

Obtention de bornes strictes et pertinentes sur une quantité d'intérêt en dynamique

J. Waeytens¹, L. Chamoin¹, P. Ladevèze^{1,2}

¹ LMT-Cachan (ENS-Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris), France, {waeytens,chamoin,ladeveze}@lmt.ens-cachan.fr

² EADS Foundation Chair "Advanced Computational Structural Mechanics"

Résumé — L'objet de l'étude est la vérification locale des calculs numériques pour les problèmes de dynamique. A partir de la notion d'erreur en relation de comportement (erreur en dissipation) et de la résolution d'un problème adjoint, il a été montré que des bornes garanties de l'erreur sur une quantité d'intérêt peuvent être obtenues. Dans cette présentation, nous nous focalisons sur des techniques permettant d'améliorer la pertinence des bornes. Une illustration sur un cas-test 2D est présentée.

Mots clés — vérification, dynamique, quantité d'intérêt, fonctions de Green

1 Obtention de bornes garanties sur une quantité d'intérêt

Nous nous intéressons aux quantités d'intérêt linéaires s'exprimant sous la forme :

$$I = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}}_{\Sigma} + \rho \underline{\underline{\dot{u}}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}_{\Sigma} \right) d\Omega dt$$

où $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$, $\underline{\underline{\sigma}}_{\Sigma}$ et $\underline{\underline{\Gamma}}_{\Sigma}$ sont des extracteurs choisis suivant la quantité d'intérêt retenue. Dans [1], les auteurs ont prouvé que des bornes garanties de l'erreur de discrétisation sur I peuvent être obtenues en utilisant l'estimateur d'erreur globale en relation de comportement appelé "erreur en dissipation", la résolution d'un problème adjoint et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'encadrement de la quantité d'intérêt exacte I_{ex} est de la forme :

$$\hat{I}_h + \hat{I}_{hh} - E_{CRE} \tilde{E}_{CRE} \leq I_{ex} \leq \hat{I}_h + \hat{I}_{hh} + E_{CRE} \tilde{E}_{CRE} \quad (1)$$

où :

- \hat{I}_h est la quantité d'intérêt approchée, calculée à partir de la solution approchée du problème qui est obtenue en pratique avec la méthode des éléments finis et un schéma d'intégration temporel de Newmark ;
- \hat{I}_{hh} est un terme correcteur dépendant de la solution du problème de référence et du problème adjoint ;
- E_{CRE} (resp. \tilde{E}_{CRE}) représente l'erreur en dissipation associée au problème de référence (resp. problème adjoint).

Dans [2], la mise en œuvre de la méthode a montré que les bornes sont pertinentes sous certaines conditions.

2 Amélioration de la pertinence des bornes

Afin d'améliorer la pertinence des bornes, deux approches sont envisagées ici. La première consiste à privilégier des encadrements obtenus avec une inégalité de type Legendre-Fenchel. L'avantage de tels encadrements est la possibilité d'introduire une fonction de pondération choisie en fonction du type de quantité d'intérêt étudiée. Quant à la seconde approche, elle se base sur une meilleure résolution du problème adjoint à l'aide de fonctions d'enrichissement (fonctions de Green) introduites explicitement.

2.1 Encadrements avec l'inégalité de Legendre-Fenchel

Deux encadrements notés I et II basés sur l'inégalité de Legendre-Fenchel sont étudiés.

- Dans le cadre de la dynamique linéaire, l'encadrement I est voisin de l'encadrement (1). La différence majeure concerne le produit des erreurs en dissipation. En effet, il est remplacé par le produit des erreurs en dissipation pondérées par une fonction $a(t)$ pour le problème de référence et $\tilde{a}(t)$ pour le problème adjoint. Il est important de souligner que la fonction de pondération $a(t)$ ne peut pas être quelconque ; elle doit vérifier certaines propriétés. Concernant la fonction $\tilde{a}(t)$, elle est déterminée à partir de la fonction de pondération du problème de référence (par dualité).

