



**HAL**  
open science

## La vérification des calculs éléments finis en élastoplasticité

Benoît Blaysat, Pierre Ladevèze, Éric Florentin

► **To cite this version:**

Benoît Blaysat, Pierre Ladevèze, Éric Florentin. La vérification des calculs éléments finis en élastoplasticité. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592899

**HAL Id: hal-00592899**

**<https://hal.science/hal-00592899>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La vérification des calculs éléments finis en élastoplasticité

B. Blaysat<sup>1</sup>, P. Ladevèze<sup>1,2</sup>, É. Florentin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan, Ens Cachan/UPMC/CNRS/PRES UniverSud Paris {blaysat, ladeveze, florentin}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> EADS Foundation Chair Advanced Computational Structural Mechanics

**Résumé** — La méthode de calcul d'erreur introduite dans [4] et [5] et conduisant aux premières bornes garanties pour les problèmes non-linéaires est ici mise en oeuvre dans le cas particulier de la plasticité. La plasticité, en effet, inclue un comportement unilatéral qui mathématiquement se traduit par une perte de régularité. Dans ce travail, une technique de calcul d'erreur est mise en place, avec en particulier, les problèmes à résoudre concernant le calcul de l'erreur proprement dite qui sont détaillés.

**Mots clés** — Vérification, plasticité, éléments finis, bornes garanties

## 1 Introduction

La plupart des problèmes de mécanique sont résolus en utilisant la méthode d'approximation des éléments finis. En parallèle du développement d'outils optimisant cette approche, des estimateurs d'erreur ont été développés afin d'en évaluer la pertinence. Les premiers estimateurs sont des outils évaluant l'erreur globale, on peut trouver des états de l'art dans [1, 2, 3]. Mais du point de vue ingénieur, les quantités locales sont des grandeurs clés et nécessitent donc une estimation rigoureuse.

La première méthode de calcul d'erreur conduisant à des bornes garanties en non linéaire et en dynamique a été introduite dans [4] et [5]. Ces bornes exploitent le concept d'erreur en dissipation et nécessitent la résolution d'un problème dit "miroir" qui remplace le problème adjoint et qui en fait est identique au problème direct avec un temps rétrograde.

Après avoir rappelé les concepts introduits pour le problème miroir, ce travail concerne le calcul des bornes garanties tel qu'il est décrit dans [4] et [5]; ce calcul est mis en oeuvre ici dans le cas particulier de la plasticité. La plasticité, en effet, inclue un comportement unilatéral qui mathématiquement se traduit par une régularité plus faible. Pour la plasticité, la technique de calcul des bornes strictes de l'erreur est mise en place. Au centre de cette technique, il y a la résolution d'un problème dit central, unidimensionnel sur  $[0, T]$  dont la résolution est détaillée ici.

## 2 Le problème de référence et l'erreur en dissipation associée

### 2.1 Le problème de référence

Nous nous intéressons ici au problème élasto-plastique suivant : dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ , une structure  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  est soumise à des efforts volumiques  $\underline{f}_d$ , à des efforts surfaciques sur une partie de sa frontière  $\partial_f\Omega$  et ses déplacements sont imposés sur une autre partie de sa frontière  $\partial_u\Omega$ . Cette structure et son environnement sont illustrés sur la figure 1.

Le problème de référence s'écrit alors :

$$\text{Trouver pour tout } (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T] : \begin{cases} (\underline{u}(\underline{M}, t), \sigma(\underline{M}, t)) \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{S}^{ad} \\ \sigma(\underline{M}, t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\underline{u}(\underline{M}, \tau)), \tau \in [0, t]) \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\mathcal{U}^{ad}$  l'espace des déplacements cinématiquement admissibles :

$$\underline{u}(\underline{M}, t) \in \mathcal{U}^{ad}, \mathcal{U}^{ad} = \left\{ \underline{u}^*(\underline{M}, t) \in \mathcal{H}_1(\Omega \times [0, T]) \text{ tel que } \begin{cases} \underline{u}^*(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \forall \underline{M} \in \partial_u\Omega, \underline{u}^*(\underline{M}, t) = \underline{u}_d(\underline{M}, t) \end{cases} \right\} \quad (2)$$

