



**HAL**  
open science

## Amortissement du ballonnement d'un liquide dans un réservoir élastique

Thomas Miras, Jean-Sébastien Schotté, Roger Ohayon

► **To cite this version:**

Thomas Miras, Jean-Sébastien Schotté, Roger Ohayon. Amortissement du ballonnement d'un liquide dans un réservoir élastique. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592924

**HAL Id: hal-00592924**

**<https://hal.science/hal-00592924>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Amortissement du ballotement d'un liquide dans un réservoir élastique

T. Miras<sup>1</sup>, J.-S. Schotté<sup>1</sup>, R. Ohayon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ONERA, Département Aéroélasticité et Dynamique des Structures, France, {thomas.miras, jean-sebastien.schotte}@onera.fr

<sup>2</sup> LMSSC, Conservatoire National des Arts et Métiers, France, roger.ohayon@cnam.fr

---

**Résumé** — On présente ici une formulation d'un problème couplé fluide - structure linéarisé amorti : il s'agit dans un premier temps d'introduire un modèle d'amortissement diagonal dans les équations réduites du problème hydroélastique avec ballotement. Le système couplé dissipatif obtenu est alors non symétrique. En projetant sur ses modes propres complexes, on construit les réponses fréquentielles et temporelles pour différents types d'excitation.

**Mots clés** — Hydroélasticité, Ballotement, Amortissement, Modèle de Caughey, Modes complexes, Synthèse modale.

---

## 1 Introduction

Cette étude s'inscrit dans le cadre des travaux effectués dans ce domaine par l'ONERA en collaboration avec le CNAM/LMSSC depuis plusieurs années [4, 5, 14]. Cette problématique, qui fait l'objet de nombreuses études récentes [8, 6], intéresse différents domaines de l'industrie (aérospatiale, génie civil, automobile, ...). Il existe en effet un besoin de la part des industriels qui souhaitent disposer d'outils de modélisation pour prévoir l'influence des liquides internes sur les structures dès la phase de conception. La modélisation précise de l'ensemble des phénomènes dissipatifs dans le liquide (viscosité, capillarité, mouillage, contamination, etc) nécessiterait une résolution temporelle de l'équation de Navier-Stokes dans un logiciel de mécanique des fluides. Cependant cette approche n'est pas adaptée lorsque l'on s'intéresse en phase de conception, au comportement vibratoire du système. Pour ces raisons, on souhaite simplifier le modèle du fluide et s'appuyer sur une approche de type fluide potentiel généralement utilisée pour traiter les problèmes de couplage fluide-structure linéarisés non amortis. On présente donc dans un premier temps une formulation du problème hydroélastique avec ballotement linéarisée pour un fluide pesant, incompressible, non visqueux contenu dans un réservoir déformable (section 2.1). Dans la section 2.2, on propose d'introduire l'amortissement dans les équations du problème de manière a posteriori. Cette formulation est parfaitement adaptée à une résolution dans le domaine fréquentiel et permet d'utiliser une méthode de synthèse modale. Elle offre également une alternative aux résolutions temporelles quand les déformations du système sont de faible amplitude.

## 2 Equations matricielles du problème

### 2.1 Fluide non dissipatif

Les équations locales linéarisées (1) sont données pour un fluide homogène au repos, non visqueux, incompressible et donc irrotationnel [12] On peut alors écrire la formulation variationnelle donnée par l'équation (2). Le temps  $t$  est considéré comme un paramètre et les fonctions test  $\delta\varphi$  sont indépendantes de ce paramètre.

$$\Delta\varphi(M,t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_F \quad (1a)$$

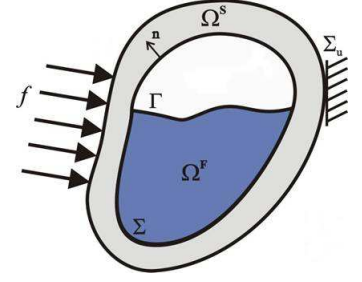
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma_i \quad (1b)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\dot{\varphi}}{g} - \frac{1}{\mathcal{A}(\Gamma)} \int_{\Sigma} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} d\Sigma \quad \text{sur } \Gamma \quad (1c)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0 \quad (1d)$$

$$\varphi(M,t=0) = \varphi_{ini} \quad (1e)$$

$$\dot{\varphi}(M,t=0) = \dot{\varphi}'_{ini} \quad (1f)$$



- $\varphi$  : potentiel de déplacement du fluide.
- $\mathbf{u}$  : vecteur de déplacement de la structure.
- $\mathbf{n}$  : normale unitaire sortante à la surface  $\Sigma$
- $z$  : coordonnée selon l'axe vertical.
- $(M,t)$  : variables de l'espace et du temps.
- $\Sigma$  : Interface fluide-structure.
- $\Sigma_u$  : Encastrement.
- $\Omega_F$  : Volume fluide.
- $\Gamma$  : Surface libre du fluide.
- $\mathcal{A}(\Gamma)$  : Aire de la surface libre.

