HAL
open science

Contrôle de l'erreur de discrétisation et adaptativité pour des calculs par décomposition de domaine

Augustin Parret-Fréaud, Christian Rey, Pierre Gosselet

To cite this version:

Augustin Parret-Fréaud, Christian Rey, Pierre Gosselet. Contrôle de l'erreur de discrétisation et adaptativité pour des calculs par décomposition de domaine. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592901

HAL Id: hal-00592901

https://hal.science/hal-00592901v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Contrôle de l'erreur de discrétisation et adaptativité pour des calculs par décomposition de domaine

A. Parret-Fréaud[1], P. Gosselet[1], C. Rey[1]

[1] *LMT-Cachan, ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris, France, {apf,gosselet,rey}@lmt.ens-cachan.fr*

Résumé — Nous présentons une stratégie permettant la vérification adaptative de calculs effectués dans un cadre sous-structuré. Cette approche repose sur la construction de champs d'interface admissibles. Une procédure parallèle d'estimation d'erreur au cours des itérations des solveurs FETI et BDD est ainsi développée et étudiée. Celle-ci permet d'accéder à une mesure pertinente de l'erreur de discrétisation bien avant convergence des solveurs par décomposition de domaine.
Mots clés — vérification, adaptativité, estimation d'erreur a posteriori, méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, FETI, BDD.

1 Introduction

L'apparition des architectures de calcul de type « *cluster* » a entraîné un développement des techniques de calcul parallèle. Ainsi, en ingénierie mécanique, les méthodes reposant sur des *décomposition de domaine sans recouvrement*, telles FETI [4] et BDD [8, 9], sont particulièrement populaires. Elles permettent d'envisager des simulations numériques à grande échelle et leur utilisation à des fins de conception, mais également de certification dans le cadre du *virtual testing*. Cependant, ce dernier point nécessite la mise en place et l'utilisation de méthodes dédiées à la *vérification* des calculs afin de garantir que la solution d'un modèle numérique soit suffisamment proche de celle du modèle continu original. Pour se faire, une grande variété d'*estimateurs d'erreur* ont été développés durant les dernières décennies à partir d'approches reposant alternativement sur l'utilisation de résidus d'équilibres [2, 11], de lissage [14] ou bien d'une mesure d'erreur sur la relation de comportement [6, 7].

Dès lors, vu la maturité incontestable des différents développements effectués au fil des années sur ces deux thématiques évoluant en parallèle, il nous paraît intéressant de tirer conjointement parti des aspects *calcul intensif* et *vérification* précités au sein de nouvelles stratégies adaptatives permettant le calcul de problèmes mécaniques complexes et volumineux tout en respectant un objectif de précision donné. A notre connaissance, malgré quelques références [3, 10], la littérature est encore assez pauvre en travaux de ce type. Aussi, en s'appuyant sur l'utilisation de l'erreur en relation de comportement et sur un formalisme générique des approches par décomposition de domaine sans recouvrement [5], nous tentons d'apporter des éléments de réponse à cette problématique. Notre intérêt s'est porté dans un premier temps sur l'estimation parallèle de l'erreur de discrétisation ainsi que son évolution en fonction de la convergence de la méthode de décomposition de domaine associée. Cet article résume les principaux aspects de notre stratégie [12] qui permet d'étendre l'erreur en relation de comportement au cas sous-structuré en préservant son caractère garanti et en s'affranchissant du développement d'une mesure de la non-vérification des conditions d'interface.

Après avoir introduit le cadre de travail (partie 2), nous présentons une extension de l'erreur en relation de comportement au cadre sous-structuré préservant son caractère garanti. Pour ce faire, notre stratégie repose sur la construction parallèle de champs de déplacement et de contraintes vérifiant, respectivement, la continuité et l'équilibre sur l'ensemble de la structure. La formulation générique de cette construction est présentée en partie 3. La partie 4 présentera l'intégration de la stratégie au sein des approches duale (FETI) et primale (BDD) de décomposition de domaine. Nous y montrerons notamment que lorsque les conditions de continuité et d'équilibre à l'interface entre les sous-domaines ne sont pas vérifiées a priori (i.e. avant convergence de la méthode), l'exploitation des propriétés des préconditionneurs traditionnellement utilisés rend tout de même possible, et pour un surcoût numérique limité,

la construction de champs admissibles à l'échelle de la structure complète. Enfin, la partie 5 présentera quelques tests numériques aux vues desquels l'estimateur parallèle apparaît fournir des résultats très proches de ceux obtenus par une approche séquentielle, même en présence de champs de mauvaise qualité aux interfaces.

2 Principes, notations et formulations de base

Considérons, pour l'ensemble de nos développements, l'équilibre statique d'une structure occupant un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$, soumise à un chargement volumique f, un chargement surfacique g sur une partie $\partial_f\Omega$ de $\partial\Omega$ ainsi qu'un champ de déplacements imposés u_d sur le complémentaire $\partial_u\Omega$. Nous ferons l'hypothèse d'un comportement linéaire élastique caractérisé par le tenseur de Hooke $\mathbb{H}$ et nous placerons sous les hypothèses des petites perturbations.

