

Contrôle robuste des simulations numériques utilisant la PGD

Ludovic Chamoin¹, Pierre Ladevèze^{1,2}

¹ LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6/PRES UniverSud Paris)
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

² Chaire de la Fondation EADS “Techniques Avancées en Calcul des Structures”
e-mails : {chamoin,ladeveze}@lmt.ens-cachan.fr

Afin de représenter toujours plus fidèlement la réalité physique, et en vue d’exploiter du mieux possible la flexibilité offerte par la simulation numérique, les modèles mathématiques utilisés de nos jours peuvent faire appel à de multiples paramètres. C’est par exemple le cas pour les modèles probabilistes ou pour ceux associés aux processus d’optimisation. Cependant, lorsque le nombre de paramètres est trop important, les techniques classiques de discrétisation de modèle deviennent rapidement obsolètes car elles génèrent un nombre d’inconnues beaucoup trop volumineux pour pouvoir être traité avec les outils informatiques actuels. Cette croissance exponentielle du nombre d’inconnues en fonction du nombre de paramètres est connu sous le nom de *malédiction de la dimensionnalité*. Des approches numériques alternatives issues de la réduction de modèle sont alors nécessaires pour traiter ces problèmes multi-paramétriques.

Parmi toutes les méthodes de réduction de modèle disponibles aujourd’hui, celle appelée communément *Proper Generalized Decomposition* (PGD) est particulièrement prometteuse et fait actuellement l’objet de nombreux travaux de recherche [2, 6, 3, 8]. Elle est basée sur une représentation par fonctions à variables séparées (appelées modes); ce type de représentation, dérivé de la méthode POD, permet une croissance linéaire du nombre d’inconnues en fonction du nombre de paramètres. Cependant, contrairement à la POD, l’originalité de la PGD est qu’elle ne s’appuie pas sur une base de projection donnée a priori (la construction de cette base nécessitant une connaissance au moins partielle de la solution du problème . . .). La PGD opère au contraire en une stratégie itérative dans laquelle les modes sont calculés à la volée au cours des itérations, en résolvant des problèmes simples. On observe en pratique que peu de modes sont nécessaires pour obtenir une approximation fine de la solution du problème.

La philosophie associée à la PGD n’est pas nouvelle; elle a été introduite il y a plus de vingt ans sous le nom d’*approximation radiale* [4] pour traiter efficacement les problèmes non-linéaires associant espace et temps (à partir d’une stratégie de résolution basée sur la méthode LATIN). Cependant, la généralisation de cette philosophie à divers problèmes de la mécanique (optimisation, données stochastiques, problèmes inverses, etc.) est très récente.

Malgré les nombreux avantages de la PGD, une limitation majeure de cette méthode est qu’il n’existe pas aujourd’hui d’outil robuste de vérification associé qui permettrait de mesurer la qualité de la solution approchée obtenue. Des résultats de base sur l’estimation d’erreur a priori pour les représentations par fonctions à

variables séparées sont donnés dans [4] tandis qu'une première tentative d'estimation a posteriori d'erreur dans ce cadre a été proposée dans [1]. Néanmoins, aucun estimateur d'erreur amenant à une majoration d'erreur garantie et précise n'existe actuellement.

Dans ce travail, nous développons une méthode d'estimation d'erreur robuste qui permet de contrôler efficacement la qualité de la solution numérique obtenue par la PGD [7]. L'estimateur associé est basé sur la notion d'erreur en relation de comportement en s'appuyant sur une solution admissible [5]. En se plaçant par exemple dans le cadre de la thermique transitoire, on montre que la construction de cette solution admissible peut être menée à l'aide d'une double approche PGD : (i) une approche cinématique classique afin de construire en champ de température cinématiquement admissible ; (ii) une approche duale (non classique) afin de construire un champ de flux statiquement admissible. Néanmoins, les deux approches conduisent à des problèmes qui peuvent être aisément résolus avec les outils standards disponibles dans les codes industriels ; ceci fait de la méthode d'estimation d'erreur proposée un outil pratique et pertinent. De plus, l'estimateur associé prend en compte toutes les sources d'erreur, i.e les discrétisations en espace et en temps, ainsi que la troncature de la somme dans la représentation modale. Enfin, des indicateurs spécifiques permettent de séparer les différentes sources d'erreur afin de pouvoir conduire de façon optimale les algorithmes adaptatifs.

La méthode d'estimation d'erreur proposée, qui peut être adaptée à diverses applications de la PGD utilisant la MEF, sera illustrée et validée à travers plusieurs exemples en 2D et 3D.

Références

- [1] Ammar A, Chinesta F, Diez P, Huerta A. An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010 ; **199** :1872–1880.
- [2] Chinesta F, Ladevèze P, Ammar A, Cueto E, Nouy A. Proper generalized decomposition in extreme simulations : towards a change of paradigm in Computational Mechanics?. *IACM Expressions* 2009 ; **26/09** :2–7.
- [3] Chinesta F, Ammar A, Cueto E. Recent advances and new challenges in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering* 2010 ; in press.
- [4] Ladevèze P. *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer, 1998.
- [5] Ladevèze P, Pelle J-P. *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*. Springer NY, 2004.
- [6] Ladevèze P, Passieux J.C, Néron D. The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2009 ; **199**(21) :1287–1296.
- [7] Ladevèze P, Chamoin L. On the control of model reduction methods based on the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010 ; submitted.
- [8] Nouy A. A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010 ; **199**(23-24) :1603–1626.