



HAL
open science

Eléments finis enrichis pour la modélisation de la rupture des matériaux hétérogènes.

Nathan Benkemoun, Jean-Baptiste Colliat, Adnan Ibrahimbegovic

► **To cite this version:**

Nathan Benkemoun, Jean-Baptiste Colliat, Adnan Ibrahimbegovic. Eléments finis enrichis pour la modélisation de la rupture des matériaux hétérogènes.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592894

HAL Id: hal-00592894

<https://hal.science/hal-00592894>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Éléments finis enrichis pour la modélisation de la rupture des matériaux hétérogènes

N. Benkemoun¹, J.-B. Colliat¹, A. Ibrahimbegovic¹

¹ LMT, École Normale Supérieure de Cachan, France, {benkemoun,colliat,ai}@lmt.ens-cachan.fr

Résumé — Dans ce travail, nous proposons, dans le cadre de la modélisation des matériaux à matrice cimentaire, un modèle éléments finis reposant sur un treillis spatial dont la cinématique des éléments barres a été enrichie via deux discontinuités. La première, une discontinuité faible, permet d'utiliser des maillages non-adaptés à la géométrie des hétérogénéités et la seconde, une discontinuité forte, introduit la fissuration tout en gardant une objectivité à l'égard du maillage.

Mots clés — discontinuité forte, discontinuité faible, matériau cimentaire.

1 Introduction

L'objectif principal de ce travail est de développer un modèle numérique capable de proposer une représentation fine des phénomènes de fissuration pour les matériaux quasi-fragiles à matrice cimentaire. Dans ce sens, l'échelle pertinente retenue est l'échelle mesoscopique. L'échelle mesoscopique est ici de l'ordre du centimètre et le matériau peut être considéré comme bi-phasique (agrégats inclus dans un mortier, contenant lui même des inclusions de taille inférieure). Par ailleurs, de part la diversité des phénomènes de fissuration pour les matériaux quasi-fragiles comme le béton, il est nécessaire de mettre en place un modèle capable de représenter explicitement les fissures à l'interface agrégats/mortier et/ou dans n'importe quelles des deux phases (agrégats et mortier).

D'un point de vue numérique, le meso-modèle développé repose sur la méthode des Éléments Finis [1]. Nous avons choisi de travailler avec un treillis spatial dont la géométrie est obtenue par une triangulation de Delaunay.

Les hétérogénéités sont explicitement représentées par des inclusions sphériques. Le processus de maillage retenu pour tenir compte de ces inclusions est fondé sur un maillage non adapté aux interfaces [2], c'est-à-dire non contraint à suivre la position géométrique des interfaces ; certains éléments sont alors coupés en deux parties, chacune d'entre elles ayant des propriétés différentes. Une discontinuité faible (saut fini dans le champ de déformations) [3], [4] est donc introduite dans chaque élément afin de prendre en compte cette cinématique particulière. Ceci conduit à un processus de maillage qui ne dépend pas de la position et de la forme des inclusions. Considérons un matériau bi-phasique (agrégats et mortier), trois types d'éléments apparaissent : ceux entièrement inclus dans le mortier

(discontinuité faible non activée), ceux entièrement inclus dans les agrégats (discontinuité faible non activée) et ceux coupés en deux par l’interface agrégats/mortier pour lesquelles la discontinuité faible est activée.

La fissuration et le comportement adoucissant observés pour des matériaux quasi-fragiles comme le béton sont introduits au moyen de discontinuités fortes (saut fini dans le champ de déplacements) [5], [6] au sein de chaque élément. Ces discontinuités représentent la micro-fissuration qui peut apparaître dans n’importe quelle phase (agrégats ou mortier) ainsi que la décohéation aux interfaces entre les deux phases.

Parmi toutes les méthodes ([7], [8]) existantes pour introduire les deux discontinuités au sein de l’élément, la “ Enhanced Finite Element Method ” (E-FEM) [9] avec la Méthode des Modes Incompatibles [10], [11] a été choisie dont le cadre mathématique sous-jacent est la formulation variationnelle à trois champs indépendants de Hu-Washizu [12].

Ainsi ce papier s’articule de la façon suivante : dans la première partie, le problème discrétisé par la Méthode des Modes Incompatibles est exposé. Il est ensuite appliqué au cas d’un élément barre du treillis intégrant une discontinuité faible et une discontinuité forte. La seconde partie concerne des validations numériques et la dernière partie conclut ce travail.

