.1), tant en plasticité (indépendante du temps), qu'en viscoplasticité (dépendance à la vitesse de déformation), peut notamment être compromise par des problèmes d'optimisation de fonctions non-convexes. Surtout, le traitement de données dynamiques « chahutées » introduit ou exacerbe certains biais et sensibilités affectant le processus d'identification. Dans cette communication, ils ont pu être dégagés grâce à des tests utilisant des champs de déformations simulés numériquement. Enfin, les résultats obtenus permettent de discuter de la pertinence des valeurs de paramètres identifiées et du sens à donner à la modélisation de comportements matériau.

2 Caractérisation du modèle viscoplastique de Johnson-Cook par la MCV

2.1 Equations constitutives

Le modèle viscoplastique de Johnson-Cook (JC) [5] a été développé empiriquement pour rendre compte du comportement de matériaux métalliques subissant des chargements à hautes déformations, vitesses de déformation et températures. Ses équations constitutives reposent sur l'hypothèse de partition des déformations et le critère de plasticité de von Mises. Une loi d'écrouissage fortement non-linéaire est considérée, avec l'équation (2) pour des conditions isothermes.

$$\sigma_y = \left(\sigma_0 + K\alpha^n \right) \left(1 + M \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \quad (2)$$

Pour des taux de déformation viscoplastique équivalents, $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$, inférieurs au seuil de viscoplasticité, $\dot{\epsilon}_0$, la contrainte d'écoulement, σ_y , évolue selon un modèle purement plastique (première parenthèse uniquement) à 3 paramètres : σ_0 , la limite initiale d'élasticité ; K et n, les module et exposant d'écrouissage isotrope, respectivement. Dès que $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$ devient supérieur à $\dot{\epsilon}_0$, des effets visqueux se développent dans le matériau. La loi d'écrouissage isotrope est alors enrichie d'une partie dynamique (c'est-à-dire dépendante de la vitesse de déformation), avec M le paramètre viscoplastique de JC.

Un algorithme à retour radial a été implémenté pour permettre le calcul des champs mécaniques, et en particulier des contraintes. Son schéma général est une adaptation des travaux de Simo et Hughes pour la J2-plasticité [6] au modèle viscoplastique de JC et se décompose en une phase de prédiction élastique suivie d'une correction plastique. Un schéma d'intégration temporelle implicite est utilisé. L'algorithme à retour radial a été validé par comparaison de ses résultats à des grandeurs mécaniques issues de la résolution de modèles aux éléments finis (MEF). Un solveur à schéma d'intégration temporelle explicite est utilisé (code de recherche Europlexus). La Figure 1 présente un exemple de tests de validation pour une éprouvette entaillée (paramètres matériau listés dans le Tableau 1) subissant un chargement de traction uniaxiale. En haut, un chargement quasi-statique à faible vitesse de sollicitation permet de valider l'implémentation pour un modèle de comportement purement

plastique. En bas, un chargement dynamique est considéré. A cause de l'utilisation d'un solveur EF explicite, les allures des champs mécaniques (ici de la contrainte axiale σ_{yy}) sont chahutées, ce qui introduit localement des écarts avec les résultats de l'algorithme, plus lisses (schéma implicite).

TAB. 1 – Comportement matériau de l'éprouvette entaillée

Ti6Al4V – Modèle viscoplastique de Johnson-Cook	
Module d'Young, E	114 000 MPa
Coefficient de Poisson, ν	0.342
Limite initiale d'élasticité, σ_0	973 MPa
Module d'écroutissage isotrope, K	557.3 MPa
Exposant d'écroutissage isotrope, n	0.5632
Paramètre viscoplastique de JC, M	0.0329
Seuil de viscoplasticité, $\dot{\epsilon}_0$	1 s^{-1}

