



HAL
open science

Méthodes de décomposition de domaine primale et mixte pour la simulation de grandes structures avec instabilités

Jorge Hinojosa, Olivier Allix, Pierre-Alain Guidault, Philippe Cresta

► **To cite this version:**

Jorge Hinojosa, Olivier Allix, Pierre-Alain Guidault, Philippe Cresta. Méthodes de décomposition de domaine primale et mixte pour la simulation de grandes structures avec instabilités. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592895

HAL Id: hal-00592895

<https://hal.science/hal-00592895>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes de décomposition de domaine primale et mixte pour la simulation de grandes structures avec instabilités.

J. Hinojosa¹, O. Allix¹, P.-A. Guidault¹, P. Cresta²

¹ LMT-Cachan, ENS Cachan/UPMC/CNRS/PRES UniverSud Paris, France, {hinojosa,allix,guidault}@lmt.ens-cachan.fr

² EADS Innovation Works, France, Philippe.Cresta@eads.net

Résumé — Dans cette étude sont étudiées la robustesse et la performance de méthodes de décomposition de domaine (DDM) primal et mixte avec relocalisation non-linéaire vis-à-vis des instabilités et l'utilisation de méthodes de continuation [4] dans ce cadre. Cette étude a été menée sur des structures exhibant des comportements globaux non-linéaires (*snap-through*, *snap-back*), avec flambage localisé. Un autre enjeu, plus pratique, consiste en la parallélisation de la stratégie pour des architectures de type cluster afin de simuler le comportement postflambage de grandes structures raidies proches de structures industrielles.

Mots clés — décomposition de domaine, relocalisation non-linéaire, méthode de continuation, post-flambage.

1 Introduction

La conception des structures complexes telles que celles rencontrées dans l'aéronautique nécessitent un grand nombre d'essais jusqu'à rupture, de l'échelle du matériau à l'échelle de la structure complète, en passant par toutes les échelles intermédiaires. Lors des essais structuraux de certification, réalisés sur des fuselages complets, on observe localement l'apparition de zones de flambage de la peau, formant des cloques entre les raidisseurs. Ces zones exhibant un comportement non-linéaire peuvent s'étendre et provoquer des redistributions de contraintes dans la structure. Cela peut provoquer des concentrations de contraintes à la base des raidisseurs et induire des décollements locaux menant à la rupture globale. Afin de réduire les coûts et la durée de développement, les industriels mettent en avant les simulations numériques dans le processus de conception pour guider, compléter ou remplacer une partie de l'approche expérimentale.

Le calcul direct à l'échelle fine des structures industrielles est encore inaccessible en raison du coût de calcul prohibitif et/ou de la capacité de mémoire insuffisante, malgré l'architecture parallèle des calculateurs d'aujourd'hui. Ces limitations conduisent à conserver une description hiérarchique, multiéchelle, de modèles "emboîtés" (modèles "gigogne") allant de modèles "grossiers" de la structure à des modèles locaux raffinés.

Dans le domaine non-linéaire, le besoin d'approches multi-échelles est sans doute encore plus important. Elles sont cependant très souvent restreintes aujourd'hui à des approches descendantes, c'est-à-dire du global vers le local, le "retour" (approche ascendante) étant souvent ignoré faute de méthodes adéquates ou de temps. En pratique, ces approches consistent à conduire dans un premier temps une simulation simplifiée (géométrie et comportement, sur la structure tout entière). Les phénomènes locaux sont ensuite étudiés plus en détail à partir de modèles (géométrie et comportement) plus fins en tenant compte des conditions aux interfaces du bord de la zone d'intérêt, conditions obtenues par le calcul global initial. Ces méthodes n'offrent qu'un dialogue limité entre les échelles introduites et ne peuvent traiter efficacement que les non-linéarités localisées ayant peu d'influence sur la réponse globale.