Pour un ouvert $\omega \subset \Omega$, introduisons les espaces classiques des champs *cinématiquement admissibles* (CA) $\mathcal{C}a(\omega)$ et *statiquement admissibles* (SA) $\mathcal{S}a(\omega)$:

$$\mathcal{C}a(\omega) = \left\{ v \in \left[H^1(\omega)\right]^d \text{ tel que } \mathrm{tr}(v)_{|\partial_u\omega} = u_d \right\} \tag{1}$$

$$\mathcal{S}a(\omega) = \left\{ \tau \in \left[L^2(\omega)\right]^{d^2} \text{ tel que } \tau = \tau^T \text{ et } \int_\omega \tau : \varepsilon(v)\, d\omega = \int_\omega f.v\, d\omega + \int_{\partial_f\omega} g.v\, d\Gamma,\ \forall\, v \in \mathcal{C}a^0(\omega) \right\} \tag{2}$$

où tr désigne l'opérateur de trace, et $\mathcal{C}a^0(\omega)$ l'espace vectoriel associé à $\mathcal{C}a(\omega)$.

Nous introduisons également la fonctionnelle *erreur en relation de comportement* comme forme positive mesurant la non-vérification de la loi de comportement entre un couple déplacement-contrainte quelconque (v, τ) :

$$e_{\mathrm{rdc},\omega}(v,\tau) = |||\tau - \mathbb{H} : \varepsilon(v)|||_{\mathbb{H}^{-1},\omega} \qquad \text{avec } |||\bullet|||_{\mathbb{H}^{-1},\omega} = \left[\int_\omega \bullet : \mathbb{H}^{-1} : \bullet\, d\omega\right]^{1/2} \tag{3}$$

Dans le cadre de travail ainsi défini, le problème mécanique considéré peut être formulé comme :

$$\text{Trouver } (u,\sigma) \in \mathcal{C}a(\Omega) \times \mathcal{S}a(\Omega) \text{ vérifiant : } e_{\mathrm{rdc},\Omega}(u,\sigma) = 0 \tag{4}$$

2.1 Résolution approchée et estimation d'erreur a posteriori

Tout processus de résolution classique de (4) par une méthode des éléments finis en déplacement consiste à construire, sur la base d'une triangulation Ω_h de $\bar{\Omega}$, un sous-espace d'approximation $\mathcal{C}a_h(\Omega) \subset \mathcal{C}a(\Omega)$ des champs de déplacements. Le problème approché s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in \mathcal{C}a_h(\Omega) \text{ tel que } \sigma_h = \mathbb{H} : \varepsilon(u_h) \text{ vérifie :} \\ &\int_\Omega \sigma(u_h) : \varepsilon(v_h)\, d\Omega = \int_\Omega f.v_h\, d\Omega + \int_{\partial_f\Omega} g.v_h\, d\Gamma,\ \forall\, v_h \in \mathcal{C}a_h^0(\Omega) \end{aligned} \tag{5}$$

Il résulte de la formulation précédente que $u_h \in \mathcal{C}a(\Omega)$ et $e_{\mathrm{rdc},\Omega}(u_h,\sigma_h) = 0$, mais du fait de l'approximation effectuée, $\sigma_h \notin \mathcal{S}a(\Omega)$. A ce stade, le principe de l'estimation d'erreur par la relation de comportement réside dans la construction a posteriori d'un nouveau couple de solutions admissibles $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) \in \mathcal{C}a(\Omega) \times \mathcal{S}a(\Omega)$ à partir de (u_h, σ_h). De part la propriété $\mathcal{C}a_h(\Omega) \subset \mathcal{C}a(\Omega)$, le champ de déplacement approché est déjà cinématiquement admissible, de sorte que nous prenons $\hat{u}_h = u_h$. La construction de $\hat{\sigma}_h$, plus technique, s'effectue généralement à partir du champ approché σ_h et de la description continue des conditions aux limites en effort à travers des algorithmes spécifiques tels [6, 7] notés $\mathcal{F}_{\mathrm{eq}}$: $\hat{\sigma}_h = \mathcal{F}_{\mathrm{eq}}(\sigma_h, f, g)$. La mesure de $e_{\mathrm{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) \geq 0$ permet alors l'obtention une borne supérieure de l'erreur de discrétisation $|||u - u_h|||_{\mathbb{H},\Omega}$ (via le théorème de *Prager-Synge*) :

$$|||e|||_{\mathbb{H},\Omega} = |||u - u_h|||_{\mathbb{H},\Omega} \leq \left[e_{\mathrm{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)\right]^{1/2} \qquad \text{avec } |||\bullet|||_{\mathbb{H},\omega} = \left[\int_\omega \varepsilon(\bullet) : \mathbb{H} : \varepsilon(\bullet)\, d\omega\right]^{1/2} \tag{6}$$