2 Méthode des Modes Incompatibles

2.1 Principe général

Un cadre mathématique unifié permettant d’enrichir la cinématique d’un élément fini par la *Embedded Finite-Element Method* peut être obtenu à partir de la formulation variationnelle à trois champs de Hu-Washizu [12]. Cette formulation, contrairement à une formulation de type déplacements, considère trois champs indépendants : le champ de déplacements \mathbf{u} , le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Par ailleurs, les champs virtuels sont notés $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau})$ et correspondent respectivement aux champs de déplacements, de déformations et de contraintes. Ces trois champs sont aussi indépendants. Cette formulation à trois champs est ensuite discrétisée par la méthode des Modes Incompatibles dont nous rappelons les points clés.

Le premier point clef de la Méthode des Modes Incompatibles est d’enrichir les champs de déformations aussi bien réelles que virtuelles par un champ de déformations amélioré appelé $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pour le champ de déformations réelles et $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ pour le champ de déformations virtuelles :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \partial \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \partial \mathbf{w} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}\end{aligned}\tag{1}$$

Le deuxième point clef de la Méthode des Modes Incompatibles est de construire l’espace des champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\tau}$ et des champs de déformations améliorées $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ comme orthogonaux. Cela permet d’éviter la présence de contraintes parmi les champs dans la formulation discrétisée. Il est ainsi possible d’utiliser cette méthode pour des lois de comportement plus compliquées que l’élasticité linéaire, en gardant la même facilité de calcul des contraintes à partir des déformations.

En tenant compte de ces hypothèses, les champs de déformations réelles et virtuelles

sont ensuite discrétisés sous la forme E-FEM :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a} \text{ et } \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B} \mathbf{d} + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{a} \quad (2)$$

où \mathbf{B} est la matrice standard d'interpolation des déformations ($= \partial \mathbf{N}$), \mathbf{G} est la matrice contenant les termes d'enrichissement pour les déformations réelles et $\tilde{\mathbf{G}}$ pour les déformations virtuelles. \mathbf{a} est le vecteur contenant les degrés de liberté de la déformation améliorée. \mathbf{G} et $\tilde{\mathbf{G}}$ sont appelées les modes incompatibles.

Finalement, en injectant (2) dans la formulation variationnelle de Hu-Washizu intégrant les points clés évoqués précédemment, le système à résoudre est obtenu :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (4)$$

où

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) d\Omega$$

L'équation (3) est l'équation d'équilibre global classique d'un problème élément fini. L'équation (4) est une équation ajoutée par la présence du champ de déformations amélioré; elle permet de calculer l'inconnue \mathbf{a} de façon locale. $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est un champ de contraintes vérifiant la loi de comportement.

2.2 Application de la méthode des Modes Incompatibles dans le cadre d'un élément fini bi-phasique quasi-fragile

Dans le cadre d'un élément barre intégrant une discontinuité faible (saut fini dans le champ de déformations) et une discontinuité forte (saut fini dans le champ de déplacements), les deux modes incompatibles introduits sont illustrés sur les figures 1 et 2. Le premier permet de capturer un saut de propriétés matérielles au sein d'un élément et le second permet d'introduire la fissuration.

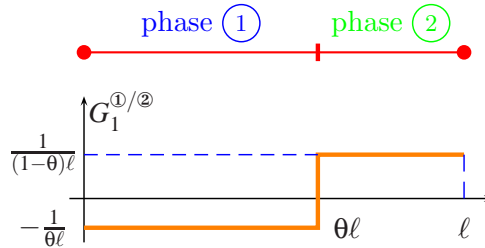


FIG. 1 – Mode incompatible pour un élément barre bi-phasique

La fonction $G_1^{1/2}$ s'écrit

$$G_1^{1/2} = \begin{cases} G_1^1 = -\frac{1}{\theta \ell}, & x \in [0, \theta \ell] \\ G_1^2 = \frac{1}{(1-\theta)\ell}, & x \in [\theta \ell, \ell] \end{cases}, \quad (5)$$

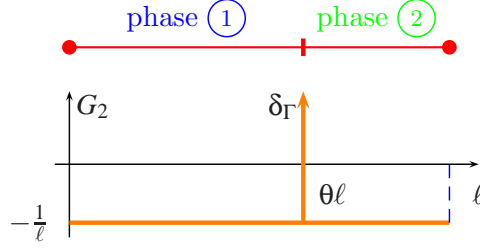


FIG. 2 – Mode incompatible pour un élément barre bi-phasique quasi-fragile

La fonction G_2 s'écrit

$$G_2 = \underbrace{-\frac{1}{\ell}}_{\tilde{G}_2} + \underbrace{\delta_\Gamma}_{\tilde{G}_2} \quad (6)$$

