

## La vérification des calculs éléments finis en élastoplasticité

B. Blaysat<sup>1</sup>, P. Ladevèze<sup>1,2</sup>, É. Florentin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan, Ens Cachan/UPMC/CNRS/PRES UniverSud Paris {blaysat, ladeveze, florentin}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> EADS Foundation Chair Advanced Computational Structural Mechanics

**Résumé** — La méthode de calcul d'erreur introduite dans [4] et [5] et conduisant aux premières bornes garanties pour les problèmes non-linéaires est ici mise en oeuvre dans le cas particulier de la plasticité. La plasticité, en effet, inclue un comportement unilatéral qui mathématiquement se traduit par une perte de régularité. Dans ce travail, une technique de calcul d'erreur est mise en place, avec en particulier, les problèmes à résoudre concernant le calcul de l'erreur proprement dite qui sont détaillés.

**Mots clés** — Vérification, plasticité, éléments finis, bornes garanties

### 1 Introduction

La plupart des problèmes de mécanique sont résolus en utilisant la méthode d'approximation des éléments finis. En parallèle du développement d'outils optimisant cette approche, des estimateurs d'erreur ont été développés afin d'en évaluer la pertinence. Les premiers estimateurs sont des outils évaluant l'erreur globale, on peut trouver des états de l'art dans [1, 2, 3]. Mais du point de vue ingénieur, les quantités locales sont des grandeurs clés et nécessitent donc une estimation rigoureuse.

La première méthode de calcul d'erreur conduisant à des bornes garanties en non linéaire et en dynamique a été introduite dans [4] et [5]. Ces bornes exploitent le concept d'erreur en dissipation et nécessitent la résolution d'un problème dit "miroir" qui remplace le problème adjoint et qui en fait est identique au problème direct avec un temps rétrograde.

Après avoir rappelé les concepts introduits pour le problème miroir, ce travail concerne le calcul des bornes garanties tel qu'il est décrit dans [4] et [5]; ce calcul est mis en oeuvre ici dans le cas particulier de la plasticité. La plasticité, en effet, inclue un comportement unilatéral qui mathématiquement se traduit par une régularité plus faible. Pour la plasticité, la technique de calcul des bornes strictes de l'erreur est mise en place. Au centre de cette technique, il y a la résolution d'un problème dit central, unidimensionnel sur  $[0, T]$  dont la résolution est détaillée ici.

### 2 La méthode de calcul des bornes

On suppose connue la solution  $x_h$  d'un problème élastoplastique résolu par la méthode des éléments finis. En utilisant les outils détaillés dans [2], on peut prolonger cette solution en  $x_h^{ad}$ , une solution vérifiant les admissibilités cinématique et statique du problème. À l'aide d'un couple d'extracteur  $(\delta\sigma_\Sigma, \delta\dot{\epsilon}_\Sigma)$ , on définit une quantité d'intérêt de telle sorte :

$$I_h = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \left\{ \dot{\epsilon}_h^{ad} \cdot \delta\sigma_\Sigma + \delta\dot{\epsilon}_\Sigma \cdot \sigma_h^{ad} \right\}. \quad (1)$$

Les extracteurs sont construits avec une condition temporelle dite finale ( $\delta x_{\Sigma}|_{t=T} = 0$ ),  $\epsilon_h^{ad}$  et  $\sigma_h^{ad}$  sont la déformation totale et la contrainte associés à la solution admissible  $x_h^{ad}$ .

On choisit le couple d'extracteurs de sorte à ce qu'ils puissent être interprétés comme une perturbation sur le problème de référence. On peut dire que le problème miroir est une extension au non linéaire des problèmes adjoint ou dual en élasticité. Le problème introduit est un problème non linéaire, inverse en temps, où les conditions aux limites sont imposées par les paramètres d'extraction et le comportement dicté par celui du problème de référence. On résout ce problème miroir à l'aide d'une approche éléments finis basée sur les mêmes techniques que pour le problème de référence. Ce problème ayant un caractère

plus local, on peut retenir des paramètres de discrétisation plus appropriés afin d'améliorer l'efficacité de l'estimateur. En utilisant les mêmes outils que pour le problème de référence, on prolonge la solution éléments finis  $\delta x_h$  du problème miroir en une solution admissible  $\delta x_h^{ad}$ .