2.2 Introduction de la décomposition de domaine

Nous considérons par la suite une partition de Ω en une famille non recouvrante de N_{sd} ouverts $\left(\Omega^{(s)}\right)_{1\leq s\leq N_{sd}}$ tels que $\Omega^{(s)}\cap\Omega^{(s')}=\emptyset$ pour $s\neq s'$ et $\bar{\Omega}=\cup_s\bar{\Omega}^{(s)}$. En notant $\mathcal{A}$ l'opérateur d'assemblage continu définit par $\bullet=\mathcal{A}(\bullet^{\square})\Leftrightarrow\bullet_{|\Omega^{(s)}}=\bullet^{(s)}$, la réécriture de (4) en un ensemble de problèmes définis sur les sous-domaines $\Omega^{(s)}$ est alors conditionnée à la vérification de conditions de continuité et d'équilibre sur les interfaces $\Upsilon^{(ss')}=\partial\Omega^{(s)}\cap\partial\Omega^{(s')}$, de telle sorte que :

$$\mathcal{A}(u^{\square})\in\mathcal{C}a(\Omega)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} u^{(s)}\in\mathcal{C}a(\Omega^{(s)}),\ \forall s\\ \mathrm{tr}(u^{(s)})=\mathrm{tr}(u^{(s')})\text{ sur }\Gamma^{(ss')},\ \forall(s,s')\end{array}\right. \tag{7}$$

$$\mathcal{A}(\sigma^{\square})\in\mathcal{S}a(\Omega)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \sigma^{(s)}\in\mathcal{S}a(\Omega^{(s)}),\ \forall s\\ \sigma^{(s)}.n^{(s)}+\sigma^{(s')}.n^{(s')}=0\text{ sur }\Gamma^{(ss')},\ \forall(s,s')\end{array}\right. \tag{8}$$

D'un point de vue discret, en notant $\boldsymbol{\varphi}$ la matrice $(d\times N_{dof})$ des fonctions de formes éléments finis associées à Ω_h, nous pouvons exprimer le champ de déplacement comme $u_h=\boldsymbol{\varphi}\mathbf{u}$ avec $\mathbf{u}$ un vecteur d'inconnues nodales. En introduisant un champ discret $\boldsymbol{\lambda}^{(s)}$ représentant les efforts appliquées à un domaine $\Omega^{(s)}$ par ses voisins et en distinguant les variables intérieures (indice i) de celles relatives aux interfaces (indice b), la version discrète de l'équilibre des sous-structures $\Omega^{(s)}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{K}_{ii}^{(s)} & \mathbf{K}_{ib}^{(s)}\\ \mathbf{K}_{bi}^{(s)} & \mathbf{K}_{bb}^{(s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_i^{(s)}\\ \mathbf{u}_b^{(s)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_i^{(s)}\\ \mathbf{f}_b^{(s)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}\end{pmatrix} \tag{9}$$

Le système (9) constitue le point de départ du processus classique de condensation à l'interface permettant d'exprimer l'équilibre des sous-structures en fonction des inconnues nodales $\mathbf{u}_b^{(s)}$ et $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$:

$$\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{u}_b^{(s)}=\mathbf{b}^{(s)}+\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} \tag{10a}$$

$$\sum_s\underline{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{u}_b^{(s)}=\mathbf{0} \tag{10b}$$

$$\sum_s\mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}=\mathbf{0} \tag{10c}$$

avec :

$$\mathbf{S}^{(s)}=\mathbf{K}_{bb}^{(s)}-\mathbf{K}_{bi}^{(s)}\mathbf{K}_{ii}^{(s)^{-1}}\mathbf{K}_{ib}^{(s)}$$

$$\mathbf{b}^{(s)}=\mathbf{f}_b^{(s)}-\mathbf{K}_{bi}^{(s)}\mathbf{K}_{ii}^{(s)^{-1}}\mathbf{f}_i^{(s)}$$

où $\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$ et $\mathbf{A}^{(s)}$ désignent des opérateurs d'assemblages booléens réalisant la traduction discrète des conditions de continuité (7) et d'équilibre (8) [1] (voir [5] pour plus de détails quant à leur définition).

2.3 Formulation de l'estimateur en cadre sous-structuré

Une fois le cadre sous-structuré introduit, le cœur de la méthode réside dans la construction de couples localement admissibles $(\hat{u}_h^{(s)},\hat{\sigma}_h^{(s)})\in\mathcal{C}a(\Omega^{(s)})\times\mathcal{S}a(\Omega^{(s)})$ sur chaque sous-domaine tels que l'admissibilité à l'échelle globale $(\mathcal{A}(\hat{u}_h^{\square}),\mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^{\square}))\in\mathcal{C}a(\Omega)\times\mathcal{S}a(\Omega)$ soit également satisfaite. Le caractère non-recouvrant de la décomposition permet alors de définir l'erreur en relation de comportement globale comme une somme de contributions indépendantes provenant des sous-domaines :

$$e_{\mathrm{rdc},\Omega}\left(\mathcal{A}(\hat{u}_h^{\square}),\mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^{\square})\right)^2=\sum_s\left(e_{\mathrm{rdc},\Omega^{(s)}}\left(\hat{u}_h^{(s)},\hat{\sigma}_h^{(s)}\right)\right)^2 \tag{11}$$