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \varphi \in \mathbf{C}_\varphi^*, \forall \delta\varphi \in \mathbf{C}_\varphi^*, \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\int_{\Omega_F} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi d\Omega_F}_{\mathcal{F}(\varphi,\delta\varphi)} + \underbrace{\frac{1}{g} \int_{\Gamma} \dot{\varphi}\delta\varphi d\Gamma}_{\mathcal{S}(\dot{\varphi},\delta\varphi)} + \underbrace{\int_{\Sigma} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\delta\varphi d\Gamma}_{\mathcal{C}(\mathbf{u},\delta\varphi)} = 0 \\ \varphi(M,0) = \varphi_{ini} \quad , \quad \dot{\varphi}(M,0) = \dot{\varphi}'_{ini} \end{array} \right. \quad (2)$$

$\mathbf{C}_\varphi$  représente l'espace des solutions admissibles pour  $\varphi$  et  $\mathbf{C}_\varphi^* = \{\varphi \in \mathbf{C}_\varphi / \int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0\}$ . On peut montrer que  $\mathcal{F}$  est l'opérateur associé à l'énergie cinétique du liquide,  $\mathcal{S}$  l'opérateur associé à son énergie potentielle de ballotement et  $\mathcal{C}$  l'opérateur de couplage fluide-structure à l'interface. Cet opérateur de couplage intervient également en écrivant la formulation variationnelle de la structure faiblement amortie.

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \mathbf{u} \in \mathbf{C}_\mathbf{u}^*, \forall \delta\mathbf{u} \in \mathbf{C}_\mathbf{u}^*, \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \mathcal{D}(\dot{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) + \mathcal{M}(\ddot{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) - \underbrace{\int_{\Sigma} \rho_F \dot{\varphi} (\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{u}) d\Sigma}_{\mathcal{C}(\dot{\varphi},\delta\mathbf{u})} = f(\delta\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(M,0) = \mathbf{u}_{ini} \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}(M,0) = \dot{\mathbf{u}}'_{ini} \end{array} \right. \quad (3)$$

$\mathbf{C}_\mathbf{u}$  représente l'espace des solutions admissibles pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{C}_\mathbf{u}^* = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}_\mathbf{u} / \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Sigma_u\}$ .  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{M}$  sont respectivement les opérateurs d'amortissement et de masse de la structure (supposés constants) et  $f$  représente l'opérateur linéaire des forces extérieures appliquées à la structure.  $\mathcal{K}$  représente l'opérateur d'élastogravité qui contient l'opérateur de raideur de la structure auquel s'ajoute les opérateurs de pré-contrainte liés à la gravité [15].

Après discrétisation par la méthode des éléments finis des formulations variationnelles (2) et (3), on note  $\phi$  et  $U$  les inconnues nodales de  $\varphi$  et  $\mathbf{u}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists (\phi, U) \in \mathbf{C}_\varphi^* \times \mathbf{C}_\mathbf{u}^*, \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}U + \mathbf{D}\dot{U} + \mathbf{M}\ddot{U} - \mathbf{C}\ddot{\phi} = \mathbf{f} \\ \mathbf{F}\phi + \mathbf{S}\ddot{\phi} + \mathbf{C}^T U = 0 \\ \phi(M,0) = \phi_{ini}, \dot{\phi}(M,0) = \dot{\phi}'_{ini}, U(M,0) = U_{ini}, \dot{U}(M,0) = \dot{U}'_{ini} \end{array} \right. \quad (4)$$

où  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  sont les matrices associées aux opérateurs de même nom.

## 2.2 Fluide dissipatif

On propose ici d'introduire l'amortissement du fluide non pas dans ses équations locales (1) mais directement dans son équation matricielle. Dans la formulation (4), on introduit donc une matrice d'amortissement visqueux  $D_F$  dans l'équation du fluide. On suppose ici que les phénomènes dissipatifs n'en-

traint pas de couplage entre la déformation du liquide et celle de la structure.

