



**HAL**  
open science

## Suivi de valeurs propres par une méthode déterminantale pour l'amortissement de structures spatiales

Denis Brizard, Sébastien Besset, Louis Jézéquel, Bernard Troclet

► **To cite this version:**

Denis Brizard, Sébastien Besset, Louis Jézéquel, Bernard Troclet. Suivi de valeurs propres par une méthode déterminantale pour l'amortissement de structures spatiales. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592914

**HAL Id: hal-00592914**

**<https://hal.science/hal-00592914>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Suivi de valeurs propres par une méthode déterminantale pour l'amortissement de structures spatiales

D. Brizard<sup>1</sup>, S. Besset<sup>1</sup>, L. Jézéquel<sup>1</sup>, B. Troclet<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> LTDS, UMR CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, France, {denis.brizard,sebastien.besset,louis.jezequel}@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> EADS ST, Les Mureaux, France, bernard.troclet@astrium.eads.net

<sup>3</sup> LMT, ENS Cachan, France, troclet@lmt.ens-cachan.fr

---

**Résumé** — Les structures spatiales étant faiblement amorties, la protection de la charge utile nécessite l'introduction de tirants amortissants pour réduire les ambiances, car le design des lanceurs est fixé à l'avance. Il est donc nécessaire d'évaluer leur influence sur le comportement de la structure. Une méthode de modification locale est développée. Cette méthode rapide est basée sur la réponse de la structure aux points d'accroche de la modification. Elle étendue à un nombre quelconque de tirants et appliquée à un exemple simple de structure.

**Mots clés** — dynamique, modification locale, suivi de valeur propre.

---

### 1 Introduction

Les lanceurs spatiaux, durant les différentes phases de vol, sont soumis à des ambiances dynamiques sévères. Ces ambiances sont générées, entre autres, par les excitations aérodynamiques sur la coiffe du lanceur, les chocs pyrotechniques de séparation des étages, les excitations transitoires d'allumage des propulseurs ainsi que les oscillations de pression dans les propulseurs en fonctionnement. Il est alors nécessaire de protéger la charge utile du lanceur face à ces excitations multiples, essentiellement dans le domaine des basses fréquences (jusqu'à 100 Hz). Le lanceur étant généralement déjà défini, la protection de la charge utile passe par l'adjonction d'un dispositif, passif ou semi-actif, de contrôle des vibrations. La stratégie adoptée consiste à utiliser des tirants fixés entre des points dont le déplacement relatif est important et pour lesquels la raideur locale est suffisante pour transmettre les efforts transitant dans le tirant. La détermination de l'emplacement et des paramètres optimaux du tirant nécessite l'évaluation des caractéristiques du système dynamique modifié localement par ce tirant.

Baldwin et Hutton [1] classent, dans un état de l'art, les techniques de modification en trois catégories : les techniques basées sur les petites modifications (méthodes de sensibilité, méthodes de perturbation) ; les techniques basées sur une approximation modale ; et les techniques basées sur les modifications locales, qui sont le sujet de ce papier. Weissenburger [2] est un des premiers à évoquer la modification locale de système non amortis. Pomazal [3] étend la procédure de Weissenburger pour pouvoir traiter les modifications locales de systèmes linéaires amortis. Enfin, Jézéquel [4] propose une méthode pour diminuer les effets de la troncature modale. Hallquist [5] traite les vibrations de structures avec des conditions de support arbitraires pour obtenir les fréquences du système contraint en utilisant des multiplicateurs de Lagrange. Dans le cas de systèmes amortis [6], avec modification en masse ou en amortissement, les poles complexes sont localisés à l'aide d'une procédure de Newton-Raphson. Jacquot [7] propose une approche originale basée sur les fonctions de transfert pour calculer la réponse du système modifié, les valeurs propres modifiées ne sont pas calculées. Dowel [8] utilise une formulation Lagrangienne pour analyser l'effet de l'ajout d'un système masse-ressort sur un système dynamique.