- Concernant l'encadrement II , il est basé sur l'inégalité de Legendre-Fenchel et sur la résolution d'un problème supplémentaire appelé "problème adjoint bis". Il est plus pertinent que l'encadrement I lorsque :

- le problème de référence est résolu de manière fine ;
- la discrétisation du problème adjoint bis est très fine par rapport à celle du problème de référence.

D'une part, il permet un choix plus large de fonctions de pondération $a(t)$. De ce fait, nous pouvons employer la fonction de pondération de type exponentielle proposée dans [3] en quasi-statique pour des quantités d'intérêt ne dépendant pas de l'histoire, *e.g.* la contrainte moyenne dans un élément entre deux instants donnés. D'autre part, il permet une meilleure prise en compte des termes d'inertie.

2.2 Enrichissement de la solution du problème adjoint

D'après l'encadrement (1), on constate qu'une diminution de l'erreur en dissipation associée au problème adjoint entraîne une amélioration de la pertinence des bornes sur la quantité d'intérêt. Dans cette partie, nous choisissons donc d'affiner la solution du problème adjoint. Pour cela, la solution est décomposée en une partie "handbook" analytique, déterminée à partir des fonctions de Green de dynamique en milieu infini, et une partie résiduelle, déterminée numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis et d'un schéma d'intégration temporel. Une illustration des fonctions de Green de dynamique en 2D sous l'hypothèse de contraintes planes est donnée sur la Figure 1.

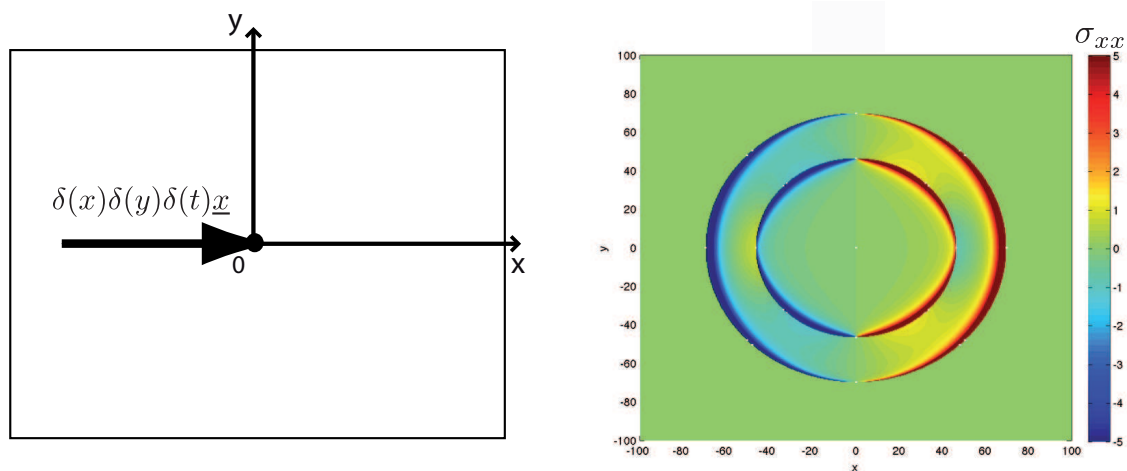


FIG. 1 – Chargement (à gauche) et solution de Green de dynamique en 2D (à droite), δ représentant la distribution de Dirac

Références

- [1] P. Ladevèze. *Strict upper error bounds for computed outputs of interest in computational structural dynamics*, Computational Mechanics, volume 42, pages 271-286, 2008.
- [2] P. Ladevèze, J. Waeytens. *Model verification in dynamics through strict upper error bounds*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volume 198, pages 1775-1784, 2009.
- [3] L. Chamoin, P. Ladevèze. *Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelastic problems solved by approximate methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume 71, pages 1387-1411, 2007.