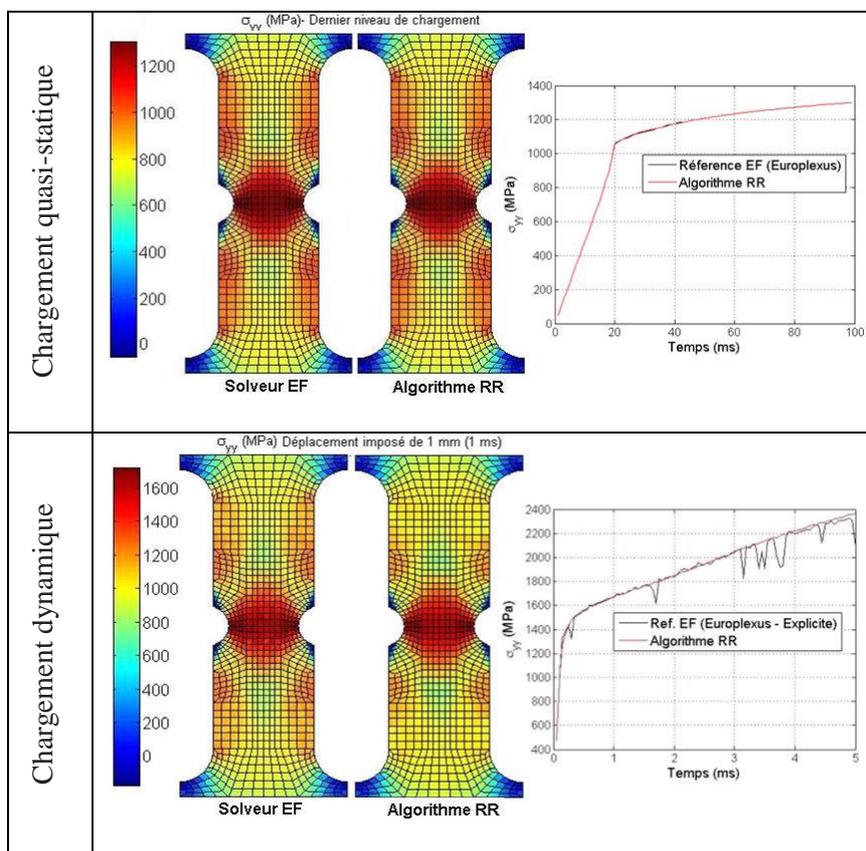


FIG. 1 – Validation de l'algorithme à retour-radial

2.2 Application de la MCV

Les résolutions précédentes du MEF de l'éprouvette entaillée sont utilisées pour fournir les champs de déformation de référence utilisés dans le processus d'identification par la MCV. La possibilité d'exploiter des champs mécaniques hétérogènes avec la MCV permet d'envisager la caractérisation complète du modèle viscoplastique de JC à partir de deux essais de traction uniaxiale uniquement. Dans un premier temps, des conditions de chargement quasi-statiques (vitesse de sollicitation de 5 mm/s) sont simulées pour identifier la partie plastique du modèle, en l'absence d'effets visqueux dans

le matériau. Les paramètres plastiques identifiés sont ensuite utilisés pour caractériser la partie dynamique du modèle à partir d'un chargement à plus haute vitesse de sollicitation (1 m/s).

Le PTV (1) étant applicable à tout CV cinématiquement admissible, un CV simple, unidirectionnel ($0 \ y$) est utilisé. Il présente le grand avantage de permettre le calcul direct du travail virtuel des efforts extérieurs, w_{ext}^* (terme de droite de l'équation (1)), en fonction de la résultante des efforts, F , et de la longueur totale de la zone d'intérêt, L , selon $w_{\text{ext}}^* = F.L$. L'expression du travail virtuel des efforts intérieurs, w_{int}^* (terme de gauche), est également simplifiée, puisque seule la composante ϵ_{yy}^* du tenseur virtuel des déformations est non nulle (égale à 1). w_{int}^* est calculé sous forme discrétisée. Pour cela, le volume d'intérêt est divisé en n sous-volumes V_i , dont la surface extérieure, S_i , est centrée sur le point de « mesure » des déformations i (ici chaque point de Gauss du MEF). Les déformations sont considérées constantes dans chaque sous-volume V_i et égales à leurs valeurs mesurées au point i . Par conséquent, les contraintes calculées par l'algorithme à retour radial vérifient également ces hypothèses. On aboutit à l'expression (3) pour w_{int}^* :

$$w_{\text{int}}^*(\vec{X}) = \sum_i \sigma_{yy}^i \cdot e_i \cdot S_i \quad (3)$$