Dans une première partie, on étudie une nouvelle stratégie [3] basée sur la méthode NKS (Newton-Krylov-Schur) [5, 7]. Cette nouvelle méthode s'appuie sur des résolutions non-linéaires locales par sous-structures. Le but recherché est de concentrer l'effort numérique sur les zones le nécessitant au moyen d'itérations locales, par sous-structure, c'est-à-dire à une échelle pertinente vis-à-vis du phénomène, et permettant de vérifier le comportement non-linéaire. Les itérations globales ont alors pour objectif d'assurer le couplage entre les sous-structures. Contrairement aux approches NKS qui proposent de sous-

structurer le problème tangent issu de la linéarisation de la méthode de Newton, la sous-structuration est ici formellement réalisée sur le problème non-linéaire d'origine [18]. Deux méthodes de décomposition de domaine sont analysées : une méthode « primale » et une méthode « mixte » [3]. Une version « duale » est présentée dans [18].

2 Formulation et DDM pour le non-linéaire géométrique.

2.1 Formulation corotationnelle

La prise en compte des grands déplacements exige de redévelopper des modèles de plaques et coques adaptés, ainsi que des éléments finis associés. Ces développements peuvent mener à des modèles relativement complexes, et leur implémentation doit être réalisée pour chacun des types d'éléments. Or, très souvent, les grandes transformations des structures élancées ne sont associées qu'à de petites déformations de leurs éléments constitutifs. Les mouvements sont ainsi majoritairement constitués d'une composante rigidifiante. Pour ces raisons, des approches alternatives dites corotationnelles ont été proposées. Elles proposent de choisir comme configuration de référence une configuration obtenue par une rotation rigidifiante, et d'exprimer les déformations et les contraintes dans un repère tournant avec la matière. Cette approche fait l'hypothèse de petites perturbations dans le repère corotationnel. Elle a ainsi pour avantage de permettre la réutilisation des opérateurs linéaires classiques déjà existants dans la plupart des codes éléments finis [2, 17, 11]. Pour plus de détails sur la formulation utilisée, on pourra se référer à l'article de Felippa et Haugen [11].

2.2 DDM pour le non-linéaire géométrique

Les DDM (BDD [14, 15], FETI [8, 9, 10], mixte [12, 13, 20], parmi d'autres) permettent la résolution de problèmes linéaires de grande taille sur des calculateurs à architectures distribuée. En les utilisant avec des schémas de type Newton pour la résolution de problèmes non-linéaires, on obtient une famille de méthodes dites Newton-Krylov-Schur (NKS). Ces méthodes ont été décrites dans [5, 19] pour des problèmes non-linéaires élastiques, pour le calcul de grandes structures élancées dans [7] et pour les problèmes multicontacts dans [1].

Ces types de méthodes sont basées sur :

- la méthode de Newton pour la linéarisation et le schéma itératif incrémental ,
- la sous-structuration et le complément de Schur du problème tangent pour l'écriture du problème aux interfaces,
- un solveur itératif parallèle de Krylov pour la résolution du problème linéaire condensé aux interfaces.

3 DDM avec relocalisation non-linéaire

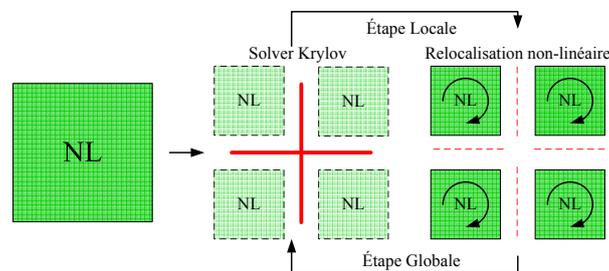


FIGURE 1 – Etapes de résolution des stratégies avec relocalisation non-linéaire.

Les méthodes de relocalisation non-linéaires sont une modification des méthodes NKS. La principale différence concerne l'étape de calcul locale par sous-domaine, qui devient non-linéaire, avec un solveur itératif par sous-domaine, éventuellement associé à un schéma incrémental indépendant. Au niveau global, le problème est très proche de celui des approches NKS. Dans la Figure 1 la méthode est illustrée.