En utilisant la démarche introduite dans [4], basée sur les propriétés vérifiées par les solutions admissibles des problèmes de référence  $x_h^{ad}$  et miroir  $\delta x_h^{ad}$ , on calcule une fonctionnelle  $\varepsilon$  dépendant de ces solutions et majorant l'erreur sur la quantité d'intérêt :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq \varepsilon(x_h^{ad}, \delta x_h^{ad}) \quad (2)$$

avec  $I_{ex}$  la valeur de la quantité d'intérêt prise par la solution exacte et  $I_{hh}$  un terme correctif.

La fonctionnelle  $\varepsilon$  est calculée en résolvant le problème dit central. Ce problème consiste en une minimisation sous contrainte en chaque point de Gauss. Afin de conserver des temps d'estimation raisonnables, on introduit une approche géométrique pour résoudre ce problème.

### 3 Résultats numériques

Le support de notre étude est une plaque trouée dont on n'étudie qu'un quart, pour des raisons de symétries. Elle est constituée d'un matériau standard plastique à écrouissage linéaire correspondant au modèle de Prandtl-Reuss et on travaille sous l'hypothèse des contraintes planes. On définit la quantité d'intérêt comme la moyenne de la déformation plastique admissible selon la direction  $xx$ ,  $\varepsilon_{h,xx}^{ad}$  dans la zone notée  $\omega$  entre deux pas de temps  $t_1$  et  $t_2$  :

$$I_h = \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\varepsilon_{p,h,xx}^{ad}}{mes(\omega) \cdot (t_2 - t_1)} \right\} dt dV \quad (3)$$

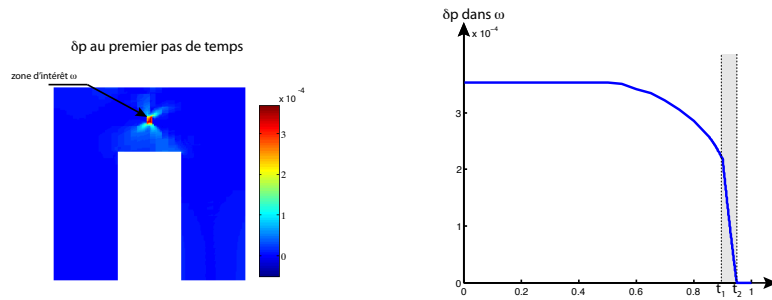


FIGURE 1 – Illustration du caractère local de la solution du problème miroir : répartition de la déformation plastique cumulée au premier pas de temps et son évolution au sein de la zone d'intérêt.

### 4 Conclusion

Ce travail présente une première illustration de la méthode d'obtention de bornes garanties pour un problème non linéaire d'évolution introduite dans [4]. L'erreur en dissipation et la construction de champs dits admissibles sont utilisées sur les problèmes de référence et miroir. Enfin une approche dite géométrique a été introduite dans le but de calculer ces bornes.

### Références

- [1] I. Babuška, T. Strouboulis, *The finite element method and its reliability*, Oxford university press, 2001.
- [2] P. Ladevèze, P. Pelle, *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*, Springer NY, 2004.
- [3] J.T. Oden, M. Ainsworth, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [4] P. Ladevèze, *Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems*, Compte Rendus Académie des sciences - Mécanique, Paris, 2006.
- [5] P. Ladevèze, *Strict upper error bounds on calculated outputs of interest in computational structural mechanics*, Computational Mechanics (2008) 42 :271-286.