Avec \vec{X} le vecteur des paramètres de comportement à identifier et e_i l'épaisseur du sous-volume V_i . Une fonction-coût (4) permet d'exprimer les écarts au PTV (1) au sens des moindres carrés, en prenant en considération plusieurs niveaux de chargement, représentés par les instants t_k d'enregistrement des cartographies de déformations. Sa minimisation conduit théoriquement à identifier les paramètres matériau de référence (\vec{X}_{ref}), listés dans le Tableau 1.

$$\phi(\vec{X}) = \sum_{t_k} \left(\frac{\sum_i \sigma_{yy}^i(\vec{X}, t_k) e_i(t_k) S_i(t_k) - F(t_k) L(t_k)}{F(t_k) L(t_k)} \right)^2 \quad (4)$$

Les résultats d'identification de la partie plastique du modèle de JC (2), à partir du chargement quasi-statique, sont particulièrement satisfaisants puisque les écarts relatifs sur la limite initiale d'élasticité, σ_0 , et sur le module d'écrouissage isotrope, K , sont inférieurs au pourcent et de l'ordre de 2% pour l'exposant d'écrouissage isotrope, n .

La MCV est ensuite utilisée pour les champs de déformations issus du chargement à plus haute vitesse de sollicitation afin de caractériser la partie dynamique du modèle de JC (2). Les valeurs des paramètres plastiques précédemment identifiées sont utilisées par l'algorithme à retour radial pour le calcul de w_{int}^* (3). On aboutit à une valeur identifiée du seuil de viscoplasticité de $6.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, très sous-estimée par rapport à la valeur de référence de 1 s^{-1} imposée dans le MEF. La valeur identifiée de M est également très sous-estimée avec un écart relatif par rapport à sa valeur de référence de l'ordre de -40%.

3 Discussion

Les résultats obtenus pour la partie plastique du modèle confirment l'identifiabilité de paramètres de lois de comportement fortement non linéaires par la MCV. Néanmoins, cette méthode n'a pas permis de retrouver des valeurs des paramètres viscoplastiques en adéquation avec les valeurs de référence. Une première analyse permet de constater que le processus de minimisation converge correctement, la valeur de la fonction-coût, ϕ (4), pour les paramètres identifiés étant inférieure à celle calculée pour les paramètres de référence. Cette violation du PTV (1) pour les paramètres de référence laisse penser que l'expression de ϕ (4) est affectée par des biais compromettant l'identification. Le prochain paragraphe vise à les dégager plus précisément.

3.1 Biais affectant la fonction-coût

Avec l'utilisation de données numériques, le principal biais pouvant affecter l'expression de la fonction-coût (4) est relatif aux écarts potentiels entre les contraintes calculées par l'algorithme à retour radial et celles calculées par le solveur EF. En effet, dans le processus de la MCV, les valeurs de w_{int}^* sont calculées à partir des résultats de l'algorithme. En revanche, les valeurs de la résultante des efforts, utilisées pour exprimer w_{ext}^* , sont calculées par le solveur EF à partir de ses propres niveaux de contraintes (respect de l'équilibre mécanique dans la résolution EF). Des écarts sur les contraintes peuvent alors rompre l'équilibre entre ces deux travaux pour le vecteur de paramètres de référence. Celui-ci n'est alors plus identifiable, car il ne correspond plus au minimum de la fonction-coût. Le processus de minimisation, bien que convergeant correctement, conduit alors à l'identification d'un autre vecteur de paramètres.