Pour résumer, on peut dire qu'une méthode NKS classique consiste à résoudre par une méthode de décomposition de domaine le problème tangent alors qu'une méthode NKS avec relocalisation non-linéaire partitionne en sous-domaines le problème non-linéaire avant linéarisation.

Cette méthode a été appliquée pour la simulation de structures raidies avec flambage local, avec une méthode de décomposition de domaine primale ou mixte, et comparée avec la méthode NKS classique dans [3]. Elle a aussi été appliquée à des problèmes de structures avec endommagement dans [18].

3.1 DDM primale avec relocalisation non-linéaire

Étape locale non-linéaire par sous-structure, E

Étant donnés les déplacements d'interface \underline{U} , on recherche sur chaque sous-domaine une solution au problème soumis à un chargement externe, avec une condition de Dirichlet sur les interfaces.

L'étape locale correspond à la résolution, par sous-structure, d'un problème non-linéaire géométrique à déplacements imposés ΔU , sur les interfaces. Il peut être résolu par une méthode de Newton. Le problème tangent à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^E & \mathbf{K}_{Tib}^E \\ \mathbf{K}_{Tbi}^E & \mathbf{K}_{Tbb}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_i^E \\ \Delta u_b^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^E \\ f_b^E \end{bmatrix} \quad (1)$$

où l'indice i correspond aux degrés de liberté internes, et b aux degrés de liberté des interfaces.

Pour résoudre ce problème, on utilise une méthode d'élimination directe des inconnues d'interfaces $\Delta u_b^E = \Delta U$ déterminés par le calcul global précédent :

$$\Delta u_i = \mathbf{K}_{Tii}^E{}^{-1} (f_i^E - \mathbf{K}_{Tib}^E \Delta U) \quad (2)$$

Étape globale linéaire sur les interfaces

On cherche une correction ΔU du champ de déplacement d'interface \underline{U} , telle que :

$$\mathbf{S}_T \Delta U = r \quad (3)$$

où \mathbf{S}_T est l'opérateur de Steklov-Poincaré, qui correspond sous sa forme discrétisée à l'opérateur de Schur classique, qui est l'assemblage des opérateurs tangents locaux condensés sur les interfaces :

$$\mathbf{S}_T = \sum_E A^E \mathbf{S}_T^E (A^E)^t = \sum_E A^E (\mathbf{K}_{Tbb}^E - \mathbf{K}_{Tbi}^E \mathbf{K}_{Tii}^E{}^{-1} \mathbf{K}_{Tib}^E) (A^E)^t \quad (4)$$

Le résidu condensé sur les interfaces r , s'écrit :

$$r = \sum_E A^E r = \sum_E A^E (f_b^E - \mathbf{K}_{Tbi}^E \mathbf{K}_{Tii}^E{}^{-1} f_i^E) \quad (5)$$

Le problème présenté est similaire aux méthodes de type NKS classiques, et sa résolution est réalisée de la même manière, mais avec une étape de relocalisation non-linéaire locale à chaque sous-structure.

3.2 DDM mixte avec relocalisation non-linéaire

Étape locale non-linéaire par sous-structure, E

L'étape locale correspond à la résolution, par sous-structure, d'un problème non-linéaire géométrique avec une condition mixte de type Robin avec une direction de recherche \mathbf{k}^E , permettant de calculer les corrections de déplacement Δu^E . Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^E & \mathbf{K}_{Tib}^E \\ \mathbf{K}_{Tbi}^E & \mathbf{K}_{Tbb}^E + \mathbf{k}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_i^E \\ \Delta u_b^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^E \\ f_b^E + \mathbf{k}^E \cdot \Delta U^E - F^E \end{bmatrix} \quad (6)$$

où ΔU^E et F^E proviennent de l'étape globale linéaire précédente, et $f^E = [f_i^E, f_b^E]^t$ est le résidu d'équilibre à l'itération considérée. Le système (6) est résolu par une méthode directe.