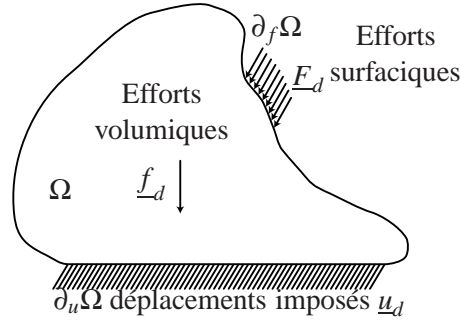


FIGURE 1 – Représentation de la structure et de son environnement.

et  $\mathcal{S}^{ad}$  l'espace des contraintes statiquement admissibles :

$$\sigma(\underline{M}, t) \in \mathcal{S}^{ad}, \mathcal{S}^{ad} = \left\{ \sigma^*(\underline{M}, t) \in \mathcal{L}_2(\Omega \times [0, T]) \text{ tel que } \begin{cases} \sigma^*(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \forall \underline{M} \in \partial_f \Omega, \sigma^*(\underline{M}, t) \cdot \underline{n} = \underline{F}_d(\underline{M}, t) \\ \text{div}(\sigma^*(\underline{M}, t)) + \underline{f}_d = \underline{0} \end{cases} \right\} \quad (3)$$

enfin le comportement, synthétisé dans l'écriture  $\sigma(\underline{M}, t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\underline{u}(\underline{M}, \tau)), \tau \in [0, t])$  comprend la notion de déformation totale  $\varepsilon_{ep} = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ , les conditions initiales sur les variables internes ( $p(t=0) = 0$ ) et peut être dissocié en deux groupes de lois :

les lois d'état

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{K} \cdot \varepsilon_e \\ R = k \cdot p \end{cases} \quad (4)$$

les lois d'évolution

$$\begin{cases} \dot{p} \geq 0 \text{ et } \|\sigma_D\| - (R + R_0) \leq 0 \\ \dot{p} \cdot (\|\sigma_D\| - (R + R_0)) = 0 \\ \dot{\varepsilon}_p = \dot{\frac{\sigma_D}{R + R_0}} \end{cases} \quad (5)$$

On note  $x_{ex} = (\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$  la solution exacte de ce problème continu. Dans la plupart des cas, le calcul de celle-ci est hors d'atteinte. Le problème précédent est donc résolu de manière approchée par la méthode des éléments finis en déplacement (on cherche  $u_h \in \mathcal{U}_h^{ad}$  et  $\sigma_h = \mathcal{K} \varepsilon(\underline{u}_h)$ ). Une approche incrémentale est utilisée [6], un algorithme de retour radial est mis en place afin de résoudre à chaque piquet de temps le problème non linéaire. Dès lors que la norme du résidu passe sous un seuil fixé, on retient la solution  $x_h$  admissible cinématiquement vérifiant exactement le comportement. Par contre, l'équilibre n'est réalisé que de manière approchée.

## 2.2 L'erreur en dissipation

On peut définir une erreur globale basée sur la mesure en dissipation d'une solution dite admissible notée  $\hat{x}_h$ . Cette solution  $\hat{x}_h = (\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$  est choisie telle que son déplacement  $\hat{u}_h$  soit cinématiquement admissible et sa contrainte  $\hat{\sigma}_h$  satisfasse l'admissibilité statique. La mesure globale de l'erreur sur cette solution est inspirée de [5], mais ici on a négligé le rôle des variables internes :

$$\int_0^T dt \{ \hat{e}_{CRE} \} = - \inf_{x^* \in \Gamma} \left\{ \int_0^T dt \int_0^t d\tau \{ (\sigma^* - \hat{\sigma}_h) (\dot{\varepsilon}_p^* - \dot{\varepsilon}_{p,h}) \} \right\} \quad (6)$$