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists (\phi, U) \in \mathbf{C}_\phi^* \times \mathbf{C}_u^*, \begin{cases} \mathbf{K}U + \mathbf{D}\dot{U} + \mathbf{M}\ddot{U} - \mathbf{C}\ddot{\phi} = \mathbf{f} \\ \mathbf{F}\phi + \mathbf{D}_F\dot{\phi} + \mathbf{S}\ddot{\phi} + \mathbf{C}^T U = 0 \\ \phi(M, 0) = \phi_{ini}, \dot{\phi}(M, 0) = \dot{\phi}'_{ini}, U(M, 0) = U_{ini}, \dot{U}(M, 0) = U'_{ini} \end{cases} \quad (5)$$

On ne construit donc pas la matrice  $D_F$  en introduisant une modélisation physique de l'amortissement mais en faisant le choix d'un modèle d'amortissement diagonal proposé par Caughey [3] qui est une généralisation du modèle d'amortissement de Rayleigh où la matrice d'amortissement s'écrit sous la forme d'une somme de termes composés à partir de la matrice de raideur et de masse du système. Caughey démontre qu'une matrice écrite sous cette forme est diagonalisable dans la base des modes propres réels du système conservatif. Par analogie,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$  étant associés aux opérateurs de raideur et de masse du fluide, on écrit la matrice  $D_F$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{D}_F = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1})^j \mathbf{S} \quad (6)$$

$D_F$  est donc diagonalisable dans la base des modes propres réels de ballonnement du fluide. Ces modes de ballonnement  $\phi_i$  sont calculés à partir de l'équation conservative du fluide (4) avec  $U = 0$  et forment une base pour la réponse du fluide incompressible en cavité rigide immobile [12]. Il est alors possible d'approcher la réponse amortie du liquide  $\phi$  avec une bonne précision par une combinaison linéaire des modes de ballonnement complétée par  $\phi^s$ , une réponse quasi-statique du liquide à la déformation de la structure :

$$\phi = \phi^s + \Phi \kappa \quad (7)$$

où  $\Phi$  est la matrice contenant les  $N$  modes de ballonnement  $\phi_i$  retenus et  $\kappa$  le vecteur contenant les coordonnées généralisées associées à ces modes.

En projetant les équations (5) sur les modes de ballonnement, on démontre que l'on peut écrire le problème couplé de la manière suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \Upsilon\Omega^2 \end{bmatrix}}_{\hat{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} U \\ \kappa \end{pmatrix}}_{\Psi} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_S & 0 \\ -2\Omega Z^t \Phi^t C & 2\Upsilon\Omega Z \end{bmatrix}}_{\hat{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{\kappa} \end{pmatrix}}_{\dot{\Psi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} M + M_0^F & -C\Phi \\ -{}^t\Phi^t C & \Upsilon \end{bmatrix}}_{\hat{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\kappa} \end{pmatrix}}_{\ddot{\Psi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (8)$$

$$\Psi(M, 0) = \Psi_{ini} = \begin{pmatrix} U_{ini} \\ \kappa_{ini} \end{pmatrix}, \quad \dot{\Psi}(M, 0) = \dot{\Psi}'_{ini} = \begin{pmatrix} U'_{ini} \\ \kappa'_{ini} \end{pmatrix}$$

$\kappa_{ini}, \kappa'_{ini}$  se déduisent de  $\phi_{ini}$  et  $\phi'_{ini}$  par la relation (7).  $\Omega, \Upsilon$  et  $Z$  sont des matrices diagonales contenant respectivement les pulsations propres  $\omega_i$ , les masses modales  $\mu_i$  et les coefficients d'amortissement  $\zeta_i$  des modes de ballonnement du fluide. La matrice  $M_0^F$  correspond à la matrice de masse ajoutée du liquide.

### 3 Estimation des coefficients d'amortissement

On souhaite maintenant calculer les coefficients d'amortissement modaux du fluide  $\zeta_i$  en les reliant à la physique des phénomènes dissipatifs dans le fluide. Comme le rappellent Henderson et Miles [7], l'énergie dissipée dans un fluide dépend principalement de quatre phénomènes : la dissipation visqueuse au contact des parois du réservoir, dans le volume du liquide et à la surface libre du liquide, ainsi que le frottement du bord de la surface libre sur la paroi du réservoir (phénomène de mouillage).