Si l'utilisation sur chaque sous-domaine des algorithmes séquentiels $\mathcal{F}_{\mathrm{eq}}$ permet d'obtenir des champs localement admissibles sur $\Omega^{(s)}$, la vérification de la propriété d'admissibilité globale est plus hardue. D'une part, les outils pré-cités recourent à la résolution de problèmes auxiliaires définis sur des « patchs » d'éléments, ce qui rend leur utilisation en cadre sous-structuré sujette à échanges d'informations aux interfaces. D'autre part, les approches classiques de résolution du système (10) utilisent des solveurs itératifs de telle sorte que les conditions d'interfaces (10b,10c) ne peuvent être simultanément satisfaites que lorsque la convergence est atteinte. Étant entendu que les échanges d'informations nécessaires à l'application directe d'un algorithme $\mathcal{F}_{\mathrm{eq}}$ à l'échelle de la structure globale resteraient limités et envisageables d'un point de vue numérique, notre choix, à l'inverse, se porte sur une construction totalement parallèle des champs admissibles avec un traitement particulier des champs d'interface.

1. Dans le cas d'une décomposition en deux sous-domaines, les conditions (10b) et (10c) s'écrivent de manière simple comme $\sum_s\underline{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{u}_b^{(s)}=\mathbf{u}_b^{(1)}-\mathbf{u}_b^{(2)}=0$ et $\sum_s\underline{\mathbf{A}}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}=\boldsymbol{\lambda}_b^{(1)}+\boldsymbol{\lambda}_b^{(2)}=0$.

3 Construction parallèle générique des champs admissibles

Nous montrons dans cette partie que la prise en compte des conditions aux interfaces (7) et (8) durant la construction parallèle des couples $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) \in \mathcal{C}a(\Omega^{(s)}) \times \mathcal{S}a(\Omega^{(s)})$ peut être transposée à la vérification de propriétés sur des champs nodaux d'interface $(\hat{\mathbf{u}}_b, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b)$ associés.

3.1 Champ de déplacements

Afin de vérifier la propriété de continuité (7) lors de la construction de $\hat{u}^{(s)} \in \mathcal{C}a(\Omega^{(s)})$, nous introduisons un champ d'interface continu vérifiant $\hat{u}_{bh}^{(s)} = \hat{u}_{bh}^{(s')}$, $\forall(s,s')$, condition dont la transposition discrète est immédiate étant donné le caractère conforme de la discrétisation :

$$\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} = \hat{\mathbf{u}}_b^{(s')},\ \forall(s,s') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)} \hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} = 0 \tag{12}$$

Par la suite, la résolution sur chaque sous-domaine d'un problème aux conditions aux limites de Dirichlet à l'interface imposées par la donnée de $\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}$ permet la détermination du champ cinématiquement admissible $\hat{u}_h = \mathcal{A}(\hat{u}_h^{\square}) \in \mathcal{C}a(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_i^{(s)} &= \mathbf{K}_{ii}^{(s)^{-1}} \left(\mathbf{f}_i^{(s)} - \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \mathbf{A}^{(s)^T} \hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} \right) \\ \hat{u}_h^{(s)} &= \boldsymbol{\varphi}^{(s)} \hat{\mathbf{u}}^{(s)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_i^{(s)} & \boldsymbol{\varphi}_b^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^{(s)} \\ \hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

3.2 Champ de contraintes

Lors de la construction de $\hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}a(\Omega^{(s)})$, nous introduisons un champ d'efforts continu à l'interface $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ permettant d'imposer $\hat{\sigma}_h^{(s)}.n^{(s)} = \hat{F}_{bh}^{(s)}$ sur $\Upsilon^{(s)}$. D'après (8), $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ doit alors vérifier le principe d'action-réaction entre sous-structures (14a) tout en assurant l'équilibre avec les chargements extérieurs (14b) :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} + \hat{F}_{bh}^{(s')} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{(ss')} \tag{14a}$$

$$\int_{\Omega^{(s)}} f^{(s)}.\rho d\Omega + \int_{\partial_f \Omega^{(s)}} g^{(s)}.\rho dS + \int_{\Gamma^{(s)}} \hat{F}_{bh}^{(s)}.\rho dS = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{C}aR(\Omega^{(s)}) \tag{14b}$$

où $\mathcal{C}aR(\Omega^{(s)})$ désigne l'ensemble des déplacements rigidifiants admissibles sur $\Omega^{(s)}$. Pour se faire, $\hat{F}_{bh}$ est construit à partir d'un champ nodal $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} = \left[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{b,j}^{(s)}\right]$ par un algorithme, noté $\hat{F}_{bh}^{(s)} = \mathcal{G}_h\left(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}\right)$, imposant l'égalité des travaux virtuels pour tout champ de déplacement éléments finis, soit pour tout noeud j de $\Upsilon^{(ss')}$:

$$\int_{\Upsilon^{(ss')}} \hat{F}_{bh}^{(s)} \cdot \varphi_{j\ |\Upsilon^{(ss')}}^{(s)} dS = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{b,j}^{(s)}, \quad \forall \Upsilon^{(ss')} \in \Upsilon^{(s)} \tag{15}$$