où  $\Gamma$  est l'ensemble des solutions  $x^*$  satisfaisant aux conditions initiales ( $p^*(t=0) = 0$ ) ainsi que le comportement, ie les lois d'état (4) et les lois d'évolution (5). L'erreur globale absolue et l'erreur globale relative se définissent alors :

$$\hat{E}_{CRE}^{\Omega \times [0, T]} = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \{ \hat{e}_{CRE} \}; \quad \hat{e}_{CRE} = \frac{\hat{E}_{CRE}^{\Omega \times [0, T]}}{D} \quad \text{avec } D = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \int_0^t d\tau \{ (\hat{R}_h + R_0) \dot{p}_h \} \quad (7)$$

Il est important de souligner le lien qu'a cette erreur en dissipation avec l'erreur exacte :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^T \frac{dt}{T} \{(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \mathbb{K}^{-1} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h)\} \leq E_{CRE}^{T,\Omega}(\hat{e}_{p,h}, \hat{s}_h) \quad (8)$$

Enfin on peut introduire la fonctionnelle  $g$ , dont l'intégrale sur le domaine  $\Omega$  s'annule pour la solution exacte à tout instant :

$$g(x_{ex}) = \int_0^t \frac{d\tau}{T} \{(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h)(\dot{e}_{p,ex} - \dot{e}_{p,h})\} + \frac{1}{2} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \mathbb{K}^{-1} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \quad (9)$$

### 2.3 Construction des champs admissibles

Le calcul de l'erreur en dissipation nécessite la connaissance sur  $\Omega \times [0, T]$  d'une solution admissible au problème. La construction de cette solution suit la méthode introduite dans [7]. On utilise la solution  $x_h$  issue de la résolution EF du problème de référence et procède en deux étapes :

- le déplacement total  $\hat{u}_h$  est choisit identique à  $\underline{u}_h$  ( $\mathcal{U}_h^{ad} \subset \mathcal{U}^{ad}$ ); la contrainte  $\hat{\sigma}_h$  est calculée en prolongeant  $\sigma_h$  à l'aide des techniques développées dans [8] ;
- les variables internes ( $\hat{p}_h, \hat{R}_h$ ) sont déterminées en minimisant l'erreur en dissipation (cf [7]) sous la contrainte d'obtention d'une solution thermodynamiquement viable ( $\hat{p}_h \geq 0$  et  $\|\hat{\sigma}_{D,h}\| - (\hat{R}_h + R_0) \leq 0$ ).

### 2.4 Illustration

Cette partie met en avant une résolution d'un problème élasto-plastique et le calcul de l'erreur associé (6). La structure étudiée est une plaque trouée soumise à des efforts surfaciques sur chacune de ses tranches extérieures. Pour des raisons de symétrie du problème, on peut réduire l'étude à seulement un quart de la plaque, comme illustré sur la figure 2. On discrétise le domaine  $\Omega$  en 865 éléments et l'intervalle d'étude  $[0, T]$  en 20 pas de temps avec  $T = 1$  s.

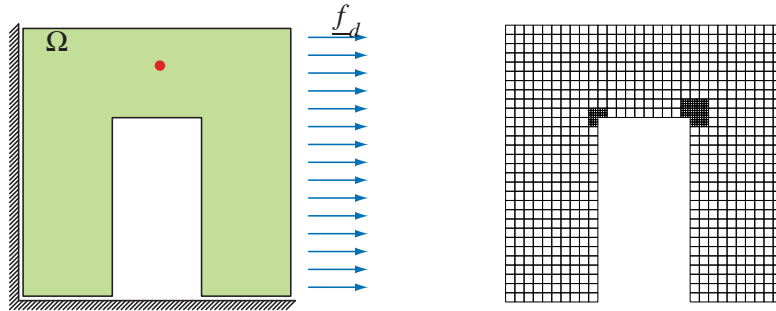


FIGURE 2 – Cas test : à gauche, forme continue ; à droite, forme discrète. Le point sur la figure de gauche localise le point de Gauss 2920.