Même si le but est différent, il est intéressant de voir l'approche utilisée pour le problème inverse. Tseui [9] modifie des paramètres de masse et de raideur pour atteindre une fréquence donnée, dans le cas de systèmes non amortis. Yee [10] étend ces travaux aux systèmes amortis, une seule modification peut être traitée à la fois et un calcul itératif est employé. Le cas des modifications structurales sur des systèmes tronqués est traité par Ram [11]. Le problème inverse est aussi évoqué dans le cas d'un modèle modal incomplet (modes propres et fréquences propres), toujours dans le but d'atteindre un comportement dynamique désiré [12]. Kyrianiou [13] explore en détail l'assignation de fréquences propres par ajout

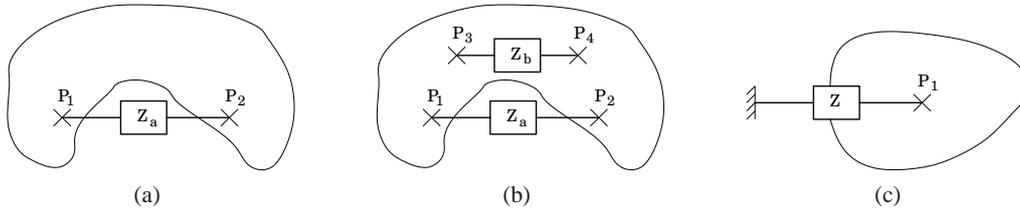


FIG. 1: Modifications locales : (a) ajout d'une impédance mécanique ; (b) cas de deux impédances ; et, (c) liaison au bâti.

d'une masse et d'un ou plusieurs ressorts.

Le but de cet article est d'introduire une formulation générale, basée sur les fonctions de transfert et les impédances mécaniques, pour déterminer les fréquences propres de la structure localement modifiée. L'impédance ajoutée à la structure initiale modélise la modification structurale (cf. figure 1) ; il s'agit d'un amortisseur visqueux, d'un ressort, d'un organe viscoélastique, ou tout organe plus complexe modélisable sous la forme d'une relation effort-déplacement dans le domaine fréquentiel. La méthode proposée est basée sur la réponse de la structure initiale au niveau des points d'accroche du tirant et sur les transferts dynamiques entre ces deux points ; il est possible de prendre en compte un nombre quelconque de tirants, par ailleurs les points d'accroche peuvent être facilement modifiés. Enfin, cette méthode s'applique indifféremment sur les systèmes amortis ou non. Dans cet article, on applique cette méthode sur une structure simple de manière interpréter facilement les résultats.

## 2 Suivi des valeurs propres, modification locale

Dans le cas général d'un système dynamique linéaire, l'équation du mouvement peut être formulée comme suit

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur ;  $\mathbf{U}$  est le vecteur déplacement et  $\mathbf{F}$  est le vecteur des efforts extérieurs. L'équation (1) est mise sous la forme

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}(\lambda) \mathbf{F}, \text{ with } \lambda = \alpha + i\omega \quad (2)$$

avec  $\mathbf{H}(\lambda)$  la matrice de flexibilité dynamique ou fonction de réponse en fréquence ; par la suite, nous utiliserons le terme fonction de transfert. Dans le but de simplifier les notations, la dépendance en  $\lambda$  sera omise dans la suite de l'article.

### 2.1 Ajout d'un tirant

La fonction de transfert entre les points  $P_i$  and  $P_j$  est définie par

$$H_{ij} = \frac{u_i}{F_j} \quad (3)$$

où  $u_i$  est le déplacement scalaire dans la direction définie par  $\overline{P_i P_j}$  et  $F_j$  est la force extérieure le long de cette même direction. Il est alors possible d'écrire les transferts entre  $P_1$  et  $P_2$  de manière matricielle

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

La structure initiale est modifiée par l'ajout d'une impédance mécanique scalaire  $Z$  entre les points  $P_1$  et  $P_2$  (cf. figure 1a), ce qui entraîne la relation effort-déplacement

$$F_1 = Z(u_1 - u_2) \quad (5)$$

En utilisant l'équation (4),  $u_1$  et  $u_2$  sont éliminés de l'équation précédente

$$Z^{-1} F_1 = (H_{11} - H_{21}) F_1 - (H_{22} - H_{12}) F_2 \quad (6)$$

L'équilibre des forces au sein de l'impédance donne

$$F_1 + F_2 = 0 \quad (7)$$

et par conséquent l'équation (6) devient

$$((H_{11} + H_{22} - H_{21} - H_{12}) - Z^{-1}) F_1 = 0 \quad (8)$$

Les solutions non triviales de cette équation, correspondant au cas où la force transmittant dans le tirant est non nulle, sont les nouveaux pôles du système modifié. Les valeurs propres de la structure modifiée par l'ajout du tirant sont donc les solutions de l'équation déterminantale