Il est finalement possible de donner une écriture plus adaptée au problème considéré : le vecteur \mathbf{G} contenant les deux modes incompatibles s'écrit :

$$\mathbf{G} = [G_1^{①/②}, G_2] \quad (7)$$

et le vecteur \mathbf{a} contenant les inconnues locales est de la forme :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} [[\boldsymbol{\varepsilon}]] \\ [[\mathbf{u}]] \end{bmatrix} \quad (8)$$

Le système à résoudre s'écrit alors dans le cadre d'un élément barre bi-phasique quasi-fragile :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d}, [[\boldsymbol{\varepsilon}]], [[\mathbf{u}]])] - \mathbf{f}_{ext}^e = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{G}_1^{①/②} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{①/②}(\mathbf{d}, [[\boldsymbol{\varepsilon}]], [[\mathbf{u}]]) d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (10)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{G}_2 \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{①/②}(\mathbf{d}, [[\boldsymbol{\varepsilon}]], [[\mathbf{u}]]) d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (11)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{int} &= \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{①} [[\boldsymbol{\varepsilon}]] + \tilde{G}_2 [[\mathbf{u}]]) d\Omega_1 \\ &+ \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{②} [[\boldsymbol{\varepsilon}]] + \tilde{G}_2 [[\mathbf{u}]]) d\Omega_2 \end{aligned}$$

Ce système est ensuite linéarisé et résolu par un algorithme fonctionnant à deux niveaux : le niveau global correspondant à (9) et le niveau local (10, 11). Une fois la convergence locale obtenue (c'est à dire lorsque les valeurs de $[[\boldsymbol{\varepsilon}]]$ et $[[\mathbf{u}]]$ ont convergé), une condensation statique [13] est réalisée sur $[[\boldsymbol{\varepsilon}]]$ et $[[\mathbf{u}]]$ conduisant à une matrice de rigidité globale modifiée. Une explication détaillée de cet algorithme peut être trouvée dans [14].

3 Validations numériques

3.1 Erreur par rapport à une solution exacte : barre bi-phasique

Cette application a pour but de valider le choix du mode incompatible $G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}$ permettant d'illustrer la précision de l'algorithme quant à la valeur de $[[\varepsilon]]$ calculée.

Considérons une barre de type bi-matériau ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$) de longueur 2 avec un module d'Young E_1 dans Ω_1 et E_2 dans Ω_2 où $\Omega_1 = (-1, \xi)$ et $\Omega_2 = (\xi, 1)$. L'interface Γ est située à $x = \xi$. Pour un problème avec des conditions aux limites de type Dirichlet avec $u = 0$ en $x = -1$, $u = 1$ en $x = 1$, et sans forces volumiques, le déplacement exact est de la forme [15] :

$$u(x) = \begin{cases} (1+x)\alpha, & -1 \leq x \leq \xi, \\ 1 + \frac{E_1}{E_2}(x-1)\alpha, & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (12)$$

avec

$$\alpha = \frac{E_2}{E_2(1+\xi) - E_1(\xi-1)}. \quad (13)$$

Dans cet exemple, $E_1 = 5$ MPa et $E_2 = 10$ MPa. Les résultats numériques sont obtenus pour une barre discrétisée par 20 éléments de taille 0.1 chacun pour différentes positions de l'interface : $\xi = 0,0025, 0,05$ et $0,075$. La figure 3 montre le maillage et la position de l'interface en rouge pour $\xi = 0,05$.

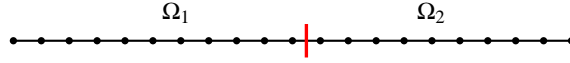


FIG. 3 – Barre de type bi-matériau : maillage et position de l'interface à $\xi = 0,05$

Les résultats en termes d'erreur relative en norme énergétique sont présentés dans le tableau 1. L'erreur relative en norme énergétique choisie est telle que :

$$\|u - u^h\| = \left(\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon^h) E (\varepsilon - \varepsilon^h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (14)$$

où u et u^h sont respectivement la solution exacte et la solution approchée par calcul Éléments Finis. E est le module d'Young, il dépend de la position x . Les résultats numériques (Tab. 1 et Fig. 4) illustrent la qualité de $G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}$ pour capturer le saut de propriétés mécaniques au niveau de l'interface ξ . Cette qualité est directement liée à la précision de l'algorithme dans le calcul du saut $[[\varepsilon]]$ dans le champ de déformations au passage de l'interface.