Dans le cas du chargement quasi-statique, utilisé pour identifier les paramètres plastiques, les erreurs relatives entre $w_{int}^*(\vec{X}_{ref})$, calculé d'une part à partir des contraintes de l'algorithme et d'autre part à partir de celles du MEF, sont en moyenne de 5.10^{-3} % sur tous les niveaux de chargement (maximum de 0.023 %). Ces erreurs sont suffisamment faibles pour que les résultats d'identification soient très satisfaisants. Dans des conditions dynamiques, l'utilisation d'un solveur explicite peut conduire, comme on l'a vu dans la section 2.1 (Figure 1), à des allures chahutées des grandeurs mécaniques et en particulier des contraintes et des vitesses de déformation (exemple Figure 2, en fond d'entaille).

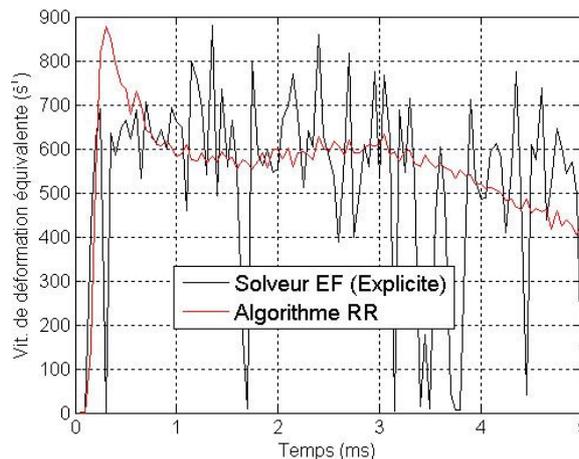


FIG. 2 – Allures des vitesses de déformation calculées

Ainsi, les écarts entre les vitesses de déformation équivalentes calculées par le code EF et par l'algorithme à retour radial peuvent être de l'ordre de 200 s^{-1} , ce qui correspond généralement à un écart sur la contrainte d'écoulement inférieur à 2%. Néanmoins, l'impact peut être beaucoup plus important dans des zones de l'éprouvette aux valeurs de vitesses de déformation proches du seuil de viscoplasticité. En effet, dans ce cas, une légère surestimation de $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$ peut le rendre supérieur à $\dot{\epsilon}_0$ et conduire à une activation, non physique, de la partie dynamique du modèle. Des contraintes visqueuses sont alors calculées par le solveur EF qui surestime ainsi les niveaux de contrainte. De plus, pour empêcher une relaxation trop rapide de ces contraintes visqueuses, leur valeur est maintenue tout au long du reste de la simulation, même si $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$ redevient inférieur au seuil de viscoplasticité. En d'autres termes, la surestimation de $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$ par le solveur EF, même en un seul incrément de temps, est suffisante pour entraîner la surestimation des niveaux de contraintes tout au long du calcul. Les écarts en termes de $w_{int}^*(\vec{X}_{ref})$ peuvent ainsi atteindre des valeurs nettement plus importantes qu'en quasi-statique (jusqu'à 3 %).

Bien que relativement faibles, ces erreurs ont, comme on l'a vu, un impact non négligeable sur les résultats d'identification. La sensibilité des résultats est en effet renforcée par la présence de plateaux

dans la fonction-coût φ (4), liée à une influence déséquilibrée des paramètres de comportement. A titre d'exemple, la Figure 3 souligne le peu d'impact d'une variation des paramètres d'érouissage K et n sur φ (4) au cours du chargement quasi-statique, lorsque la limite initiale d'élasticité prend sa valeur de référence, à l'exception d'erreurs très élevées sur K . Alors, même une très légère variation de la valeur de φ (4) peut amener à des variations très importantes sur les valeurs des paramètres.