$$\Delta = |H_{11} + H_{22} - H_{21} - H_{12} - Z^{-1}| = 0 \quad (9)$$

Au lieu de résoudre un problème aux valeurs propres de taille  $n$ , les racines d'un déterminant permettent de déterminer les valeurs propres de la structure modifiée. Cette méthode passe par l'utilisation de certaines fonctions de transfert du système initial, par conséquent non modifié. Il est alors possible de suivre l'évolution d'une solution alors que l'impédance de la modification varie.

## 2.2 Ajout de deux tirants et plus

Cette méthode n'est pas limitée à une unique modification structurale. Elle est développée ici dans le cas de l'ajout de deux impédances distinctes – cela peut être l'ajout de deux amortisseurs visqueux sur la structure par exemple ; il est possible de généraliser l'approche pour un nombre  $N$  quelconque de tirants.

Dans le cas de deux impédances, entre les points  $P_1$  et  $P_2$  et entre les points  $P_3$  et  $P_4$ , les transferts entre ces points d'accroche s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

L'impédance  $Z_a$  entre  $P_1$  et  $P_2$  donne

$$F_1 = Z_a(u_1 - u_2) \quad (11)$$

$$F_1 + F_2 = 0 \quad (12)$$

et, de même, l'impédance  $Z_b$  entre  $P_3$  et  $P_4$  donne

$$F_3 = Z_b(u_3 - u_4) \quad (13)$$

$$F_3 + F_4 = 0 \quad (14)$$

En utilisant l'équation (10), l'équation (11) est reformulée comme suit

$$Z_a^{-1} F_1 = (H_{11} - H_{21}) F_1 + (H_{12} - H_{22}) F_2 + (H_{13} - H_{23}) F_3 + (H_{14} - H_{24}) F_4 \quad (15)$$

et ensuite simplifiée à l'aide de (12)

$$Z_a^{-1} F_1 = (H_{11} + H_{22} - H_{21} - H_{12}) F_1 + (H_{13} + H_{24} - H_{23} - H_{14}) F_3 \quad (16)$$

De la même manière, on obtient pour l'impédance  $Z_b$

$$Z_b^{-1} F_3 = (H_{31} - H_{41}) F_1 + (H_{32} - H_{42}) F_2 + (H_{33} - H_{43}) F_3 + (H_{34} - H_{44}) F_4 \quad (17)$$

$$Z_b^{-1} F_3 = (H_{31} + H_{42} - H_{41} - H_{32}) F_1 + (H_{33} + H_{44} - H_{43} - H_{34}) F_3 \quad (18)$$

Soient les transferts mécaniques suivants

$$T_{aa} = H_{11} + H_{22} - H_{21} - H_{12} \quad (19)$$

$$T_{ab} = H_{13} + H_{24} - H_{23} - H_{14} \quad (20)$$

$$T_{bb} = H_{33} + H_{44} - H_{43} - H_{34} \quad (21)$$

$$T_{ba} = H_{31} + H_{42} - H_{41} - H_{32} \quad (22)$$

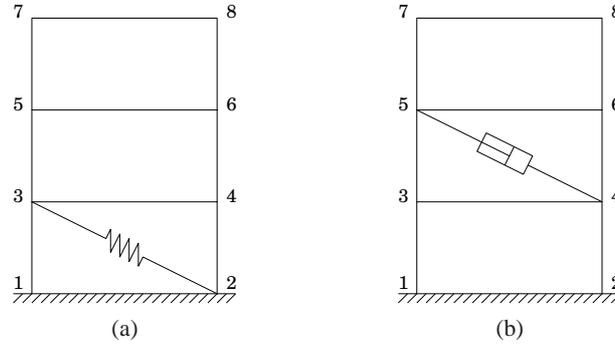


FIG. 2: Modifications locales de la structure : (a) ressort entre les points 2 et 3; et, (b) amortisseur visqueux entre les points 4 and 5.

