

# La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (VTCR) pour l'acoustique 3D moyennes fréquences

L. Kovalevsky<sup>1</sup>, P. Ladevèze<sup>1,2</sup>, H. Riou<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan, Ens Cachan/UPMC/CNRS/PRES UniverSud Paris {kovalevsky, ladeveze, riou}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> EADS Foundation Chair Advanced Computational Structural Mechanics

**Résumé** — La théorie variationnelle des rayons complexes est une méthode ondulatoire développée pour la résolution de problèmes de vibrations moyennes fréquences. Elle utilise une formulation variationnelle non symétrique. La solution du problème est approximée par une répartition intégrale d'ondes planes, l'inconnue du problème étant l'amplitude de ces ondes. Dans le cas de problème 3D, ces amplitudes peuvent être représentées par une surface fermée, l'idée est donc d'approximer cette surface avec une série d'harmoniques sphériques. L'efficacité et la robustesse de cette démarche sont étudiées.

**Mots clés** — vibrations, moyennes fréquences, acoustique, ondes

## 1 Introduction

Depuis une dizaine d'années, les méthodes de simulation numérique dans la conception, l'analyse et l'optimisation des systèmes sont devenues indispensables dans le processus de création industriel. La méthode classique des éléments finis est la méthode la plus utilisée dans le monde industriel. Cependant, comme les fonctions de forme utilisées ne vérifient pas l'équation d'équilibre, une discrétisation très fine et un degré d'interpolation élevé sont nécessaires pour supprimer les effets de pollution et de dispersion [1], ce qui en pratique en restreint l'utilisation aux basses fréquences. Pour la résolution de problèmes de vibrations en moyennes fréquences, les méthodes ondulatoires (voir [2], [3], [4] et [5]) sont bien plus adaptées. En effet à la différence des éléments finis, ces méthodes approximent la solution à l'aide de fonctions qui vérifient exactement l'équation d'équilibre. La VTCR est l'une de ces méthodes. Dans ce papier la VTCR est utilisée pour résoudre des problèmes de vibration acoustique en 3 dimensions.

## 2 Le problème de référence et sa reformulation par la théorie variationnelle des rayons complexes (VTCR)

On étudie les vibrations d'un fluide à une fréquence donnée  $\omega$  dans une cavité fermée  $\Omega$ . On suppose que le domaine occupé par le fluide a été scindé en  $N_\Omega$  sous-domaines  $\Omega_n$ , la frontière commune à  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  étant  $\Gamma_{EE'}$ . Le problème d'acoustique associé est défini sur le domaine  $\Omega$  occupé par la cavité :

Trouver  $\{\alpha(\underline{x}) \in \mathcal{S} = \{a_{|\Omega_1} \in \mathcal{H}^1(\Omega_1), \dots, a_{|\Omega_{N_\Omega}} \in \mathcal{H}^1(\Omega_{N_\Omega})\}$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \alpha + \frac{\omega^2}{c^2} \alpha = 0 \quad \text{dans tous les } \Omega_k \\ \alpha - \frac{j}{\omega} Z \cdot \underline{\text{grad}}(\alpha) \cdot \underline{n} = h_d \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \alpha_{|\Omega_E} = \alpha_{|\Omega_{E'}} \quad \text{et} \quad (\underline{\text{grad}}\alpha_{|\Omega_E} - \underline{\text{grad}}\alpha_{|\Omega_{E'}}) \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{EE'} \end{array} \right. \quad (1)$$

$\alpha(\underline{x})$  est l'amplitude au point  $\underline{x}$  de la réponse du fluide aux sollicitations harmoniques d'amplitude  $h_d$ . La solution est unique si la partie réelle de l'impédance  $Z$  est positive sur une partie de la frontière de mesure non nulle.

La reformulation de (1) par la VTCR passe par l'introduction de l'espace admissible suivant :

$$S_{ad}^E = \left\{ \alpha_E \in H^1(\Omega_E) \mid \Delta \alpha_E + \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_E = 0, \forall \underline{x} \in \Omega_E \right\} \quad (2)$$

Elle se fait grâce à une formulation variationnelle non symétrique (voir [5], [6] ou [7]) qui permet aux restrictions de  $\alpha$  dans chacun des sous-domaines d'être indépendantes les unes des autres.

### 3 Approximation et application à l'acoustique 3D

Dans le domaine des moyennes fréquences, la formulation par la VTCR est exploitée en introduisant une approximation des modes de vibration dans chacun des sous domaines. Le champ de pression est recherché sous la forme :

$$\alpha(\underline{x})|_{\Omega_E} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} A_E(\theta, \varphi) \exp(i\omega \underline{P}(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_{C_E})) d\theta d\varphi \quad (3)$$

où  $\omega \underline{P}$  est le vecteur d'onde, avec :  $\underline{P} \cdot \underline{P} = \frac{1}{c^2}$ . Les amplitudes  $A_E(\theta, \varphi)$  sont discrétisées en une série d'harmoniques sphériques (voir [8]).

### 4 Résultats numériques

Un grand nombre d'exemples numériques ont été testés et comparés à des solutions de référence (analytiques ou résultats éléments finis). Un tel exemple est visible sur la figure 1. Ils montrent tous que l'application de la VTCR aux problèmes d'acoustique 3D en moyennes fréquences présente un grand intérêt pour la résolution de ce type de problèmes, que ce soit d'un point de vue de l'efficacité numérique ou de la robustesse de la stratégie.

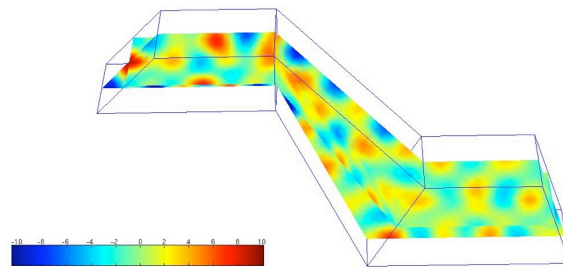


FIGURE 1 – Partie réelle du champ de pression dans la cavité en forme de Z. Visualisation sur deux plans.

### 5 Conclusion

Ce papier présente l'extension de la VTCR à l'analyse de problème de vibration acoustique 3D dans le domaine des moyennes fréquences. On montre l'efficacité et la robustesse d'une telle approche, ce qui permet d'envisager la résolution de problèmes vibro acoustique en 3 dimensions.

### Références

- [1] A. Deraemaeker, I. Babuska et P. Bouillard *Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions*. International Journal in Numerical Methods in Engineering, 46 : 471-499, 1999.
- [2] C. Farhat, I. Harari, and L.P. Franca, *The discontinuous enrichment method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190 :6455-6479, 2001.
- [3] W. Desmet, P. Sas and D. Vandepitte, *An indirect trefftz method for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro- acoustic systems*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 8 :271-288, 2001.
- [4] O. Cessenat and B. Despres, *Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 35(1) :255-299, 1998.
- [5] P. Ladevèze, *A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range* Comptes Rendus Académie des Sciences Paris, 322(IIb) :849-856, 1996.
- [6] P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch et C. Blanzé, *The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations* Engineering Computations, 18(1-2) :193-214, 2001.
- [7] H. Riou, P. Ladevèze et B. Sourcis, *The multiscale VTCR approach applied to acoustics problems* Journal of Computational Acoustics, 16(4) :487-505, 2008.
- [8] I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (6e édition — 2000).