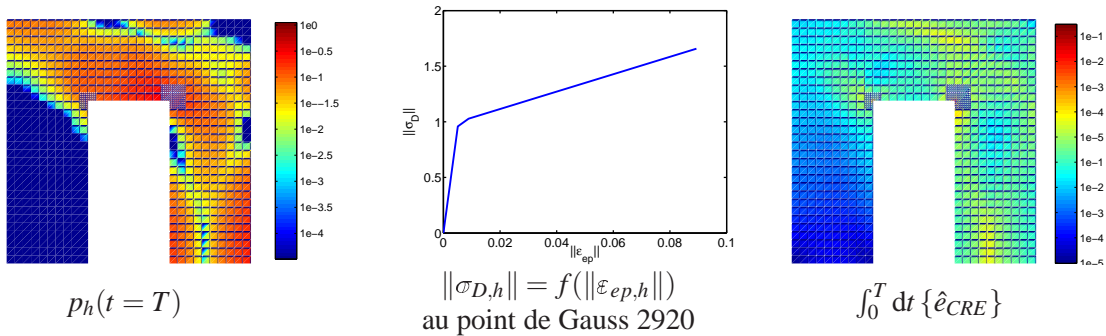


FIGURE 3 – Résultats du problème de référence.

Les caractéristiques adimensionnées du matériau utilisé sont :

$$R_0 = 1; \quad k = 8,16; \quad E = 244,95; \quad \mu = 0,3.$$

Les figures 3 de gauche et du milieu illustrent la déformation plastique cumulée au sein de la structure à  $t = 1s$  et une courbe  $\|\sigma_{D,h}\|$  en fonction de  $\|\varepsilon_{ep,h}\|$  au point de Gauss 2920 . La carte d'erreur au sein de la structure est représenté sur la figure de droite. Ce problème présente l'erreur globale relative suivante :

$$\hat{\varepsilon}_{CRE} = 3,51\%$$

À titre de comparaison, sur ce même problème l'erreur introduite dans [7] prend la valeur relative 2,95%. Les ordres de grandeurs et distributions spatiales de ces deux erreurs sont comparables ; mais celle introduite ici va nous permettre une approche locale de l'erreur.

### 3 La méthode de calcul des bornes

La première partie de ce papier a mis en avant un problème classique d'élasto-plasticité et une méthode permettant de connaître la qualité globale d'une résolution. L'ingénieur ayant aujourd'hui la nécessité d'estimer localement la pertinence d'une grandeur, il convient de déployer des méthodes permettant de donner des informations précises sur des quantités locales.

#### 3.1 Définition d'une quantité d'intérêt

Une quantité d'intérêt  $I$  est une grandeur dépendant linéairement de la solution  $\hat{x}_h$  et représentant un trait local de celle-ci. Il peut s'agir par exemple de la moyenne de la déformation plastique dans la direction  $xx$  sur un intervalle spatiotemporel  $\omega \times [t_1; t_2] \subset \Omega \times [0; T]$  :

$$I_{ex} = \int_{\omega} dV \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\varepsilon_{p,ex,xx}}{\text{mes}(\omega) \cdot (t_2 - t_1)} \right\} \quad I_h = \int_{\omega} dV \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\hat{\varepsilon}_{p,h,xx}}{\text{mes}(\omega) \cdot (t_2 - t_1)} \right\} \quad (10)$$

On utilise un couple d'extracteurs  $(\sigma_{\Sigma}, \dot{\varepsilon}_{\Sigma})$  pour écrire la quantité d'intérêt locale sous une forme globale :

$$I_{ex} = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \{ \dot{\varepsilon}_{ex} \cdot \sigma_{\Sigma} + \dot{\varepsilon}_{\Sigma} \cdot \sigma_{ex} \}. \quad I_h = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \{ \hat{\varepsilon}_h \cdot \sigma_{\Sigma} + \dot{\varepsilon}_{\Sigma} \cdot \hat{\sigma}_h \}. \quad (11)$$

Dans le cas (10), on peut définir un tenseur  $A_{\Sigma}$ , dont le support est la zone d'intérêt  $\omega \times [t_1; t_2]$ , et qui prend alors la valeur  $1/\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)$  sur la direction  $xx$ . On peut en déduire le couple d'extracteurs :  $\sigma_{\Sigma} = \int_t^T d\tau \{A_{\Sigma}\}$  et  $\dot{\varepsilon}_{\Sigma} = -\mathcal{X}^{-1}A_{\Sigma}$ .