L'assemblage des équations (16) et (18) aboutit à

$$\begin{bmatrix} T_{aa} - Z_a^{-1} & T_{ab} \\ T_{ba} & T_{bb} - Z_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Les solutions non triviales du système précédent sont les racines du déterminant de taille 2 par 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} T_{aa} - Z_a^{-1} & T_{ab} \\ T_{ba} & T_{bb} - Z_b^{-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

Les valeurs propres de la structure modifiée sont donc les solutions de l'équation

$$(T_{aa} - Z_a^{-1})(T_{bb} - Z_b^{-1}) - T_{ab}T_{ba} = 0 \quad (25)$$

L'équation (24), valable pour deux tirants, peut être facilement généralisée dans le cas d'un nombre  $N$  quelconque de tirants sur la structure initiale.

### 2.3 Problème réel, problème complexe

On peut distinguer deux types de problèmes, pour lesquels la manière de trouver les racines de l'équation déterminantale diffère. Il y a d'une part le problème purement réel : des modifications en masse et/ou en raideur sont effectuées sur un système linéaire non amorti. Les valeurs propres  $\lambda$  restent alors imaginaires pures et il y a une unique direction de recherche, l'axe des pulsations  $\omega$

$$\omega \in \mathbf{R} \mid \Delta(\omega) = 0 \quad (26)$$

Il y a d'autre part le problème complexe : soit la structure est déjà amortie, soit un organe introduisant de l'amortissement – hystérétique ou visqueux – est ajouté sur un système linéaire amorti ou non. Dans ces deux cas les nouvelles valeurs propres  $\lambda$  sont recherchées dans le plan complexe

$$\lambda \in \mathbf{C}, \lambda = \alpha + i\omega \mid \Delta(\lambda) = 0 \quad (27)$$

avec  $\alpha$  le coefficient d'amortissement (partie réelle de  $\lambda$ ) et  $\omega$  la pulsation (partie imaginaire de  $\lambda$ ).

## 3 Application

La méthode précédemment exposée est appliquée sur une structure représentative de la dynamique d'un bâtiment. L'allure générale de la structure est illustrée figure 2; les données caractéristiques sont fournies dans le tableau 1. Chaque plancher est composé de 8 éléments, les montants comportent 4 éléments entre chaque plancher; le nombre total de degrés de liberté s'élève à 135. Les trois premiers modes sont des modes de flexion globaux du bâtiment.

La méthode déterminantale est tout d'abord appliquée à la structure modifiée par l'ajout d'un ressort entre le bâti et le premier plancher, entre les points 4 et 5 (cf. figure 2). L'évolution des trois premières

TAB. 1: Caractéristiques de la structure

Caractéristique	Valeur
Hauteur d'un étage	2,236 m
Largeur	4,472 m
Section poutre horizontale	0,08 m × 0,08 m
Section poutre verticale	0,04 m × 0,04 m
Module de Young E	210 GPa
Module de Poisson $\nu$	0,285
Masse volumique $\rho$	7800 kg · m <sup>-3</sup>

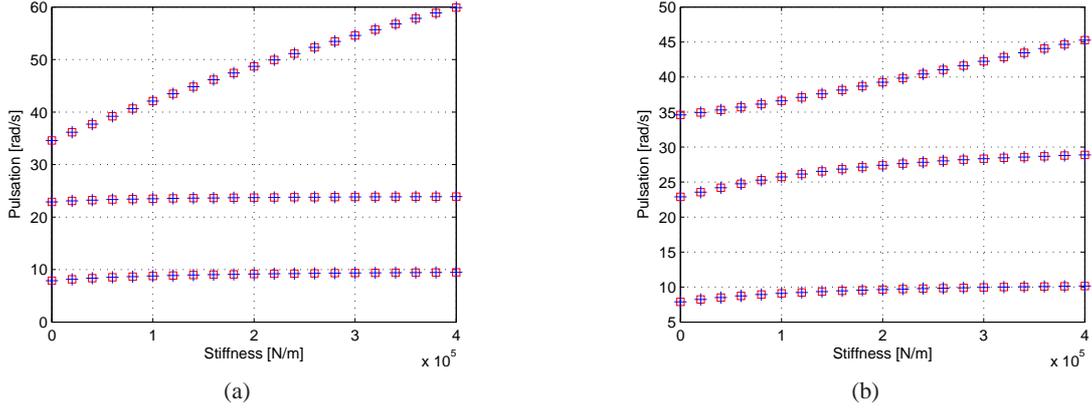


FIG. 3: Evolution des trois premières fréquences propres en fonction de la modification locale de raideur : (a) ressort entre les points 4 et 5 ; et (b), ressort entre les points 2 et 3 (□ méthode déterminantale, + solution de référence).