La direction de recherche \mathbf{k}^E utilisée à l'étape locale est un paramètre important de la méthode. En pratique, c'est le complément de Schur $\mathbf{S}_T^{E'}$ de la sous-structure voisine E' sur l'interface considérée qui est utilisé pour \mathbf{k}^E .

Etape globale linéaire sur les interfaces

La seconde étape consiste à rechercher des champs d'effort \underline{F} et de déplacement \underline{U} admissibles aux interfaces, c'est-à-dire respectivement continus et équilibrés de part et d'autre d'une interface Γ^i entre E et E' :

$$\underline{U}^E = \underline{U}^{E'}, \quad (7)$$

$$\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0 \quad (8)$$

Après discrétisation, le problème global linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{S}_T \underline{U} = \underline{r} \quad (9)$$

où \mathcal{S}_T est l'opérateur de Steklov-Poincaré associé au problème global linéarisé, et \underline{r} est le résidu condensé aux interfaces provenant à la fois des défauts d'équilibre et des sauts de déplacement aux interfaces :

$$\underline{r} = \sum_E A^E (\mathcal{S}_T^E u_b^E + f_b^E - \mathbf{K}_{Tbi}^E \mathbf{K}_{Tii}^{E-1} f_i^E) \quad (10)$$

et, pour chaque sous-structure E :

$$F^E = f_b^E + \mathcal{S}_T^E (U^E - u_b^E) \quad (11)$$

Pour plus de détails sur les différentes méthodes (primale et mixte), on se référera à [3, 18].

3.3 Analyse post-flambage de structures avec instabilités

La performance de la méthode avec relocalisation non-linéaire (version primale et mixte) a été testée pour l'analyse de structures en non-linéaire géométrique et comparée avec la méthode NKS classique.

3.3.1 Structures analysées

Trois structures différentes sont considérées pour tester la méthode : une avec un comportement global stable monotone (Fig 2), une avec un comportement de type *snap-through* (Fig 3) et une autre avec un comportement de type *snap-back* (Fig 4).

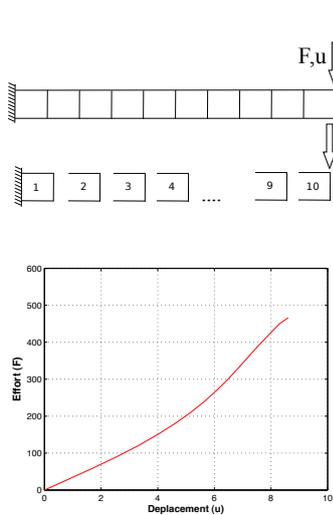


FIGURE 2 – Structure avec comportement de type monotone.

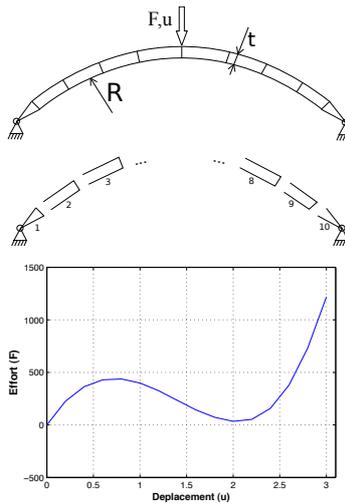


FIGURE 3 – Structure avec comportement de type *snap-through*.

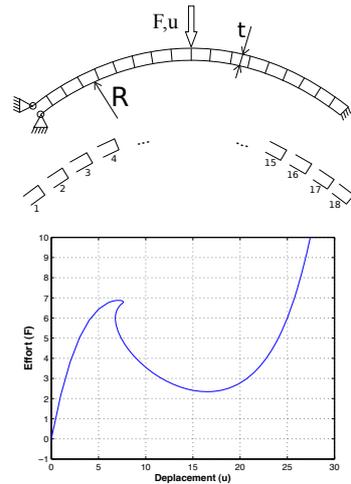


FIGURE 4 – Structure avec comportement de type *snap-back*.