Les coefficients  $\zeta_i$  peuvent être exprimés en fonction de l'énergie dissipée par chacun des modes  $i$  en supposant que cet amortissement reste faible ( $\zeta_i \ll 1$ ) :

$$\zeta_i \simeq \frac{-\Delta E_i}{4\pi E_i} \quad (9)$$

Avec  $\Delta E_i$ , l'énergie dissipée sur une période par le mode  $i$  et  $E_i$  l'énergie totale du mode. Parmi les quatre sources précédemment citées, on ne prendra en compte dans un premier temps que de la dissipation visqueuse dans le volume fluide  $\Delta E_i^\Omega$  et aux parois  $\Delta E_i^\Sigma$ . On a donc :  $\Delta E_i = \Delta E_i^\Sigma + \Delta E_i^\Omega$ . On

propose d'utiliser une approche MSE (Modal Strain Energy) pour calculer les taux d'amortissement modaux. Cette méthode consiste à supposer que les modes de ballonnement amortis et non amortis ont des formes proches, de façon à pouvoir utiliser les modes et pulsations propres non amortis  $(\phi_i, \omega_i)$  pour estimer la dissipation d'énergie associée à chaque mode amorti [9]. On note dans la suite  $L$  la longueur caractéristique du réservoir et  $l_v$  la longueur caractéristique des phénomènes visqueux définie par :

$$l_v = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (10)$$

$\nu$  étant le coefficient de viscosité du fluide. On considère alors  $\varepsilon$  le rapport des deux longueurs :  $\varepsilon = \frac{l_v}{L}$ . Puisque le liquide est faiblement amorti on a :  $\varepsilon \ll 1$ . Dans [1], en développant la vitesse du fluide autour d'une valeur non amortie à l'aide du paramètre  $\varepsilon$ , il est montré que la viscosité d'un fluide n'influence son déplacement que sur une fine couche limite au niveau des parois. En dehors de cette couche limite, pour des petits déplacements, le fluide peut être considéré au premier ordre comme irrotationnel. De plus, la couche limite est suffisamment fine pour pouvoir considérer que le volume de fluide irrotationnel est confondu avec le volume total de fluide [17, 10].

### 3.1 Amortissement visqueux aux parois

L'épaisseur de la couche limite dans laquelle est générée la dissipation visqueuse du liquide au contact avec les parois du réservoir est ici suffisamment faible pour que l'on puisse calculer les propriétés de l'écoulement avec un bon degré d'approximation en considérant localement la paroi comme une plaque plane infinie en contact avec un liquide en écoulement parallèle à ce plan (modèle de Stokes). Il est alors possible d'écrire l'énergie moyenne dissipée sur une période par les effets visqueux dans la couche limite à la paroi du réservoir sous la forme [7] :

$$\Delta E_i^\Sigma = -\frac{\rho\pi}{2} l_v \int_{\Sigma} (\nabla\phi_i)^2 \mathbf{n} dS \quad (11)$$

### 3.2 Amortissement visqueux dans le volume du liquide

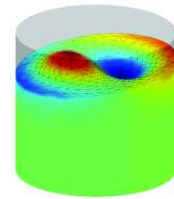
Bien que l'amortissement aux parois et l'amortissement dans le volume du liquide soient respectivement proportionnels à  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$ , on montre que leurs contributions peuvent être comparable [11]. Ainsi, l'ajout du terme de dissipation dans le volume fluide permet d'améliorer les comparaisons calcul-essais des coefficients d'amortissement (voir partie 3.3). On démontre que l'énergie moyenne  $\Delta E_i^\Omega$  dissipée dans le volume d'un liquide incompressible faiblement visqueux et irrotationnel vaut :

$$\Delta E_i^\Omega = -\frac{\rho\pi}{2} l_v^2 \int_{\partial\Omega_F} \nabla((\nabla\phi_i)^2) \mathbf{n} dS \quad (12)$$

### 3.3 Validation de la méthode

La figure 1 et la table 1 montrent une comparaison des résultats analytiques donnés dans [2] pour une cuve cylindrique de petite taille (diamètre : 5.532 cm, hauteur : 3.80 cm) avec des résultats numériques obtenus par un calcul Eléments Finis des intégrales (11) et (12). On constate un bon accord entre les deux approches.

Numéro du mode	Calcul Eléments Finis ( $10^{-3}$ )	Calcul Analytique ( $10^{-3}$ )
1-2	5.0	4.9
3-4	6.2	6.1
5	2.9	2.9
6-7	7.1	7.1
8-9	7.8	7.8



TAB. 1 – Comparaison des coefficients d'amortissement obtenus analytiquement et numériquement.