La mise en œuvre de $\mathcal{G}_h$ nécessitant de surcroît la définition d'une base d'interpolation pour $\hat{F}_{bh}^{(s)}$, un choix simple consiste à utiliser la base des fonctions de formes éléments finis sur $\Upsilon^{(s)}$: $\hat{F}_{bh} = \boldsymbol{\varphi}_{|\Upsilon^{(s)}}^{(s)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(s)}$. Nous verrons par la suite que celui-ci, bien que conduisant à une description grossière des efforts d'interface, n'altère que peu les performances de l'approche [2]. La relation (15) permet alors la transposition immédiate de (14a) et (14b) au niveau discret :

$$\sum_s \mathbf{A}^{(s)} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} = 0 \tag{16a}$$

$$\mathbf{R}^{(s)^T} \left(\mathbf{t}^{(s)^T} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} + \mathbf{f}^{(s)} \right) = 0 \tag{16b}$$

2. D'autres choix plus consistants nécessitent l'introduction de discontinuités inter-éléments de sorte que la détermination de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ nécessite le recours à un problème de minimisation. Ce point fait l'objet d'une étude particulière et quelques choix alternatifs seront discutés.

où $\mathbf{t}^{(s)}$ désigne l'opérateur de trace discrète sur $\Upsilon^{(s)}$ et $\mathbf{R}^{(s)}$ une base des modes rigidifiants admissibles sur $\Omega^{(s)}$.

A ce stade, la construction de $\hat{\sigma}_h = \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^{\square}) \in \mathcal{S}a(\Omega)$ nécessite dans un premier temps la résolution d'un problème aux conditions aux limites de Neumann sur $\Upsilon^{(ss')}$ imposées par la donnée de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$, puis l'application de l'algorithme de reconstruction SA $\mathcal{F}_{\text{eq}}$ au champ de contrainte éléments-finis obtenu, soit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} &= \mathbf{K}^{(s)^+}\left(\mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}\right) \\ \hat{\sigma}_h^{(s)} &= \mathcal{F}_{\text{eq}}\left(\mathbb{H} : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}^{(s)}\tilde{\mathbf{u}}^{(s)}), f^{(s)}, \left\{g^{(s)}, \mathcal{G}_h(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)})\right\}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Un point crucial de la méthode réside ici dans la prise en compte de $\hat{F}_{bh}$ comme condition de Neumann au niveau continu lors de la construction de $\hat{\sigma}^{(s)}$ par l'algorithme $\mathcal{F}_{\text{eq}}$.

4 Intégration au sein des approches duale et primale de décomposition de domaine

4.1 Approche FETI

Le point de départ de l'approche FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) [4] consiste à introduire un champ $\boldsymbol{\lambda}_b$ permettant la vérification *a priori* de l'équilibre entre sous-domaines (10c) : $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} = \underline{\mathbf{A}}^{(s)^T}\boldsymbol{\lambda}_b$ (et ainsi $\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} = \mathbf{0}$). Le principe de la méthode consiste alors à déterminer itérativement $\boldsymbol{\lambda}_b$ de manière à vérifier la condition de continuité $\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{0}$, où les champs $\mathbf{u}^{(s)}$ sont calculés à partir de $\boldsymbol{\lambda}_b$ (18a) sous réserve de la validité de l'alternative de Fredholm (18b) :

$$\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{K}^{(s)^+}\left(\mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T}\underline{\mathbf{A}}^{(s)^T}\boldsymbol{\lambda}_b\right) + \mathbf{R}^{(s)}\boldsymbol{\alpha}^{(s)} \tag{18a}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^{(s)^T}\left(\mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T}\underline{\mathbf{A}}^{(s)^T}\boldsymbol{\lambda}_b\right) \tag{18b}$$

Le processus de résolution imposant la vérification de (18b) au cours des itérations, le choix direct de $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ satisfait aux conditions (16a) et (16b). L'utilisation des algorithmes $\mathcal{G}_h$ et $\mathcal{F}_{\text{eq}}$ permet alors la construction de $\hat{(\sigma)}_h^{(s)} \in \mathcal{S}a\Omega^{(s)}$ vérifiant $\hat{\sigma}_h = \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^{\square}) \in \mathcal{S}a(\Omega)$.

La continuité des déplacements n'étant pas vérifiée au cours des itérations, le saut correspondant s'écrit : $\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket = \sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{u}_b^{(s)}$. Nous définissons alors $\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}$ à l'aide d'*opérateurs d'assemblage pondérés* $(\underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{(s)})_s$ vérifiant $\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)}\underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{(s)^T} = \mathbf{I}$, de manière à satisfaire à la condition (12) :

$$\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} = \mathbf{u}_b^{(s)} - \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{(s)^T}\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket \tag{19}$$