Les structures treillis retenues sont bidimensionnelles. Le modèle de poutre retenue est le modèle de Navier-Bernoulli.

Pour la structure avec comportement de type monotone (figure 2) l'extrémité gauche est bloquée, et un chargement est appliqué au coin supérieur droit. Afin de favoriser le flambage dans une zone de la structure, la poutre inférieure de la sous-structure 1, est affaiblie.

La structure avec comportement de type *snap-through* (figure 3) est un treillis de poutres en forme d'arche, avec un rayon $R = 10\text{ m}$, une épaisseur $t = 0.6\text{ m}$. Les deux extrémités sont articulées et un chargement est appliqué au milieu de la partie supérieure de l'arche. Pour favoriser le flambage (et aussi le comportement global de type *snap-through*) la poutre supérieure de la sous-structure 5 a été affaiblie.

La structure avec comportement de type *snap-back* (figure 4) est un treillis de poutres en forme d'arche, avec un rayon $R = 2040\text{ m}$, une épaisseur $t = 2.9\text{ m}$. Les deux extrémités à gauche sont articulées. L'extrémité droite est bloquée et un chargement est appliqué au milieu de la partie supérieure de l'arche. Pour favoriser le flambage (et aussi le comportement global de type *snap-back*) la poutre inférieure de la sous-structure 1 a été affaiblie.

3.3.2 Intérêt de la relocalisation non-linéaire

Un critère d'arrêt local $\eta_{local} < 10^{-3}$ et un critère d'arrêt global $\eta_{global} < 10^{-6}$ sont choisis ici comme suggéré dans [3].

Dans la table 1 sont présentés les résultats pour le cas de la structure monotone (figure 2). On remarque que la méthode NKS classique nécessite un nombre élevé d'itérations globales et locales. L'introduction de la relocalisation non-linéaire (cas 2) permet de réduire de façon importante le nombre d'itérations globales et locales. L'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine mixte permet de diminuer encore le nombre d'itérations globales (cas 3). La méthode de Relocalisation NL mixte permet d'utiliser un seul pas de chargement, et conduit aux meilleures performances (cas 4).

| Stratégie de resolution | Incr. initial | Nb. Pas | Nb. itér. globales | Nb. itér. locales |
|-------------------------|---------------|---------|--------------------|-------------------|
| 1) NKS classique | 55 N | 8 | 63 | 630 |
| 2) Reloc. NL primale | 55 N | 5 | 46 | 388 |
| 3) Reloc. NL mixte | 55 N | 5 | 22 | 428 |
| 4) Reloc. NL mixte | 450 N | 1 | 5 | 262 |

TABLE 1 – Résultats pour la structure à comportement de type stable monotone

Dans la table 2 sont présentés les résultats pour le cas de la structure avec comportement de type *snap-through* (figure 3). La méthode NKS classique et la méthode de Relocalisation NL primale n'arrivent pas à dépasser l'instabilité. Pour les comparer, la méthode de Relocalisation NL mixte a été aussi testée jusqu'à l'instabilité (cas 1, 2 et 3), qui montre peu de différence entre les méthodes. La seule méthode qui permet de dépasser l'instabilité sans faire appel à une méthode de continuation, est la méthode de relocalisation NL mixte (cas 4). Cela est dû au paramètre k^E qui intervient dans (6)

| Stratégie de resolution | Incr. initial | Nb. Pas | Nb. itér. globales | Nb. itér. locales |
|-------------------------|---------------|---------|--------------------|-------------------|
| 1) NKS classique * | 450 N | 1 | 7 | 70 |
| 2) Reloc. NL primale * | 450 N | 1 | 7 | 70 |
| 3) Reloc. NL mixte * | 450 N | 1 | 6 | 101 |
| 4) Reloc. NL mixte | 1000 N | 1 | 10 | 234 |