FIG. 1 – Exemple de mode propre de ballonnement obtenu.

## 4 Réponse temporelle et fréquentielle

Il s'agit maintenant d'obtenir une réponse temporelle et fréquentielle du système obtenu dans la section 2.2 en utilisant une méthode de synthèse modale. Le problème aux valeurs propres quadratique associé au système couplé de l'équation (8) s'écrit :

$$\text{Trouver } (x_i, p_i) \text{ tels que : } (p_i^2 \hat{M} + p_i \hat{D} + \hat{K})x_i = 0 \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, 2N \quad (13)$$

$x_i$  et  $p_i$  sont respectivement les vecteurs propres à droite et les valeurs propres du système. Pour un système faiblement amorti à matrices réelles de taille  $N$ , on aura  $2N$  solutions complexes conjuguées deux à deux. La matrice d'amortissement du système couplé  $\hat{D}$  n'étant pas symétrique, les vecteurs propres à gauche et à droite vont être différents. En notant  $y_i$  un vecteur propre à gauche du système et  $y_i^*$  sa transposée conjuguée, le problème aux valeurs propres à gauche s'écrit :

$$\text{Trouver } (y_i, p_i) \text{ tels que : } y_i^* (p_i^2 \hat{M} + p_i \hat{D} + \hat{K}) = 0 \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, 2N \quad (14)$$

Les modes complexes obtenus  $x_i$  et  $y_i$  ne diagonalisent pas nécessairement les matrices  $\hat{K}$ ,  $\hat{D}$  et  $\hat{M}$  et on ne peut donc pas directement les exploiter. On peut cependant obtenir des propriétés intéressantes de ces modes par passage de l'équation du second ordre (8) à l'équation d'Etat du premier ordre :

$$\mathbf{B} \dot{\Theta}(M, t) - \mathbf{A} \Theta(M, t) = \mathbf{C} F \quad \Theta(M, t) = \begin{pmatrix} \Psi(M, t) \\ \dot{\Psi}(M, t) \end{pmatrix}, \quad \Theta(M, 0) = \Theta_{ini} = \begin{pmatrix} \Psi_{ini} \\ \dot{\Psi}_{ini} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Avec :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\hat{K} & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{K} \\ -\hat{K} & -\hat{D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$I$  étant la matrice identité de taille  $N \times N$ . Ce système est non-symétrique et de taille double, les systèmes aux valeurs propres généralisés à gauche et à droite s'écrivent :

$$\text{Trouver } (\mathbf{X}_i, p_i) \text{ tels que : } (p_i \mathbf{B} - \mathbf{A}) \mathbf{X}_i = 0 \quad \text{avec : } i = 1, 2, \dots, 2N \quad (16)$$

$$\text{Trouver } (\mathbf{Y}_i, p_i) \text{ tels que : } \mathbf{Y}_i^* (p_i \mathbf{B} - \mathbf{A}) = 0 \quad \text{avec : } i = 1, 2, \dots, 2N \quad (17)$$

Les problèmes (13) et (14) sont équivalents aux problèmes (16) et (17) et leurs valeurs propres sont identiques. Il existe différentes manières de construire les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Celle choisie ici permet d'écrire  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}_i$  en fonction de  $x_i$  et  $y_i$  [16] :

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i x_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} y_i \\ \bar{p}_i y_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (18)$$

Les vecteurs  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}_i$  ont des propriétés remarquables qui vont nous permettre de simplifier et de résoudre le système linéarisé. On note dans la suite  $\mathbf{x}$  la matrice modale de taille  $N \times N$  contenant les vecteurs propres  $x_i$  solutions du problème (13) à partie imaginaire positive. De même  $\mathbf{y}$  contient les  $y_i$  à partie imaginaire positive et  $\lambda$  une matrice diagonale contenant les  $N$  valeurs propres correspondantes. Soit  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  les matrices modales contenant les vecteurs  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}_i$ , on peut alors écrire  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  en fonction de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}\lambda & \bar{\mathbf{x}}\bar{\lambda} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y}\bar{\lambda} & \bar{\mathbf{y}}\lambda \end{bmatrix} \quad (19)$$

On suppose ici que les valeurs propres sont distinctes. Dans ces conditions, les vecteurs propres  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}_i$  sont dit bi-orthogonaux par rapport aux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  qui sont alors diagonalisables à l'aide des matrices modales  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  [16, 13].