Un exemple simple d'opérateur $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{(s)}$ s'obtient pour une pondération utilisant la multiplicité des noeuds à l'interface [3] $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{(s)^T} = \underline{\mathbf{A}}^{(s)^T}\left(\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)}\,\underline{\mathbf{A}}^{(s)^T}\right)^{-1}$, en outre, des versions plus sophistiquées permettent de prendre en compte les hétérogénéités éventuelles entre sous-structures [13]. Le champ discret $\mathbf{u}_b^{(s)}$ permet alors l'obtention sur tout sous-domaine $\Omega^{(s)}$ d'un champ de déplacement admissible $\hat{u}_h = \mathcal{A}\left(\hat{u}_h^{\square}\right) \in \mathcal{C}a(\Omega)$. Soulignons ici un point clé de la méthode, qui réside dans le fait que $\mathbf{u}_b^{(s)}$ peut être obtenu sans coût numérique additionnel étant donné que l'étape (19) fait partie intégrante du préconditionneur de Dirichlet classiquement utilisé lors de la mise en œuvre de l'approche FETI.

4.2 Approche BDD

A l'inverse, le point de départ de l'approche BDD (*Balancing Domain Decomposition*) [9, 8] consiste à vérifier *a priori* la continuité des déplacement à l'interface (10b) en introduisant un champ $\mathbf{u}_b$ tel que $\mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{u}_b$ (et ainsi $\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{0}$). Le principe de la méthode consiste alors à déterminer

3. Un tel opérateur vérifie alors, dans le cas d'une décomposition en deux sous-domaines : $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{(s)^T}\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket = \frac{1}{2}\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket$.

iterativement $\mathbf{u}_b$ de manière à vérifier l'inter-équilibre entre les sous-structures $\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} = \mathbf{0}$, après détermination de $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ par le complément de Schur $\mathbf{S}^{(s)}$ de $\Omega^{(s)}$:

$$\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} = \mathbf{S}^{(s)}\mathbf{u}_b - \mathbf{b}^{(s)} \tag{20}$$

Le choix $\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} = \mathbf{u}_b^{(s)}$ permet alors la détermination immédiate des champs de déplacements admissibles $\hat{u}_h^{(s)}$ vérifiant $\hat{u}_h = \mathcal{A}\left(\hat{u}_h^{\square}\right) \in \mathcal{C}a(\Omega)$.

Les champs $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ n'étant pas équilibrés au cours des itérations, les opérateurs d'assemblages permettent, comme précédemment, d'accéder au saut d'effort à l'interface : $[\![\boldsymbol{\lambda}_b]\!] = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$. Nous suivons alors une démarche similaire à celle proposée pour l'approche FETI en utilisant une autre classe d'opérateurs d'assemblage pondérés $(\tilde{\mathbf{A}}^{(s)})_s$, vérifiant de même $\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\,\tilde{\mathbf{A}}^{(s)\,T} = \mathbf{I}$, et en définissant $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ à partir de $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ et $[\![\boldsymbol{\lambda}_b]\!]$ de manière à vérifier la condition (16a) :

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} - \tilde{\mathbf{A}}^{(s)\,T}[\![\boldsymbol{\lambda}_b]\!] \tag{21}$$

De même, dans le cas d'une pondération reposant sur la multiplicité [4] : $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)\,T} = \mathbf{A}^{(s)\,T}\left(\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\,\mathbf{A}^{(s)\,T}\right)^{-1}$. Il reste à ce stade à imposer à $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ la vérification de l'alternative de Fredholm (16b) qui s'écrit sur $\Omega^{(s)}$:

$$\mathbf{R}_b^{(s)\,T}\left(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} + \mathbf{b}^{(s)}\right) = \mathbf{R}_b^{(s)\,T}\left(\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{u}_b - \mathbf{b}^{(s)} + \tilde{\mathbf{A}}^{(s)\,T}[\![\boldsymbol{\lambda}_b]\!] + \mathbf{b}^{(s)}\right) = 0$$

Ce qui donne du fait de la symétrie $\mathbf{S}^{(s)}$ (permettant d'annuler $\mathbf{R}_b^{(s)\,T}\mathbf{S}^{(s)}$) :

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{R}_b^{(s)}\right)^T [\![\boldsymbol{\lambda}_b]\!] = 0 \tag{22}$$

De même, notons que l'étape (21) est déjà présente au sein des préconditionneur de type Neumann-Neumann équipant traditionnellement toute approche primale, tandis que (22) représente précisément la condition d'équilibrage (« balancing ») du résidu introduite dans l'approche BDD, et est donc vérifiée au cours des itérations. Par conséquent, le seul coût numérique associé à la construction de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h = \mathcal{A}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{\square}) \in \mathcal{S}a(\Omega)$ provient de l'utilisation des algorithmes $\mathcal{G}_h$ et $\mathcal{F}_{\text{eq}}$.