Position de l'interface ξ	Erreur relative pour la norme énergétique
0,0025	$1,77 \times 10^{-5}$
0,05	$1,33 \times 10^{-5}$
0,075	$1,78 \times 10^{-5}$

TAB. 1 – Erreur relative en norme énergétique pour la barre de type bi-matériau

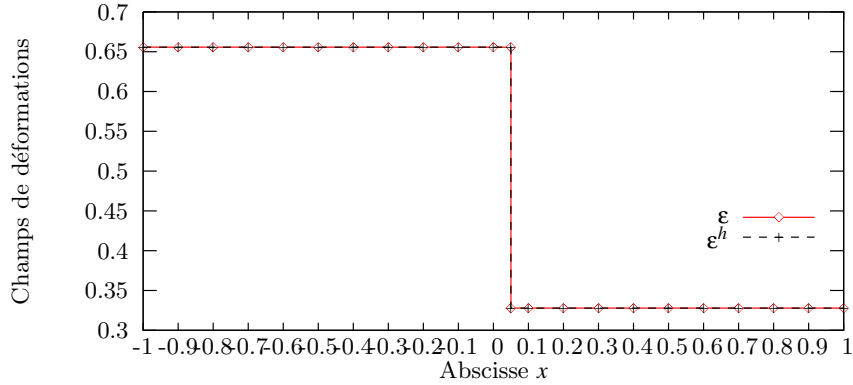


FIG. 4 – Champs de déformations exact et calculé pour $\xi = 0,05$

3.2 Objectivité à l'égard du maillage en trois dimensions

Afin de mettre en évidence l'objectivité de la solution à l'égard du maillage, la modélisation éléments finis d'un cube homogène est réalisée. Il est rappelé que dans le cadre de ce travail, nous avons choisi de travailler avec un modèle treillis trois dimensions. Le cube est donc composé d'éléments barres dont le comportement est élastique-fragile.

La discrétisation du cube est réalisée avec deux finesses de maillage : 690000 éléments et 260000 éléments. Le cube mesure $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ de côtés. Sur les faces $X = 0 \text{ mm}$, $Y = 0 \text{ mm}$ et $Z = 0 \text{ mm}$, le cube est respectivement bloqué dans les directions X , Y et Z . La face $X = 100 \text{ mm}$ est soumise à un déplacement imposé. Dans le but de fixer la zone de localisation (comme le cube est homogène, la localisation des déformations peut avoir lieu dans n'importe quel point de n'importe quelle barre du cube), les éléments contenus dans le plan du cube $X = 50 \text{ mm}$ sont affaiblis; leur contrainte limite σ_u est réduite de un pour cent par rapport à celle des autres éléments.

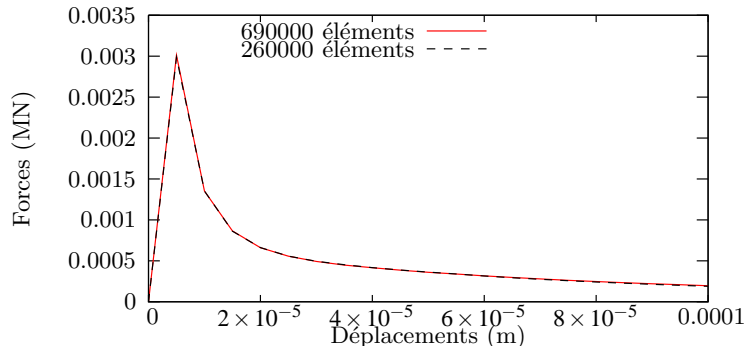


FIG. 5 – Efforts-déplacements imposés pour différentes discrétisations EF

Les résultats en termes d'efforts-déplacements imposés à l'extrémité libre du cube sont donnés sur la figure 5. Nous constatons que la réponse est indépendante de la discrétisation éléments finis choisie. En effet, l'énergie dissipée au cours du chargement est la même quel que soit le nombre (et donc la taille) d'éléments choisis pour discrétiser le cube. Il en est de même pour la charge limite avant rupture. Les figures 6(a) et 6(b) permettent de visualiser

les ouvertures de fissure au niveau de chaque élément pour les deux finesses de maillage ; on constate ainsi qu'elles sont identiques.