$$\mathbf{Y}^* \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \bar{\gamma} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}^* \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{\Upsilon} \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\gamma} \bar{\lambda} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Il s'agit maintenant de projeter l'équation (15) sur ces modes complexes. On écrit alors  $\Theta$  comme une combinaison linéaire des modes propres à droite :

$$\Theta(t) = \mathbf{X} q(t) = \sum_{i=1}^{2N} \mathbf{X}_i q_i \quad (21)$$

On ne calcule en réalité qu'une partie des  $2N$  modes. On résout alors l'équation (15) dans le domaine de Laplace avec :

$$\mathcal{L}[\Theta(t)] = \Theta(s) = \mathbf{X}q(s) \quad (22)$$

$$\mathcal{L}[\dot{\Theta}(t)] = s\mathbf{X}q(s) - \Theta_{ini} \quad (23)$$

$$\mathcal{L}[F(t)] = F(s) \quad (24)$$

où  $s$  est la variable complexe de Laplace. En prémultipliant les équations par  $\mathbf{Y}^*$ , on a :

$$\mathbf{Y}^*(s\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{X}q(s) = \mathbf{Y}^*\mathbf{B}\Theta_{ini} + \mathbf{Y}^*\mathbf{C}F(s) \quad (25)$$

Les relations décrites précédemment en (20) permettent de simplifier l'équation (25), on obtient :

$$q(s) = (sI_{2N} - \Lambda)^{-1}\Upsilon^{-1}(\mathbf{Y}^*\mathbf{B}\Theta_{ini} + \mathbf{Y}^*\mathbf{C}F(s)) \quad (26)$$

Où  $I_{2N}$  est la matrice identité de taille  $2N$ . On en déduit  $\Theta$  en utilisant (21) :

$$\Theta(s) = \mathbf{X}(sI_{2N} - \Lambda)^{-1}\Upsilon^{-1}(\mathbf{Y}^*\mathbf{B}\Theta_{ini}) + \mathbf{Y}^*\mathbf{C}F(s) \quad (27)$$

D'après la relation entre  $\Theta$  et  $\psi$  donnée par l'équation (15), on déduit  $\psi(s)$  à partir de  $\Theta(s)$  en fonction des matrices modales  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  en développant l'équation (27) :

$$\psi(s) = -\hat{K}T_1\psi_{ini} + \hat{M}T_2\psi'_{ini} + T_2F(s) \quad (28)$$

Avec :

$$T_1 = \mathbf{x}(sI - \lambda)^{-1}\gamma^{-1}\mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{x}}(sI - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\gamma}^{-1}\bar{\mathbf{y}}^* \quad (29)$$

$$T_2 = \mathbf{x}(sI - \lambda)^{-1}\gamma^{-1}\lambda\mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{x}}(sI - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\gamma}^{-1}\bar{\lambda}\bar{\mathbf{y}}^* \quad (30)$$

Par retour dans le domaine temporel, les deux premiers termes de l'équation (28) correspondent à la réponse libre du système qui dépend des conditions initiales en déplacement et vitesse. Le troisième terme dépend de l'excitation et donnera dans le domaine temporel les réponses transitoire et forcée du système. Il est possible d'obtenir la réponse fréquentielle entre l'entrée  $k$  et la sortie  $l$  en considérant des conditions initiales nulles et en prenant  $s = i\omega$ ,  $\omega$  étant la pulsation d'excitation :

$$\psi_{kl}(\omega) = E_k^T (\mathbf{x}(i\omega I - \lambda)^{-1}\gamma^{-1}\lambda\mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{x}}(i\omega I - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\gamma}^{-1}\bar{\lambda}\bar{\mathbf{y}}^*) E_l \quad (31)$$

$E_i$  est un vecteur colonne composé de zéros avec un unique coefficient non nul sur la ligne d'indice  $i$  qui vaut 1 (A chaque point et direction du système on peut associer un unique indice).