fréquences propres, pour une raideur ajoutée variant de  $0\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  à  $4 \times 10^5\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , est illustrée par la figure 3a. Cette modification influence essentiellement le troisième mode de flexion, mode pour lequel le déplacement relatif entre les points 4 et 5 est le plus important des trois premiers modes. La fréquence de ce troisième mode est presque doublée, pour la plage de raideur considérée, cela ne modifie en rien la précision de la méthode. La figure 3b correspond à l'ajout ressort entre les points 2 et 3 ; le suivi de l'évolution des premières fréquences propres de la structure est toujours efficace. Dans les deux cas précédents, l'erreur relative en fréquence maximale se situe autour de  $10^{-12}$ .

La réponse est calculée à l'aide des 20 premiers modes de la structure non modifiée

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{X_{ik}^T X_{kj}}{-\omega^2 + \omega_k^2} \quad (28)$$

Quelle que soit la modification, cette base modale est conservée : elle n'est donc calculée qu'une seule fois. Dans le cas de structures plus complexes, l'utilisation de techniques de synthèse modale est envisageable [14].

Dans le but d'amortir les premières fréquences propres de la structure, un amortisseur est introduit entre les points 4 et 5 (cf. figure 2b). La figure 4 est obtenue en faisant varier linéairement l'amortissement de  $0\text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  à  $7000\text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ . La méthode déterminantale permet alors de suivre précisément l'évolution des modes de la structure. L'erreur relative maximale sur la pulsation est de  $10^{-3}$ , pour une grande partie des points elle est inférieure à  $10^{-4}$ . L'erreur sur la partie réelle des valeurs propres est le plus souvent inférieure à  $10^{-3}$ , avec un maximum à  $10^{-2}$ . L'erreur dans le cas du problème dans le plan complexe est plus importante que pour le problème réel : les valeurs propres sont recherchées dans un espace à deux dimensions, ce qui est numériquement moins aisé.

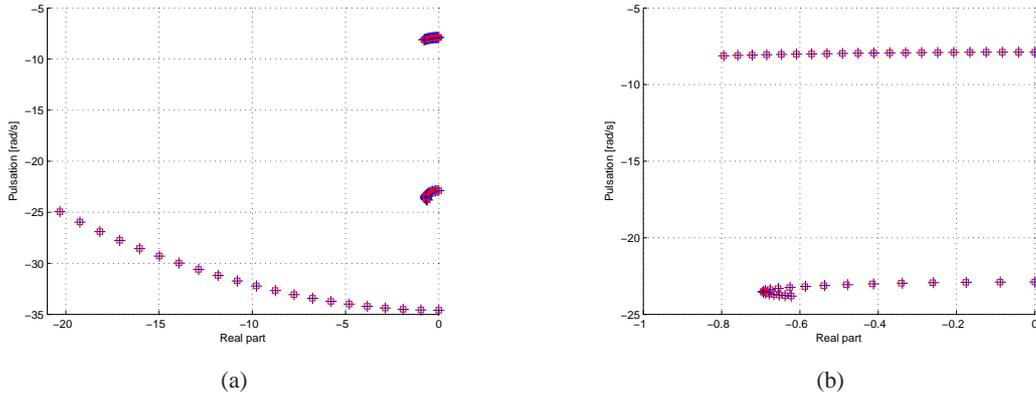


FIG. 4: Evolution, dans le plan complexe, de trois premières valeurs propres de la structure avec un amortisseur visqueux entre les points 4 et 5 : (a) les trois modes ; et, (b) gros plan sur les deux premiers modes ( $\square$  méthode déterminantale,  $+$  solution de référence).

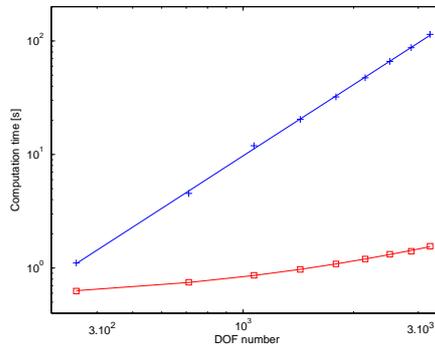


FIG. 5: Temps de calcul pour le suivi, sur 20 points, des 10 premiers modes de la structure ( $\square$  méthode déterminantale,  $+$  analyse aux valeurs propres, — régression).

