

Prise en compte d'incertitudes dans l'analyse modale de machines tournantes

E. Sarrouy¹, O. Dessombz², JJ. Sinou³

¹ LTDS (UMR CNRS 5513), École Centrale de Lyon, France, {emmanuelle.sarrouy,olivier.dessombz,jean-jacques.sinou}@ec-lyon.fr

Résumé — La prévision du comportement dynamique des systèmes tournants nécessite une modélisation réaliste du comportement modal de l'ensemble des pièces et organes constituant les rotors, mais aussi la prise en compte des phénomènes de dispersion inhérents à de tels systèmes.

À l'heure actuelle, des recalages de chacune des pièces des rotors et des assemblages successifs permettent d'aboutir à une modélisation et une prévision suffisantes du comportement dynamique des systèmes tournants (en termes d'estimation des passages des vitesses critiques et des déformées associées). Dans un objectif de robustesse de conception des systèmes tournants, on peut se poser la question de savoir si des modèles linéaires déterministes sont suffisants et s'il n'est pas nécessaire de prendre en compte des aspects dispersifs. Des incertitudes peuvent en effet provenir de différents éléments (raideur des roulements, répartition massique sur l'arbre ou les disques,...). Ces éléments sont donc difficiles à caractériser de façon exacte.

L'objectif de ces travaux est de caractériser l'impact de la prise en compte d'incertitudes dans un système tournant sur des éléments modaux caractéristiques tels que le diagramme de Campbell (évolution des fréquences propres du système avec la vitesse de rotation) et les déformées. L'approche proposée s'appuiera sur une décomposition des modes selon les polynômes du chaos [1].

Le modèle étudié est un rotor composé d'un arbre souple supporté par deux paliers sur lequel sont fixés deux disques rigides. L'équation dynamique générale d'un tel système dans le référentiel fixe est de la forme [3] :

$$[M] \{\ddot{q}\} + \Omega [G] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{f_e\}(t)$$

où $\{q\}$ représente le vecteur des P déplacements, $[M]$ et $[K]$ sont les matrices de masse et de raideur, symétriques, $[G]$ est la matrice gyroscopique, antisymétrique, dont l'influence augmente avec la vitesse de rotation Ω . $\{f_e\}$ est le vecteur des efforts extérieurs, correspondant généralement à l'effet d'un ou plusieurs balourds et, éventuellement, à l'action de la gravité. Ce vecteur sera pris nul pour l'analyse modale. Afin d'extraire les grandeurs modales d'un tel système, il convient d'utiliser la forme augmentée suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}}_{[A]} \{x\} - \underbrace{\begin{bmatrix} [0] & [K] \\ -[K] & -\Omega [G] \end{bmatrix}}_{[B]} \{x\} = \{0\}$$

où $\{x\} = \{\{q\}^T, \{\dot{q}\}^T\}^T$.

En notant $(\{\phi_k\}, \lambda_k)$ le k -ième couple (vecteur propre, valeur propre), on a dans le cas déterministe, le problème aux valeurs propres suivant :

$$[A] \{\phi_k\} = \lambda_k [B] \{\phi_k\} \quad (1)$$

On montre qu'il existe $2P$ couples solutions ayant les propriétés suivantes (en choisissant une normalisation par rapport à $[B]$) :

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1, 2P \rrbracket^2, \begin{cases} \overline{\{\phi_j\}}^T [B] \{\phi_k\} = \delta_{jk} \\ \overline{\{\phi_j\}}^T [A] \{\phi_k\} = \delta_{jk} \lambda_k \end{cases} \quad (2)$$

Si l'on souhaite prendre en compte la dispersion d'un élément du système, il peut être intéressant de se placer dans la base du chaos polynomial homogène [2] pour approcher l'élément incertain d'une part

(impact sur les matrices $[A]$ et/ou $[B]$) ainsi que ses conséquences sur les grandeurs modales ($\{\phi_k\}, \lambda_k$). On projette donc les éléments incertains d'entrée sur la base des polynômes du chaos (polynômes d'hermite multi-dimensionnels pour approcher des lois gaussiennes) notés $\psi_n(\xi)$, $1 \leq n \leq N$, où ξ dénote le vecteur des variables aléatoires :

$$\begin{aligned} [A] \text{ devient } [A] + [\tilde{A}], \text{ avec } [\tilde{A}] &= \sum_{q_1=2}^{Q_A} [A_{q_1}] \psi_{q_1}(\xi) \\ [B] \text{ devient } [B] + [\tilde{B}], \text{ avec } [\tilde{B}] &= \sum_{q_2=2}^{Q_B} [B_{q_2}] \psi_{q_2}(\xi) \end{aligned}$$

Nous proposons ensuite, en généralisant les travaux exposés dans [1], de chercher les éléments propres incertains sous la forme :

$$\begin{aligned} \{\tilde{\phi}_k\} &= \sum_{p=1}^{2P} \left(\sum_{n=1}^N \left({}^{(k)}\lambda_p^n + \mathbf{j} {}^{(k)}\mu_p^n \right) \psi_n(\xi) \right) \{\phi_p\}, \quad ({}^{(k)}\lambda_p^n, {}^{(k)}\mu_p^n) \in \mathbb{R}^2 \\ \tilde{\lambda}_k &= \lambda_k \sum_{s=1}^N \left({}^{(k)}a_s + \mathbf{j} {}^{(k)}b_s \right) \psi_s(\xi), \quad ({}^{(k)}a_s, {}^{(k)}b_s) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Afin de déterminer les $2(2P)(2P+1)N$ coefficients ${}^{(k)}\lambda_p^n$, ${}^{(k)}\mu_p^n$, ${}^{(k)}a_s$ et ${}^{(k)}b_s$, on impose que les modes propres stochastiques respectent des contraintes identiques à (2) c'est-à-dire

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1, 2P \rrbracket^2, \quad \begin{cases} \overline{\{\tilde{\phi}_j\}}^T ([B] + [\tilde{B}]) \{\tilde{\phi}_k\} = \delta_{jk} \\ \overline{\{\tilde{\phi}_j\}}^T ([A] + [\tilde{A}]) \{\phi_k\} = \delta_{jk} \tilde{\lambda}_k \end{cases} \quad (4)$$

En projetant ces $2(2P)^2$ équations complexes sur les N polynômes de la base utilisée, on obtient $2 \times 2(2P)^2 N$ équations réelles nous permettant de déterminer les projections des modes stochastiques sur la base du chaos polynomial utilisée.

Nous appliquons cette méthode à différents cas de rotor incertain : nous considérons d'abord une incertitude sur la raideur d'un des paliers puis une incertitude sur les inerties massiques de l'un des disques. Pour chaque cas, on présente l'influence de l'incertitude sur le diagramme de Campbell et sur les vitesses critiques ainsi que sur l'allure des déformées propres. Une validation des résultats est menée par comparaison avec ceux obtenus par une méthode de Monte Carlo.

Mots clés — Machines tournantes, Analyse modale, Incertitudes, Chaos polynomial.

Références

- [1] O. Dessombz. *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*, Thèse de l'École Centrale de Lyon, 2000.
- [2] R. G., Ghanem, Pol D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, 1991.
- [3] M. Lalanne, G. Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*, 1998.