#### 3.2 Le problème miroir ou la construction d'une fonction de pondération de l'erreur globale

Dans le cas d'un problème linéaire d'évolution, le problème miroir est équivalent au problème adjoint. Introduit dans [4], ce problème a pour objectif la construction d'une fonction d'influence. On peut le considérer comme un problème de perturbation sur le problème de référence. Ses conditions aux limites (pré-contraintes et pré-déformations) sont les extracteurs, le temps évolue de manière inverse (ie. problème en  $\tau = T - t$ , de  $T$  vers 0) et on pose son comportement proche du problème de référence. Ainsi ce problème, mis sous forme de perturbation  $\delta$ , s'écrit : Trouver  $\delta\tilde{x} = (\delta\tilde{u}, \delta\tilde{\sigma})$  sur  $\Omega \times [0, T]$ , telle que :

- $\delta\tilde{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}_{\Sigma} \equiv \varepsilon(\delta\tilde{u})$  : cinématiquement admissible à 0
- $\delta\tilde{\sigma} - \sigma_{\Sigma}$  : statiquement admissible à 0
- lois d'état :  $\begin{cases} \delta\tilde{\sigma} = \mathcal{X} \delta\tilde{\varepsilon}_e \\ \delta\tilde{R} = k \cdot \delta\tilde{p} \end{cases} \quad (12)$
- lois d'évolution :  $\begin{cases} \delta\tilde{p} \geq 0 \text{ et } \|\sigma_{D,h} + \delta\tilde{\sigma}_D\| - (R_h + \delta\tilde{R} + R_0) \leq 0 \\ \dot{\varepsilon}_{p,h} + \delta\tilde{\varepsilon}_p = (\dot{p}_h + \delta\tilde{p}) \frac{\sigma_{D,h} + \delta\tilde{\sigma}_D}{R_h + \delta\tilde{R} + R_0} \end{cases}$
- conditions initiales  $\tau = 0$  :  $\delta\tilde{\varepsilon} = \mathbb{0}, \delta\tilde{\sigma} = \mathbb{0}, \delta\tilde{u} = \underline{0}$  et  $\delta\tilde{p} = 0$

où  $x_h$  est la solution vérifiant exactement le comportement issue du problème de référence et  $\dot{f}$  représente la dérivée en temps inverse soit :  $\dot{f} = \partial f / \partial \tau = -\partial f / \partial t$ .

Le problème miroir est résolu à l'aide d'une approche éléments finis basée sur les mêmes techniques que pour le problème de référence. Ce problème ayant un caractère plus local, on peut retenir des paramètres de discrétisation plus appropriés afin d'améliorer l'efficacité de l'estimateur. En utilisant les mêmes outils que pour le problème de référence, on prolonge la solution éléments finis  $\delta x_h$  du problème miroir en une solution admissible  $\delta \hat{x}_h$ . La figure 4 met en avant la carte de déformation plastique  $\delta \tilde{p}_h$  calculée pour  $\tau = T$  et l'évolution au cours du temps de celle-ci au voisinage du points de Gauss 2920. Le caractère local aussi bien en temps qu'en espace est visible sur cette figure.

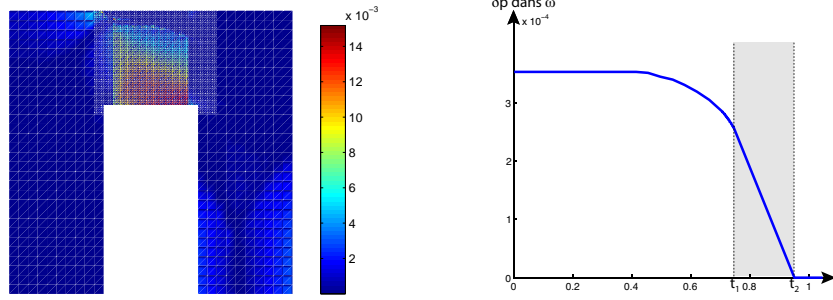


FIGURE 4 – Illustration du caractère local de la solution du problème miroir : répartition de la déformation plastique cumulée au premier pas de temps et son évolution au sein de la zone d'intérêt.