Il est également possible d'obtenir à partir de l'équation (28) la réponse forcée temporelle par transformée inverse de Laplace. Cette réponse s'écrit (pour des conditions initiales nulles) :

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\psi(s)] = 2Re \left( \int_0^t \mathbf{x}e^{\lambda(t-\tau)}\gamma^{-1}\lambda\mathbf{y}F(\tau)d\tau \right) \quad (32)$$

Cette expression peut être calculée analytiquement pour des excitations simples (excitation harmonique ou créneau par exemple) que l'on écrit sous la forme classique d'une somme :

$$\text{Excitation Harmonique : } \psi(t) = Re \left( \sum_{i=1}^{2N} \frac{p_i x_i y_i^*}{(i\alpha - p_i)\gamma_i} F_0 (e^{i\alpha t} - e^{p_i t}) \right) \text{ pour } F(t) = F_0 \cos(\alpha t) \quad (33)$$

$$\text{Excitation Créneau : } \psi(t) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{x_i y_i^*}{\gamma_i} F_0 (e^{p_i t} - 1) \text{ pour } F(t) = F_0 H(t) \quad (34)$$

## 5 Cas test

Afin d'appliquer cette formulation sur un cas test, on considère une cuve cylindrique déformable en acier standard remplie avec de l'eau. Le fond de la cuve est maintenu de façon à bloquer les mouvements de corps rigide. L'excitation se fait sur le bord supérieur de la cuve, dans la direction radiale au point A (voir fig.2). On s'intéresse au déplacement de ce même point A dans la direction radiale.

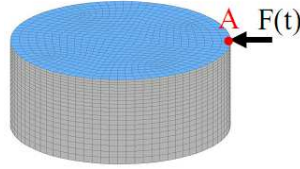


FIG. 2 – Cuve test. Hauteur : 2m, Rayon : 2m

## 5.1 Réponse fréquentielle

Dans la partie 4, on donne une écriture de la réponse fréquentielle à l'aide des modes propres complexes du système couplé conservatif  $x_i$  et  $y_i$ . Ces modes sont calculés à l'aide de l'algorithme de Lanczos complexe du logiciel Nastran. On compare cette méthode modale avec la réponse directe en fréquence, plus précise mais beaucoup plus coûteuse. En effet, pour un système de taille  $N$ , la réponse directe en fréquence est obtenue par inversion à chaque pas de fréquence de la matrice dynamique du système de taille  $N \times N$  :

$$\text{Pour } \omega \text{ fixé, trouver } \psi(\omega) \text{ tel que : } (-\omega^2 \hat{M} + i\omega \hat{D} + \hat{K}) \psi(\omega) = E_l \quad (35)$$

où  $\omega$  représente la pulsation d'excitation. La figure 3 présente une comparaison entre la réponse directe en fréquence et les réponses obtenues par synthèse modale à partir des modes propres réels ou des modes propres complexes. On constate que la synthèse modale à partir des modes propres complexes permet de

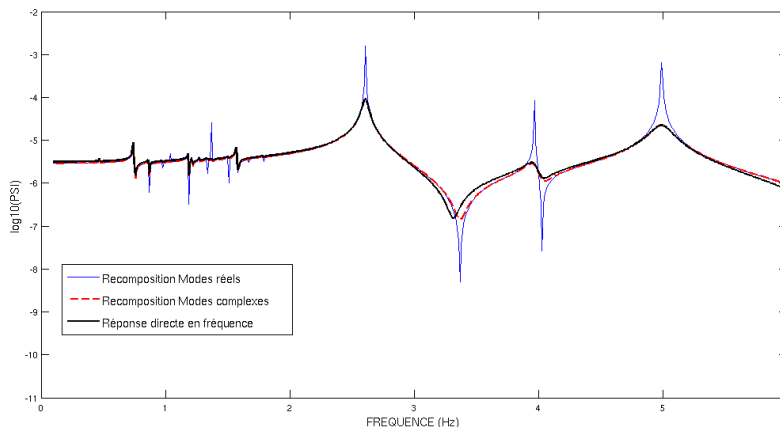


FIG. 3 – Comparaison des réponses fréquentielles en déplacement du point A dans la direction radiale pour une excitation au même point et dans la même direction.

bien approcher la réponse directe en fréquence pour les modes basses fréquences (qui sont les modes de ballonnement du fluide) ainsi que pour les modes hydroélastiques (à partir de 2 Hz).

## 5.2 Réponse temporelle

A l'aide des formules (33) et (34), on représente le déplacement du point A en fonction du temps pour différents types d'excitation : harmonique et créneau (cf. fig. 4). L'excitation harmonique se fait à la fréquence  $f_1 = 0.63$  Hz qui est proche d'une fréquence de ballonnement du liquide, dans ce cas, le liquide a une influence plus importante notamment pendant le régime transitoire (jusqu'à 15 s).