TABLE 2 – Résultats pour la structure à comportement de type *snap-through* (*, Charge maximale 450 N)

Dans la table 3 sont présentés les résultats pour le cas de la structure avec comportement de type *snap-back* (figure 4). Comme dans les deux cas précédents, le meilleur résultat est obtenu avec la méthode de relocalisation NL mixte, qui permet de faire des pas de chargement plus grands et de réduire le nombre d'itérations locales et globales.

| Stratégie de resolution | Incr. initial | Nb. Pas | Nb. itér. globales | Nb. itér. locales |
|-------------------------|---------------|---------|--------------------|-------------------|
| 1) NKS classique | 6,8 N | 9 | 38 | 684 |
| 2) Reloc. NL primale | 6,8 N | 9 | 38 | 684 |
| 3) Reloc. NL mixte | 6,8 N | 4 | 22 | 580 |
| 4) Reloc. NL mixte | 10 N | 1 | 13 | 350 |

TABLE 3 – Résultats pour la structure à comportement de type *snap-back*

3.3.3 Méthode de continuation pour le problème global

Une méthode de continuation de type *longueur d'arc* [4] a été implémentée au niveau du problème global ((3) et (9)) dans le cas où la méthode de Newton échoue. Cette méthode a été testée et comparée à la méthode sans décomposition de domaine. On constate que le nombre d'itérations globales n'est pas influencé par le partitionnement en sous-domaines (Table 4).

| Méthode | Nb. de pas | Nb. d'itération globales | Nb. d'itérations locales |
|-----------------|------------|--------------------------|--------------------------|
| Sans DDM | 31 | 494 | - |
| Reloc. NL mixte | 31 | 440 | 7920 |

TABLE 4 – Comparation de la méthode de continuation avec et sans DDM pour le cas de la Fig 4.

On notera que la méthode de continuation conduit à des incréments de chargement (associés au paramètre de longueur d'arc) très petits au voisinage du point de *snap-back*. Dans ce cas, les incréments de chargement étant très petits, l'intérêt de la relocalisation et du choix de la méthode de décomposition de domaine (mixte ou primale) n'est pas évident dans la mesure où les problèmes locaux pas sous-structures sont résolus en une itération. La figure 5 illustre les points de convergence pour la méthode de continuation pour le cas avec et sans DDM. On constate aussi que les points pour les deux cas sont les mêmes.

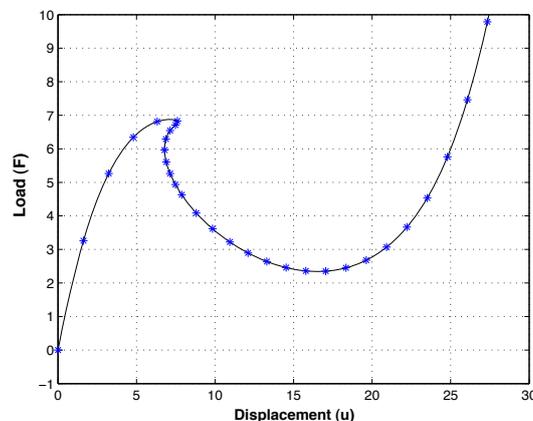


FIGURE 5 – Points de convergence de la méthode de continuation. Structure avec comportement de type *snap-back* (fig. 4).

3.3.4 Influence du critère d'arrêt local.

Dans [3] l'influence du critère d'arrêt local a été analysé pour le cas d'une structure à comportement stable monotone. Ici, on cherche à compléter cette analyse pour des structures avec comportement de type *snap-through* et *snap-back*, et avec la version mixte de la méthode de relocalisation non-linéaire.