### 3.3 La technique de majoration

En utilisant les extracteurs, l'erreur sur la quantité d'intérêt s'écrit comme :

$$I_{ex} - I_h = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \{ (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \dot{\varepsilon}_{\Sigma} + \sigma_{\Sigma} (\dot{\varepsilon}_{ex} - \dot{\varepsilon}_h) \} \quad (13)$$

Les solutions  $\hat{x}_h$  et  $\delta \hat{x}_h$  vérifient les propriétés d'admissibilité relatives à leur problème respectif, et les conditions initiales (pour  $\hat{x}_h$ ) et finales (pour  $\delta \hat{x}_h$ ). Ces propriétés permettent de revisiter l'écriture de l'erreur locale et de la mettre sous la forme (méthode introduite dans [5]) :

$$I_{ex} - I_h = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \left\{ -(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \delta \hat{\varepsilon}_{p,h} + \delta \hat{\sigma}_h (\dot{\varepsilon}_{p,ex} - \dot{\varepsilon}_{p,h}) \right\} = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \{ \langle x_{ex} - \hat{x}_h, \delta \hat{x}_h \rangle \} \quad (14)$$

L'introduction d'un produit bilinéaire simplifie l'écriture et met en avant le rôle de la solution  $\delta \hat{x}_h$  : elle intervient comme une fonction de pondération sur l'erreur globale ( $x_{ex} - \hat{x}_h$ ).

L'encadrement de l'erreur locale consiste à travailler avec la fonction globale  $g(x)$ , fonction qu'on sait nulle en  $x_{ex}$ . Deux paramètres  $\mu < 0$  et  $\eta > 0$  sont introduits afin d'obtenir un minorant et un majorant de l'erreur sur la quantité d'intérêt :

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} dV \left\{ \sup_{x^* \in \Gamma} \left\{ \int_0^T dt \{ \langle x^* - \hat{x}_h, \mu \delta \hat{x}_h \rangle - g(x^*) \} \right\} \right\} \leq I_{ex} - I_h \leq \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} dV \left\{ \sup_{x^* \in \Gamma} \left\{ \int_0^T dt \{ \langle x^* - \hat{x}_h, \eta \delta \hat{x}_h \rangle - g(x^*) \} \right\} \right\} \quad (15)$$

Enfin on introduit la fonctionnelle  $\varepsilon$  et le terme correcteur  $I_{hh}$  qui permettent de recentrer l'erreur et de la mettre sous la forme suivante :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq \varepsilon(x_h^{ad}, \delta x_h^{ad}) \quad (16)$$

La fonctionnelle  $\varepsilon$  est calculée en résolvant le problème dit central représenté équation (17). Ce problème consiste en une minimisation sous contrainte en chaque point de Gauss. Afin de conserver des temps d'estimation raisonnables, on introduit une approche géométrique pour résoudre ce problème.

$$\gamma(x) = \inf_{x^* \in \Gamma} \left\{ \int_0^T dt \int_0^t d\tau \{ (\sigma^* - \sigma) (\dot{\varepsilon}_p^* - \dot{\varepsilon}_p) \} \right\} \quad (17)$$