## 6 Conclusion

Dans cette étude, une approche permettant le calcul de la réponse temporelle linéarisée ou la réponse fréquentielle d'un système couplé fluide-structure dissipatif et non symétrique à été proposée. Dans un premier temps on projette l'équation matricielle du fluide sur les modes de ballonnement puis on projette le système couplé réduit sur ses modes complexes. Ces modes ne sont pas orthogonaux et ne diagonalisent



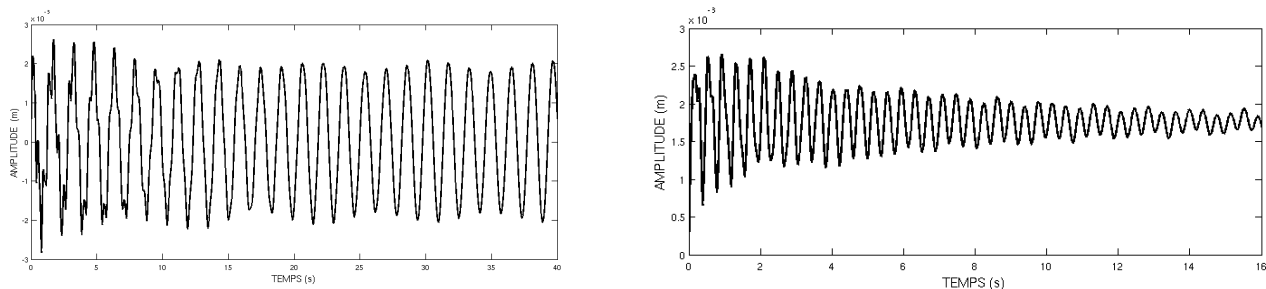


FIG. 4 – Réponse temporelle du déplacement du point A dans la direction radiale pour une excitation harmonique à la fréquence 0.63 Hz (à gauche) et un créneau (à droite).  $F_0 = 600N$

pas les matrices  $\hat{M}$ ,  $\hat{K}$  et  $\hat{D}$ . Cependant, en passant dans l'espace d'Etat, il est possible de retrouver des propriétés de bi-orthogonalité entre les modes à droite et les modes à gauche du système, ce qui permet une résolution du problème par une approche de type synthèse modale. Cette formulation permet de calculer avec une bonne précision la réponse fréquentielle ou temporelle en tout point de la structure et du fluide pour différents types d'excitation de façon beaucoup plus rapide que par une inversion de la matrice dynamique en tout point de fréquence ou encore par une résolution temporelle itérative.

## Références

- [1] L. Anquez. Etude de l'amortissement des vibrations dans un liquide peu visqueux. *Acta Astronautica*, 1 :1475–1485, 1974.
- [2] K. M. Case and W. C. Parkinson. Damping of surface waves in an incompressible liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 172–184, 1957.
- [3] T. Caughey. Classical normal modes in damped linear systems. *Journal of Applied Mechanics*, pages 269–271, 1960.
- [4] M. El-Kamali. *Ballotement des liquides avec tension superficielle : Etudes dynamique et statique*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, France, Mars 2010.
- [5] M. El-Kamali, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Three dimensional modal analysis of sloshing under surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, pages 87–105, 2010.
- [6] O. M. Faltinsen and A. N. Timokha. *Sloshing*. Cambridge University Press, 2009.
- [7] D. M. Henderson and J. W. Miles. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line. *Journal of Fluid Mechanics*, 275 :285–299, 1994.
- [8] R. A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics : Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005.
- [9] C. D. Johnson, D. A. Kienholz, and L. C. Rogers. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock and Vibration Bulletin*, pages 71–82, 2003.
- [10] R. Kidambi. Capillary damping of inviscid surface waves in a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 323–340, 2009.
- [11] C. Martel, J. A. Nicolás, and J. M. Vega. Surface-wave damping in a brimful circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 360 :213–228, 1998.
- [12] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluid-Structure Interaction : Applied Numerical Methods*. Wiley, 1995.
- [13] Y. Saad. *Numerical methods for Large Eigenvalue Problems*. Halsted Press, 1992.
- [14] J.-S. Schotté. *Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique contenant un liquide incompressible*. PhD thesis, CNAM Paris, France, December 2001.
- [15] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Incompressible hydroelastic vibrations : finite element modelling of the elasto-gravity operator. *Computers and Structures*, 83 :209–219, 2005.
- [16] F. Tisseur and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review*, pages 235–286, 2001.
- [17] W. Wang, J. Li, and T. Wang. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM. *Journal of Sound and Vibration*, 317 :739–759, 2008.