### 3.1 Temps de calcul

La figure 5 permet de comparer – dans le cas d’une modification de la raideur entre les points 2 et 3 – les temps de calcul entre la méthode déterminantale et une analyse aux valeurs propres classique ; l’analyse aux valeurs propres consiste à calculer les 10 premières valeurs propres de la structure avec la fonction `eigs` sous Matlab. Plus la taille  $n$  de la structure est importante, plus la différence en temps de calcul entre la méthode proposée et le calcul classique est importante. Alors que pour l’analyse aux valeurs propres le temps de calcul est proportionnel à  $n^{2.09}$ , pour la méthode proposée le temps de calcul varie linéairement avec  $n$ .

Le temps de calcul de la méthode déterminantale dépend principalement :

- du temps nécessaire à l’évaluation du déterminant  $\Delta(\lambda)$  pour une valeur donnée de  $\lambda$  – dans le cas du calcul de la réponse de la structure sur la base des  $n_m$  premiers modes, ce temps est lié au nombre de degrés de liberté  $n$  et au nombre de modes retenus  $n_m$  ;
- du nombre d’évaluations nécessaires pour trouver la nouvelle racine ; ce nombre dépend de l’algorithme et des paramètres de résolution.

Il existe de nombreux outils de recherche de minimum ou de zéros, dans notre cas nous utilisons la boîte à outils d’optimisation développée pour Matlab – Matlab Optimization Toolbox – et notamment les fonctions `fminbnd` et `fsolve`.

## 4 Conclusion

Cette méthode déterminantale, permettant de suivre l'évolution des valeurs propres d'une structure soumise à une modification, nécessite uniquement la connaissance des fonctions de transfert initiales entre les points d'accroche des tirants. Elle s'accommode donc parfaitement de modèles de type boîte noire ou de techniques de synthèse modale.

La validité de la méthode a été établie sur un cas simple, qui montre déjà le gain en temps de calcul. L'application sur la structure spatiale, comportant un nombre bien plus important de degrés de liberté, devrait confirmer cette tendance.

## Références

- [1] J. F. Baldwin and S. G. Hutton. Natural modes of modified structures. *AIAA Journal*, 23(11) :1737–1743, 1985.
- [2] J. T. Weissenburger. Effect of local modifications on the vibration characteristics of linear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :327–332, 1968.
- [3] R. J. Pomazal and V. W. Snyder. Local modifications of damped linear systems. *AIAA Journal*, 9(11) :2216–2221, 1971.
- [4] L. Jézéquel. Procedure to reduce the effects of modal truncation in eigensolution reanalysis. *AIAA Journal*, 28(5) :896–902, 1990.
- [5] J. Hallquist and V.W. Snyder. Linear damped vibratory structures with arbitrary support conditions. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 40 Ser E(1) :312–313, 1973.
- [6] J. O. Hallquist. An efficient method for determining the effects of mass modifications in damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 44(3) :449 – 459, 1976.
- [7] R.G. Jacquot. The response of a system when modified by the attachment of an additional sub-system. *Journal of Sound and Vibration*, 49(3) :345–351, December 1976.
- [8] E. H. Dowell. On some general properties of combined dynamical systems. *Transaction of the ASME*, 46 :206–209, March 1979.
- [9] Y. G. Tsuei and Eric K. L. Yee. A method for modifying dynamic properties of undamped mechanical systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 111(3) :403–408, 1989.
- [10] Eric K. L. Yee and Y. G. Tsuei. Method for shifting natural frequencies of damped mechanical systems. *AIAA Journal*, 29(11) :1973–1977, 1991.
- [11] Y. M. Ram, S. G. Braun, and J. Blech. Structural modifications in truncated systems by the Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 125(2) :203–209, September 1988.
- [12] Y. M. Ram and S. G. Braun. An inverse problem associated with modification of incomplete dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 58(1) :233–237, March 1991.
- [13] Andreas Kyprianou, John E. Mottershead, and Huajiang Ouyang. Assignment of natural frequencies by an added mass and one or more springs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(2) :263–289, March 2004.
- [14] S. Besset and L. Jézéquel. Dynamic substructuring based on a double modal analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(1) :011008, February 2008.