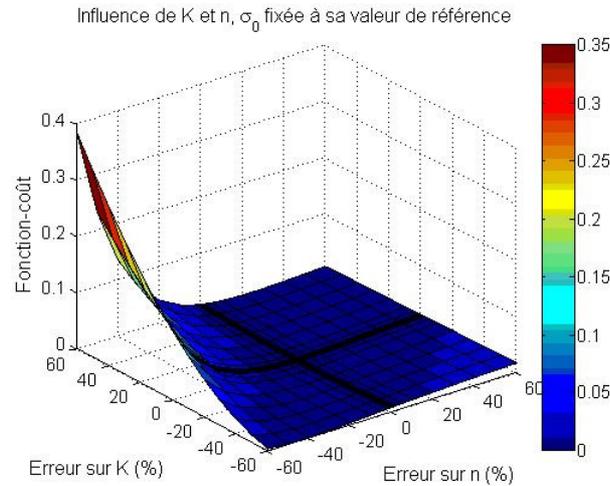


FIG. 3 – Exemple de plateau de la fonction-coût

3.2 Validité du modèle identifié

Les résultats présentés dans cette communication concernent le traitement de données de champs de déformation simulés numériquement. Les problèmes de calculs de contraintes soulevés précédemment, bien que purement numériques, peuvent néanmoins être représentatifs d'un certain type de bruit présent lors du traitement de données expérimentales. Il est donc intéressant de discuter de la validité du modèle identifié dans ces conditions, sans chercher à lisser les données, par exemple.

La caractérisation du modèle viscoplastique de JC pose des problèmes spécifiques liés au rôle particulier du paramètre $\dot{\epsilon}_0$ qui est également le seuil de viscoplasticité. Le processus de minimisation tend à éviter une surestimation de ce paramètre. En effet, avec un seuil trop élevé, la partie dynamique du modèle n'est jamais activée. Une première conséquence est la non-identifiabilité du paramètre M . De plus, l'absence de contraintes visqueuses entraîne le calcul de hautes valeurs pour la fonction-coût. En revanche, l'impact d'une sous-estimation du seuil est plus limité. Même si elle entraîne le calcul de contraintes visqueuses sans sens physique dans des zones de l'éprouvette à faibles taux de déformation (comportement théorique purement plastique), leurs valeurs restent négligeables, justement en raison des faibles valeurs de $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$. Dans des zones sollicitées plus fortement, la sous-estimation de $\dot{\epsilon}_0$ est compensée par une adaptation de la valeur de M (couplage des paramètres) qui permet un calcul de niveaux de contraintes visqueuses équivalents. A titre d'exemple, la Figure 4 permet de constater que les évolutions de σ_{yy} , en fond d'entaille et pour une zone moins sollicitée, calculées avec l'algorithme à retour radial pour les valeurs identifiées des paramètres, sont très proches de celles obtenues avec les paramètres de référence et par le solveur EF, dans les deux cas. Des résultats tout à fait similaires sont obtenus pour les autres composantes du tenseur des contraintes. En termes de comportement « global », les erreurs sur la contrainte d'écoulement liées aux valeurs identifiées présentent logiquement un pic pour des valeurs de vitesses de déformation proches de la valeur théorique du seuil (1 s^{-1}), comme illustré par la Figure 5. Elles restent relativement faibles en dehors de cette zone intermédiaire, jusqu'à de hautes vitesses de déformation, largement au-delà de la limite de validité du modèle de JC déterminée expérimentalement sur les éprouvettes et le matériau considéré (500 s^{-1}). On peut noter que les erreurs sur les valeurs de σ_y ne dépendent que très peu de la valeur de la déformation plastique cumulée, α , grâce aux très faibles erreurs sur les paramètres plastiques identifiés.