5 Exemples numériques

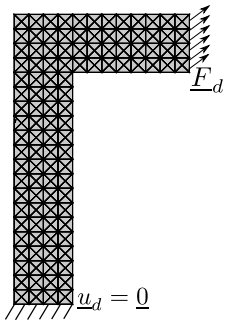
Nous illustrons les performances numériques de notre approche d'estimation parallèle sur le problème mécanique simple d'une Γ-structure encastrée à sa base et soumise à un champ de cisaillement-compression à son extrémité droite (fig. 1). Le matériau constitutif est choisi élastique linéaire isotrope, de module d'Young $E = 2000$MPa et de coefficient de Poisson $\mu = 0.3$, et l'hypothèse des contraintes planes est retenue. Pour chaque maillage généré, de taille caractéristique $h = \frac{L}{m}$ ($m = 2, 4, 8, 16, 32$), nous effectuons un calcul séquentiel suivi de calculs parallèles avec différents cas de décomposition en N_{sd} domaines ($N_{sd} = 2, 4, 8$ pour $m \leq 4$ et $N_{sd} = 2, 4, 8, 16, 32$ pour $m \geq 8$, cf. fig. 1 pour un exemple d'une telle décomposition). L'ensemble des calculs est réalisé au sein du code éléments finis *ZeBuLoN* [1] avec des éléments triangles de degré $p = 1$. En outre, les algorithmes BDD et FETI utilisés sont munis des préconditionneurs Neumann-Neumann et Dirichlet (respectivement) et leur critère de convergence (mesuré par le saut normé de déplacement ou d'effort à l'interface suivant l'approche) est fixé à 10^{-6}. En sus de l'erreur de discrétisation $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ donnée par l'estimateur parallèle (11), nous calculons aussi celle (notée $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$) correspondant à l'estimateur séquentiel classique [6] ainsi qu'une estimation de l'erreur « vraie » e_h par une approximation de la solution exacte u calculée sur un maillage très fin :

$$\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}} = e_{\text{rdc},\Omega}\left(\mathcal{A}(\hat{u}_h^{\square}), \mathcal{A}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{\square})\right) \qquad \mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{seq}} = e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \qquad e_h = |\!|\!|u - u_h|\!|\!|_{\mathbb{H},\Omega} = \sqrt{|\!|\!|u|\!|\!|_{\mathbb{H},\Omega}^2 - |\!|\!|u_h|\!|\!|_{\mathbb{H},\Omega}^2}$$

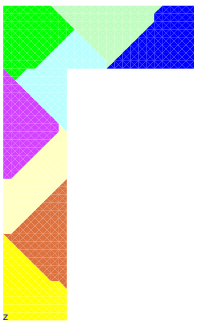
Nous investiguons dans un premier temps le comportement de $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ lorsque la convergence du solveur parallèle associé est atteinte, afin d'observer les performances globales de l'approche ainsi que

4. Pour une décomposition en deux sous-domaines : $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)\,T}[\![\boldsymbol{\lambda}_b]\!] = \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\lambda}_b]\!]$.

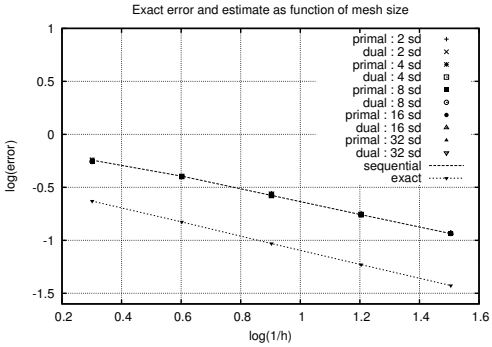
l'influence de la décomposition de domaine sur les résultats. En effet, rappelons que la construction particulière des inter-efforts continus d'interface, du fait d'un choix d'interpolation plus grossier, conduit à un champ SA (et donc une valeur de l'erreur globale) théoriquement différent de celui obtenu par une approche séquentielle. La figure 1 représente l'évolution des quantités $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$, $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et e_h en fonction de h. Notons que les approches primales et duales donnent des résultats similaires quelle que soit la décomposition, et que ceux obtenus dans les cas parallèles sont indépendants de N_{sd} et très proches de $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ [5]. En tout état de cause, $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ vérifie les mêmes propriétés de borne supérieure de e_h tout en divisant le temps CPU nécessaire au calcul par N_{sd}.



Problème élément-finis ($h = \frac{L}{4}$)



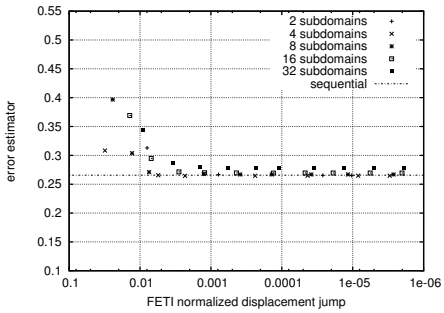
Décomp. ($h = \frac{L}{8}, N_{sd} = 8$)



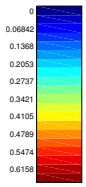
Convergence de e_h, $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$

FIGURE 1 – Problème étudié, exemple de décomposition et h-convergence de e_h, $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$

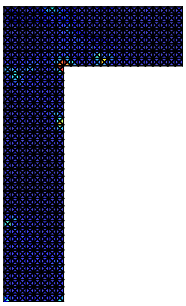
Du fait de l'utilisation d'un solveur itératif lors la résolution des problèmes d'interface, il est intéressant d'étudier les résultats de notre approche avant convergence de la méthode de décomposition de domaine associée. La figure 2 montre, pour l'approche duale, l'évolution de $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction du saut normalisé des efforts à l'interface. On remarque que la convergence de $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ est atteinte après 5 itérations lorsqu'il en faut une quinzaine pour obtenir celle du solveur. En particulier, la forme de la courbe montre une influence du résidu d'interface sur $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ lors des premières itérations, puis la prépondérance des erreurs de discrétisation conduisant au palier observé. La carte des contributions élémentaires à $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$, indiquant initialement des sources d'erreurs aux interfaces, puis une stabilisation rapide par la suite, confirme les observations précédentes.