Le critère d'arrêt global a été fixé à $\eta_{glo} = 10^{-3}$ et plusieurs calculs sont réalisés pour des valeurs du critère d'arrêt local (η_{loc}) allant de 10^{-1} à 10^{-6} . Les résultats sont présentés sur les figures 6 et 7, où l'on observe l'influence du critère d'arrêt local sur le nombre d'itérations globales et locales pour les trois types des structures. Dans la figure 6 on observe que le nombre d'itérations globales se stabilise

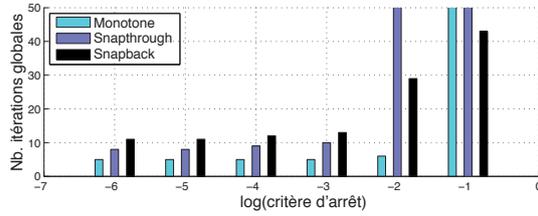


FIGURE 6 – Influence du critère d’arrêt local sur le nombre des itérations globales.

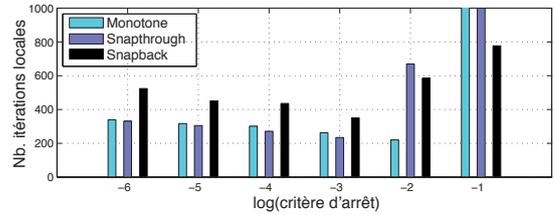


FIGURE 7 – Influence du critère d’arrêt local sur le nombre des itérations locales.

pour $\eta_{loc} \leq 10^{-3}$. Dans la figure 7, le nombre d’itérations locales le plus faible est obtenu pour $\eta_{loc} = 10^{-3}$. Un critère plus fin n’induit qu’une augmentation du nombre d’itérations locales, sans améliorer le comportement global de la méthode. En pratique, on prendra ($\eta_{loc} = \sqrt{\eta_{glo}}$).

4 Parallélisation et implémentation sur de grandes structures

Les stratégies avec relocalisation non-linéaire, tout comme les méthodes classiques de types NKS auxquelles elles s’apparentent, sont naturellement adaptées aux architectures parallèles. L’étape locale non-linéaire par sous-structure consiste en des calculs totalement indépendants et faciles à paralléliser. L’étape globale linéaire est résolue avec un solveur parallèle de type BDDC [6, 16] avec un algorithme de type GMRES, puisque l’opérateur global assemblé est non-symétrique du fait du choix de la formulation corotationnelle utilisée [11].

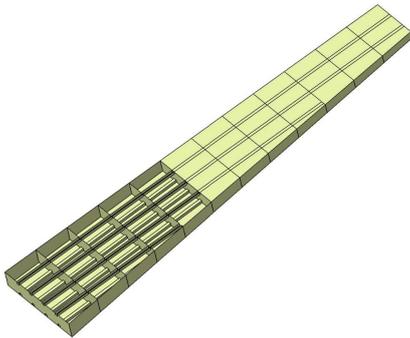


FIGURE 8 – Caisson de voileure.

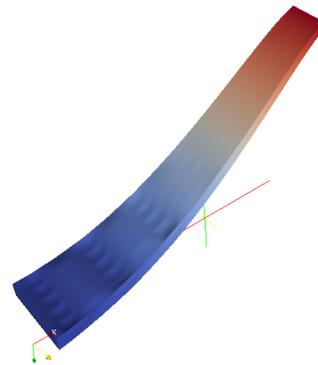


FIGURE 9 – Déformée de la structure.

Cette stratégie a été implémentée dans un code C++. Elle a été testée sur un cas-test représentant un caisson d’aile (figure 8). Le cas-test a été divisé en 12 sous-structures. Chacune comporte 23.000 ddl, ce qui représente 276.000 ddl au total. La structure a été encastree à son extrémité gauche et un effort vertical a été appliqué sur l’extrémité droite. La déformée finale obtenue avec la méthode de relocalisation non-linéaire mixte est présentée en figure 9.