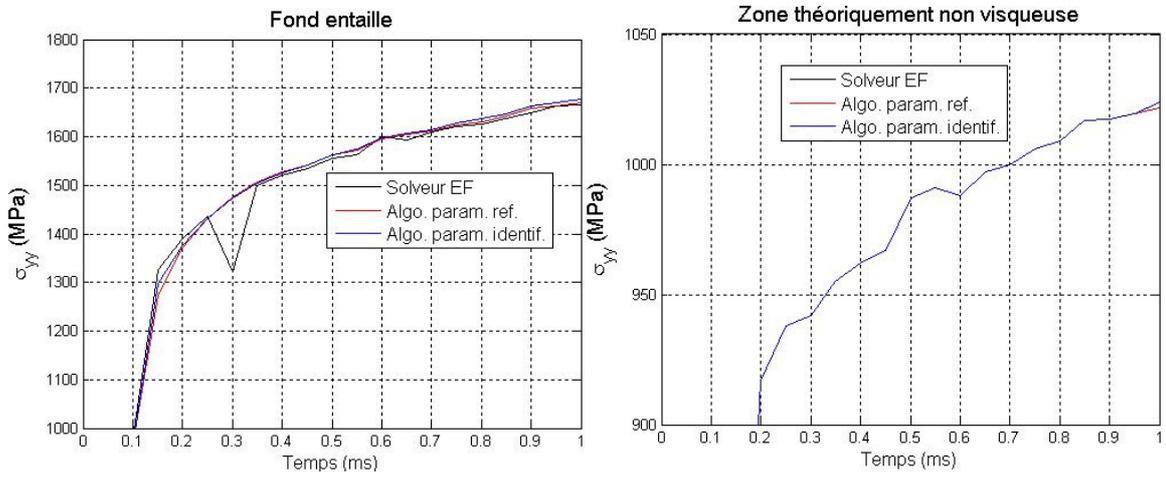


FIG. 4 – Evolutions reconstruites de σ_{yy}

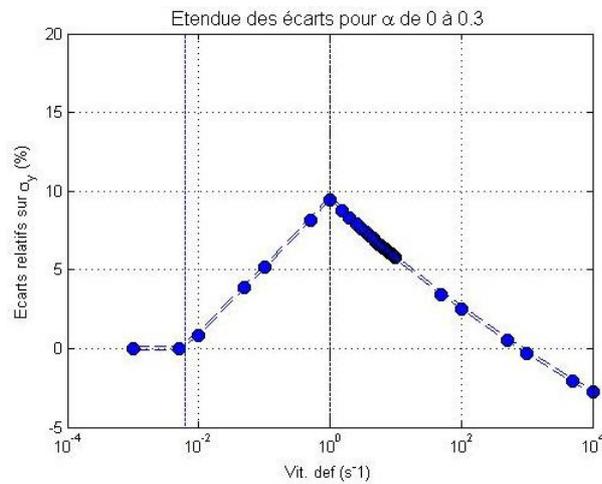


FIG. 5 – Impacts sur la contrainte d'écoulement des paramètres identifiés

La sous-estimation de la valeur identifiée du seuil de viscoplasticité, associée à une valeur corrigée pour M semble donc être un bon compromis pour retranscrire l'évolution des champs de contraintes dans l'éprouvette.

« L'échec » de l'identification par la MCV de la partie dynamique du modèle de JC est donc à nuancer. Les résultats amènent à s'interroger sur le point crucial, qui n'est pas forcément propre à la MCV, du sens à donner à la caractérisation de modèles de comportement. Ainsi, si l'objectif est de caractériser le jeu de paramètres, dans son ensemble, qui permet de modéliser au mieux l'évolution des champs mécaniques au sein d'un matériau, alors l'identifiabilité par la MCV du modèle viscoplastique de JC est démontrée. Si, en revanche, la procédure d'identification vise à quantifier précisément chaque paramètre séparément, en particulier pour donner un sens physique au seuil de viscoplasticité, alors des adaptations du processus sont nécessaires. Par exemple, une évaluation séparée de $\dot{\epsilon}_0$ sur un chargement à vitesse de sollicitation croissante peut être envisagée par détection des écarts à un comportement purement plastique. La MCV est ensuite réutilisé sur un chargement dynamique pour identifier le seul paramètre M . Le choix des objectifs d'une procédure d'identification est intimement lié au sens à donner à la modélisation du comportement des matériaux. Dans le cas du modèle de JC, purement empirique, il n'est pas rare que la valeur de M soit identifiée pour une valeur de $\dot{\epsilon}_0$ particulière et souvent arbitraire (généralement 1 s^{-1}), sans que la validité du modèle identifié ne soit remise en cause.