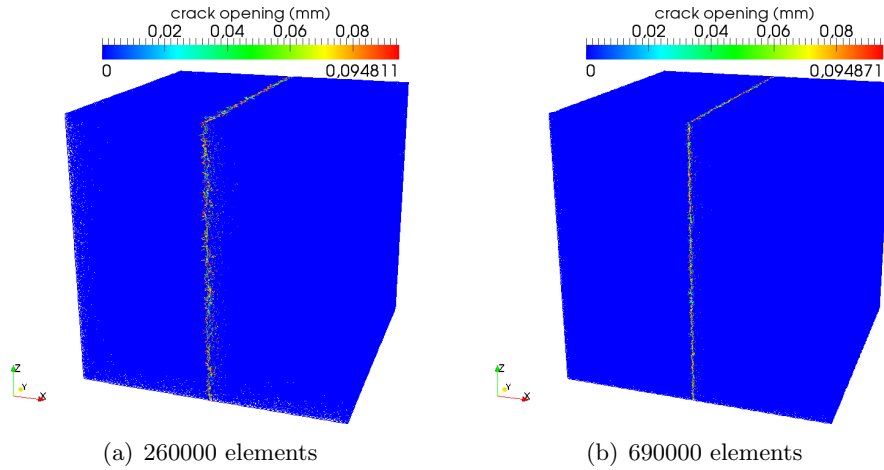


FIG. 6 – Ouvertures de fissure locale au dernier pas de temps de calcul

4 Conclusion

Ce travail a permis de montrer comment un élément fini pouvait être enrichi dans le cadre de la E-FEM. Deux enrichissements ont ainsi été introduits au sein d'un élément : le premier reposant sur une discontinuité faible (saut fini dans le champ de déformations) est apparu nécessaire par rapport à la stratégie de maillage retenu (maillage non-adapté), celle-ci impliquant que certains éléments se retrouvent coupés en deux et présentent donc un saut de propriétés mécaniques. Le second enrichissement, fondé sur une discontinuité forte (saut fini dans le champ de déplacements) a permis de représenter la micro-fissuration qui peut apparaître dans n'importe quelle phase (agrégats ou mortier) ainsi que le décohé- sion aux interfaces entre les deux phases tout en garantissant une indépendance à l'égard du maillage. Finalement, en ce qui concerne les applications numériques, ce modèle permet de reproduire des réponses caractéristiques des matériaux hétérogènes en traction, compression, traction hydrostatique. De nombreux exemples peuvent être trouvés dans [14].

Références

- [1] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method, Solid Mechanics*, volume 2. Butterworth Heinemann, Oxford, 5 edition, 2001. 1
- [2] T. Belytschko, C. Parimi, N. Moës, N. Sukumar, and S. Usui. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 :609–635, 2003. 1
- [3] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61 :189–214, 1987. 1
- [4] T. Belytschko, J. Fish, and B. E. Engelmann. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70 :59–89, 1988. 1

- [5] J. C. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12 :277–296, 1993. [2](#)
- [6] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3575–3623, 1996. [2](#)
- [7] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytshko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999. [2](#)
- [8] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuška. The generalized finite element method : An example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 :1401–1417, 2000. [2](#)
- [9] A. Ibrahimbegovic and S. Melnyk. Embedded discontinuity finite element method for modeling of localized failure in heterogeneous materials with structured mesh : an alternative to extended finite element method. *Computational Mechanics*, 40 :149–155, 2007. [2](#)
- [10] J. C. Simo and M. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 29 :1595–1638, 1990. [2](#)
- [11] A. Ibrahimbegovic and E. L. Wilson. A modified method of incompatible modes. *Communication in applied numerical methods*, 7 :187–194, 1991. [2](#)
- [12] K. Washizu. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press, New York, 3 edition, 1982. [2](#)
- [13] Edward L. Wilson. The static condensation algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8 :198–203, 1974. [4](#)
- [14] N. Benkemoun, M. Hautefeuille, J.-B. Colliat, and A. Ibrahimbegovic. Modeling heterogeneous materials failure : 3D meso-scale models with embedded discontinuities. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 82 :1671–1688, 2010. [4](#), [7](#)
- [15] N. Sukumar, D. L. Chopp, Nicolas Moës, and Ted Belytshko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6183–6200, 2001. [5](#)