5 Conclusions

Dans ce travail, les performances de stratégies de Newton-Krylov-Schur avec relocalisation non-linéaire pour différents types de structures avec un comportement global non-linéaire présentant éventuellement des instabilités ont été étudiées. En particulier, une version primale et une version mixte ont été testées, sur des arches en treillis avec un comportement global de type *snap-back* et *snap-through*. L’étape de relocalisation permet de réduire de façon importante le nombre d’itérations globales des méthodes NKS classiques.

Une étude de l’influence du critère d’arrêt local a été effectuée dans les différents cas. Cette analyse a permis de trouver une valeur optimale pour ce critère ($\eta_{loc} = \sqrt{\eta_{glo}}$), qui réduit le nombre d’itérations

locales et globales.

Enfin, dans le cas où la méthode de continuation ne restreint pas la taille des incréments de chargement, la méthode mixte avec relocalisation non-linéaire se montre en pratique la plus robuste en permettant d'utiliser des incréments de chargements plus grands et en donnant la possibilité de passer éventuellement des points limites.

Remerciements : Ce travail a été supporté par EADS IW.

Références

- [1] M. Barboteu, P. Alart, M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(37-38), 4785-4803 (2001).
- [2] A. Cardona. A beam finite element non-linear theory with fine rotations. *International Journal for Numerical Methodes and Engineering* 26, 2403-2438 (1991).
- [3] P. Cresta, O. Allix, C. Rey and S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, 1436-1446 (2007).
- [4] M. A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Computers and Structures* 13, 55-62 (1981).
- [5] Y.-H. De Roeck, P. Le Tallec, M. Vidrascu. A domain-decomposed solver for nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 99, 187-207 (1992).
- [6] C.R. Dohrmann. A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal on Scientific Computig* 25, 246-258 (2003).
- [7] C. Farhat, M. Lesoinne, K. Piersson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numerical Linear Algebra with Applications* 7, 687-714 (2000).
- [8] C. Farhat, F.-X. Roux. A method of finite element tearing and iterconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32, 1205-1227 (1991).
- [9] C. Farhat, F.-X. Roux. An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing* 13(1), 370-396 (1992).
- [10] C. Farhat. A saddle-point principle domain decomposition method for the solution of solid mechanics problems. *SIAM, Domain decomposition methods for partial differential equations* D.E. Keyes, T.F. Chan, G. Meurant, J.S. Scroggs and R.G. Voigt, 271-292 (1992).
- [11] C. A. Felippa and B. Haugen. A unified formulation of small-strain corotational finite elements : I. theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, 2285-2335 (2005).
- [12] M.Fortin, R. Glowinski. Chapter 1 : Augmented lagrangian methods in quadratic programming. *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary Value Problems*. M.Fortin, R. Glowinski, volume 15 of *Studies in Mathematics and Its Applications* 1-46 (1983).
- [13] P. Ladevèze. Sur une famille d'algorithmes en mécaniques des structures. *Comptes rendu de l'académie des Sciences* 300, 41-46 (1985).
- [14] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communication in Applied Numerical Methods* 9, 233-241 (1993).
- [15] J. Mandel, M. Brezina. Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients. *Mathematics of computations* 65(216), 1387-1401 (1996).
- [16] J. Mandel, C.R. Dohrmann, R. Tezaur. An algebraic theory for primal and dual substructuring methods by constraints. *Applied numerical mathematics* 54, 167-193 (2005)
- [17] B. Nour-Omid and C.C. Rankin. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 93, 353-384 (1991).
- [18] J. Pebrele, C. Rey, P. Gosselet. A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal of Multiscale Computational Engineering* 6(3), 251-262 (2008).
- [19] C. Rey. Développement d'algorithmes parallèles de résolution en calcul non-linéaire de structures hétérogènes. *Phd Thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan* (1994).
- [20] L. Series, F. Feyel, F.-X. Roux. Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de Lagrange, application au calcul des structures, cas du contact. In *Actes du Sixième Colloque National en calcul des Structures*. 3, 373-380 (2003).