3 Conclusion

La Méthode des Champs virtuels est utilisée pour caractériser le modèle viscoplastique de Johnson-Cook dans son intégralité. Des champs de déformation simulés numériquement, à partir de la modélisation EF d'une éprouvette entaillée sont utilisés. Deux chargements de traction uniaxiale sont successivement considérés. Dans un premier temps, un chargement à faible vitesse de sollicitation (conditions quasi-statique) est utilisé pour identifier la partie plastique du modèle (écrouissage isotrope en loi puissance, de type Prandtl-Reuss). Dans un second temps, ces paramètres identifiés sont utilisés pour identifier la partie dynamique du modèle, en appliquant la MCV sur un chargement en conditions dynamiques.

La possibilité d'identifier des modèles de comportement fortement non-linéaires par la MCV est prouvée par la précision et la robustesse des résultats obtenus sur la partie plastique du modèle.

Lors du traitement de données dynamiques, des perturbations sur les champs de contraintes entraînent des biais sur la fonction-coût qui nuisent à l'identification. Néanmoins, les valeurs des paramètres identifiés conduisent au calcul d'un travail virtuel des efforts intérieurs très proche du travail virtuel des efforts extérieurs issus des résultats du solveur EF. Ainsi, les évolutions temporelles (ie au cours de l'essai) des champs mécaniques, et en particulier des contraintes, calculées avec les paramètres identifiés, sont très proches de celles de référence. Alors, bien que les valeurs identifiées pour chaque paramètre dynamique (module et seuil de viscoplasticité) soit éloignées des valeurs attendues, le couple $M/\dot{\epsilon}_0$ issu de la MCV permet de retranscrire correctement le comportement global du matériau.

Les biais rencontrés lors du traitement de données en conditions dynamiques peuvent être comparable à un bruit affectant des données expérimentales. La sensibilité des résultats aux moindres perturbations sur la fonction-coût peut donc être un obstacle non négligeable au traitement de données mesurées et non pas simulées. Des études reposant sur le traitement de mesures de champs par stéréocorrélation d'images sont en cours.

Références

- [1] S. Avril, F. Pierron, Y. Pannier, R. Rotinat. *Stress Reconstruction and Constitutive Parameter Identification in Plane-Stress Elasto-Plastic Problems Using Surface Measurements of Deformation Fields*, Experimental Mechanics, vol 48, 403-419, 2008.
- [2] S. Blanchard. *Caractérisation du Comportement Non-Linéaire des Matériaux à partir d'Essais Statiquement Indéterminés et de Champs de Déformation Fortement Hétérogènes*, Thèse de Doctorat, UVHC, 2009.
- [3] M. Grédiac. *Principe des Travaux Virtuels et Identification*, CR de l'Académie des Sciences Paris, Série II, vol 309, 1-5, 1989.
- [4] M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron. *Special Virtual Field for the Direct Determination of Material Parameters with the Virtual Fields Method. 1-Principle and Definition*, Int. J. of Solids and Structures, vol 39, 2691-2705, 2002.
- [5] G.R. Johnson, W.H. Cook. *A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain-Rates and High Temperatures*, Proceedings of the 7th Int. Symposium on Ballistic, The Hague, 1983.
- [6] J.C. Simo, T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*, 2nd Edition, Springer, 1998.