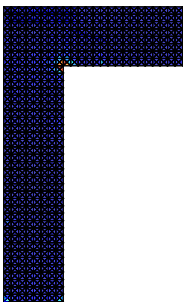
Convergence de $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$



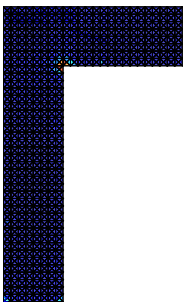
Échelle



$\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$: iter. 1



$\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$: iter. 3



$\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$: iter. 6

FIGURE 2 – Convergence de $\mathbf{e}_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction du résidu d'interface et contribution élémentaires aux itérations 1, 3 et 6 : cas FETI ($h = \frac{L}{8}$)

6 Conclusion et perspectives

Cet article présente une méthode d'estimation d'erreur a posteriori dédiée aux approches par décomposition de domaine. Cette approche repose sur la construction de champs d'interface admissibles. La procédure permet alors la construction complètement parallèle d'un couple déplacement-contrainte

5. Notons toutefois une légère surestimation de l'erreur avec l'accroissement de N_{sd}, qui s'explique par le nombre croissant d'interfaces sur lesquelles la discrétisation du champ SA est plus grossière que dans le cas de l'approche séquentielle

vérifiant l'admissibilité cinématique et statique à l'échelle de la structure globale. Nous obtenons ainsi une extension simple et efficace de l'erreur en relation de comportement au cas sous-structuré. Cette construction est accessible au cours des itérations des solveurs par décomposition de domaine classiques (FETI et BDD). Il en résulte un outil parallèle dont les performances en matière d'estimation d'erreur sont comparables aux procédures séquentielles, tout en divisant le temps CPU associé. L'un des aspect particulièrement intéressant de l'approche est lié à la convergence rapide de l'erreur globale et de ses contributions élémentaires au cours des itérations du solveur. Celle-ci permet en effet d'obtenir en quelques itérations des cartes d'erreurs d'une précision suffisante pour mener des procédures de remaillage, et donc de pouvoir définir de nouveaux critères d'arrêt des solveurs sur la base de l'évolution de l'erreur de discrétisation. De telles procédures sont actuellement à l'étude et plusieurs pistes sont examinées selon que la procédure de remaillage préserve ou non la topologie du découpage en sous-domaines. D'autres travaux portent sur l'extension aux problèmes hétérogènes, dont les résultats seront présentés lors de la conférence.

Références

[1] *Z-set user manual*, 2001.

[2] I. Babuška and W. C. Rheinboldt, *Error estimates for adaptive finite element computation*, SIAM ournal of Numerical Analysis **15** (1978), no. 4, 736–754.

[3] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera, and D. Franco Coronil, *A posteriori error analysis for two non-overlapping domain decomposition techniques*, Applied Numerical Mathematics **59** (2009), no. 6, 1214.

[4] C. Farhat and F. X. Roux, *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Computational Mechanics Advances **2** (1994), no. 1, 1–124, North-Holland.

[5] Pierre Gosselet and Christian Rey, *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*, Archives of Computational Methods in Engineering **13** (2006), no. 4, 515.

[6] P. Ladeveze and D. Leguillon, *Error estimate procedure in the finite element method and applications*, SIAM Journal on Numerical Analysis **20** (1983), no. 3, 485 (English).

[7] Pierre Ladevèze, Ludovic Chamoin, and Eric Florentin, *A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **199** (2010), no. 9-12, 766.

[8] Patrick Le Tallec, *Domain decomposition methods in computational mechanics*, Comput. Mech. Adv. **1** (1994), no. 2, 121–220. MR 1263805 (95b :65147)

[9] Jan Mandel, *Balancing domain decomposition*, Communications in Numerical Methods in Engineering **9** (1993), no. 3, 233.

[10] M. Paraschivoiu, *A posteriori finite element output bounds in three space dimensions using the feti method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **190** (2001), no. 49-50, 6629.

[11] N. Pares, P. Diez, and A. Huerta, *Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **195** (2006), no. 4-6, 297.

[12] A. Parret-Fréaud, C. Rey, P. Gosselet, and F. Feyel, *Fast estimation of discretization error for fe problems solved by domain decomposition*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **199** (2010), no. 49-52, 3315–3323.

[13] Daniel J. Rixen and Charbel Farhat, *A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **44** (1999), no. 4, 489.

[14] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **33** (1992), no. 7, 1365.