L'écriture (17) du problème central fait intervenir les formes tensorielles  $(\sigma^*, \dot{\epsilon}_p^*)$  de la solution  $x^*$ . En utilisant les propriétés de l'espace  $\Gamma$ , on peut simplifier le problème afin de ne travailler qu'avec les grandeurs scalaires  $(R^*, \dot{p}^*)$ . La minimisation de cette fonctionnelle est à effectuer en chaque point de l'espace (ie. point de Gauss) et est globale en temps. Ce problème a la forme d'un problème dit de "contrôle optimal" mais les outils dédiés (comme un solveur Lemke) nécessite un coût de calcul prohibitif. Tandis qu'en écrivant la stationnarité au voisinage de la solution, un nouveau problème aux conditions aux limites dites de "Kuhn Tucker" est introduit, problème pouvant être résolu par une méthode géométrique. Cette approche, introduit dans [9] résout efficacement ce problème (on passe de 180 *min* sur 300 coeurs à 5 *min* sur 2 coeurs pour un résultat quasi-identique, ie. une différence de 0,2% entre les deux solutions).

## 4 Résultats numériques

On s'intéresse à la quantité définie à l'équation (10) sur le problème de référence donné partie 2.4, dont le problème miroir associé a été présenté partie 3.2. La figure 5 présente l'évolution des bornes inférieure et supérieure en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\eta$ . Les minimums sont obtenus pour  $\mu = -0.84$  et  $\eta = 0.78$ . Ces valeurs peuvent être obtenue en utilisant le comportement quadratique des bornes, comme introduit dans [5].

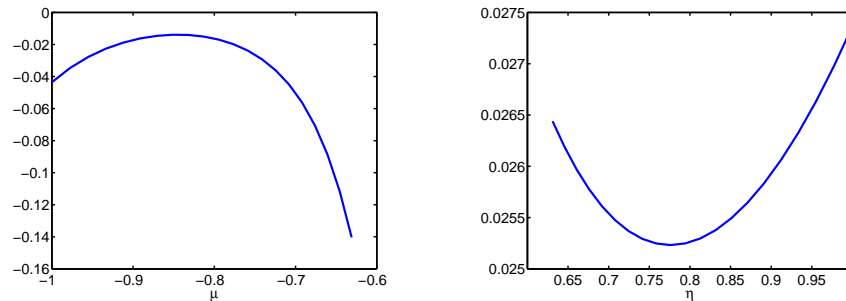


FIGURE 5 – Évolution des bornes inférieure et supérieure de l'erreur en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\eta$  (valeurs relatives).

Avec les paramètres optimaux ainsi calculés, on obtient :

$$\left| \frac{I_{ex} - (I_h + I_{hh})}{I_h + I_{hh}} \right| \leq 45\%$$

On peut alors mettre en avant un encadrement garanti de la quantité d'intérêt exact :  $I_{ex} = 3,95 \pm 45\%$ . Ces premiers résultats peuvent être améliorés en injectant une fonction de pondération temporelle devant la fonctionnelle  $g$  lors de la majoration (15).

## 5 Conclusion

Ce travail présente une première illustration de la méthode d'obtention de bornes garanties pour un problème non linéaire d'évolution introduite dans [4]. L'erreur en dissipation et la construction de champs dits admissibles sont utilisées sur les problèmes de référence et miroir. Enfin une approche dite géométrique a été introduite dans le but de calculer ces bornes.

## Références

- [1] I. Babuška, T. Strouboulis, *The finite element method and its reliability*, Oxford university press, 2001.
- [2] P. Ladevèze, P. Pelle, *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*, Springer NY, 2004.
- [3] J.T. Oden, M. Ainsworth, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [4] P. Ladevèze, *Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems*, Comptes Rendus Académie des sciences - Mécanique, Paris, 2006.

- [5] P. Ladevèze, *Strict upper error bounds on calculated outputs of interest in computational structural mechanics*, Computational Mechanics (2008) 42 :271-286. 0
- [6] M. Bonnet, A. Frangi, *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments fini*, Les éditions de l'école Polytechnique, (2006).
- [7] P. Ladevèze,, N. Moës, *A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1997) 157 :45-68.
- [8] P. Ladevèze, P. Rougeot, *Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1999) 176 :247-264 ;
- [9] P. Ladevèze, *Une nouvelle approche pour la vérification des calculs éléments finis en élasto-plasticité*, Compléments, Rapport Interne du LMT-Cachan n. 272 (2008).