HAL
open science

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (VTCR) pour l'acoustique 3D moyennes fréquences

Louis Kovalevsky, Pierre Ladevèze, Hervé Riou

To cite this version:

Louis Kovalevsky, Pierre Ladevèze, Hervé Riou. La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (VTCR) pour l'acoustique 3D moyennes fréquences. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592893

HAL Id: hal-00592893

https://hal.science/hal-00592893

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) pour l'acoustique 3D moyennes fréquences

L. Kovalevsky[1], P. Ladevèze[1,2], H. Riou[1]

[1] *LMT-Cachan, Ens Cachan/UPMC/CNRS/PRES UniverSud Paris {kovalevsky, ladeveze, riou}@lmt.ens-cachan.fr*
[2] *EADS Foundation Chair Advanced Computational Structural Mechanics*

Résumé — La théorie variationnelle des rayons complexes est une méthode ondulatoire développée pour la résolution de problèmes de vibrations moyennes fréquences. Elle utilise une formulation variationnelle qui prend en compte automatiquement en compte la continuité aux interfaces entre sous domaines et approxime la solution homogène du problème par une distribution intégrale d'ondes planes, l'inconnue du problème étant l'amplitude de ces ondes. Récemment, une approximation de ce portrait d'amplitude à l'aide de série de Fourier a été mise en place pour les problèmes bidimensionnels. Le but de cet article est d'utiliser la même démarche dans le cadre de problèmes 3D. Le portrait d'amplitudes est alors discrétisé avec une série d'harmoniques sphériques. La convergence de la méthode est étudiée dans le cas d'un guide d'ondes, puis la TVRC Fourier est appliquée à deux problèmes d'acoustique plus complexes.
Mots clés — vibrations, moyennes fréquences, acoustique, ondes

1 Introduction

Depuis une dizaine d'années, les méthodes de simulation numérique dans la conception, l'analyse et l'optimisation des systèmes sont devenues indispensables dans le processus de création industrielle. La méthode classique des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour résoudre les problèmes de vibrations. Cependant, comme les fonctions de formes utilisées ne vérifient pas l'équation d'équilibre, une discrétisation très fine et un degré d'interpolation élevé sont nécessaire pour supprimer les effets de pollution et de dispersion [1], ce qui en pratique en restreint l'utilisation aux basses fréquences. Pour la résolution de problèmes de vibrations en moyennes fréquences, les méthodes ondulatoires (voir [2], [3], [4] et [5]) sont bien plus adaptées. En effet à la différence des éléments finis, ces méthodes approximent la solution à l'aide de fonctions qui vérifient exactement l'équation d'équilibre. La TVCR est l'une de ces méthodes. Elle se base sur une formulation variationnelle mixte du problème de référence où les conditions sur les frontières sont vérifiées au sens faible. C'est un point-clé de la méthode, car elle autorise l'indépendance *a priori* des approximations faites sur chaque sous-structure. La continuité des champs au niveau des interfaces entre sous-structures est directement incorporée dans la formulation variationnelle, contrairement à d'autres approches qui doivent l'assurer par des multiplicateurs de Lagrange ou par l'emploi d'une technique de pénalisation. Récemment, dans [7] une approximation du portrait d'amplitude à l'aide de série de Fourier a été mise en place pour les problèmes bidimensionnels. L'introduction de cette nouvelle forme de discrétisation permet d'une part de déterminer directement le spectre du portrait d'amplitude et d'autre part de mettre en place d'un critère efficace pour de déterminer la discrétisation optimale à un niveau d'erreur donné. Cette approximation conserve les propriétés de convergence classique de la TVRC. Dans ce papier, l'approximation de type Fourier est étendue aux problèmes tridimensionnels. La convergence de la méthode est étudiée dans le cas d'un guide d'ondes, puis la TVRC Fourier est appliquée à deux problèmes d'acoustique plus complexes : une cavité en Z, et une cavité automobile.

2 Le problème de référence et sa formulation par la théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC)

On étudie les vibrations d'un fluide à une fréquence donnée ω dans une cavité fermée Ω. On suppose que le domaine occupé par le fluide a été scindé en en N_Ω sous domaines Ω_E, la frontière commune à Ω_E et $\Omega_{E'}$ est notée $\Gamma_{EE'}$. Le problème d'acoustique associé est défini sur les sous domaines Ω_E consiste à trouver les champs de pression acoustique $(p_1, ..., p_{N_\Omega})$ tels que :

$$\Delta p_E + k^2 p_E = f(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_E, \quad E \in \{1, ..., N_\Omega\} \tag{1}$$

$$\left| \begin{array}{ll} p_E = p_{dE} & \text{sur } \partial_p \Omega_E, \\ \mathcal{L}_v[p_E] = v_{dE} & \text{sur } \partial_v \Omega_E, \quad E \in \{1, ..., N_\Omega\} \\ p_E - Z_E \mathcal{L}_v[p_E] = h_{dE} & \text{sur } \partial_Z \Omega_E, \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\left| \begin{array}{ll} p_E - p_{E'} = 0 & \text{sur } \Gamma_{EE'} \\ \mathcal{L}_v[p_E] + \mathcal{L}_v[p_{E'}] = 0 & \text{sur } \Gamma_{EE'} \end{array} \right. \tag{3}$$

$p_E(\underline{x})$ est l'amplitude au point $\underline{x}$ de la réponse du fluide aux sollicitations harmoniques dans le sous domaine Ω_E, $\mathcal{L}_v[p_E]$ l'opérateur vitesse.

$$\mathcal{L}_v[p_E] = \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial p_E}{\partial \underline{n}} \tag{4}$$

La fonction $f(\underline{x})$ est la partie non homogène de cette équation associée à une source ponctuelle, surfacique ou volumique. Les groupes d'équations (2) et (3) traduisent respectivement les conditions aux limites du problème aux dérivées partielles et les conditions de transmission des champs à travers l'interface Γ.

- La partie $\partial_p \Omega_E$ de $\partial \Omega_E$ est soumise à une condition en pression dite de Dirichlet. Dans le cas où la pression imposée p_{dE} est nulle, on parle de condition de bord mou.
- La partie $\partial_v \Omega_E$ de $\partial \Omega_E$ est soumise à une condition en vitesse dite de Neuman. Dans le cas où la vitesse normale imposée v_{dE} est nulle, on parle de condition de bord rigide.
- La partie $\partial_Z \Omega_E$ de $\partial \Omega_E$ est soumise à une condition mixte dite de Robin, où Z_E est une fonction d'impédance normale. Cette condition est très importante, car elle introduit de l'amortissement dans le modèle, plus précisément à travers la partie réelle de Z_E : $\Re\{Z_E\}$. Dans les cas limites où $Z \to 0$ et $Z \to \infty$ la condition mixte de Robin est équivalente respectivement à la condition de Dirichlet et de Neuman.

On note $\mathcal{A}_{ad}^{(E)}$ l'espace des fonctions vérifiant de façon exacte l'équation de Helmholtz inhomogène (1) en tous points de la (sous-)cavité Ω_E. Cet espace est noté $\mathcal{A}_{ad,0}^{(E)}$ en absence de sources, et dans ce cas l'équation vérifiée est l'équation de Helmholtz homogène.

$$\mathcal{A}_{ad}^{(E)} = \left\{ p_E \in H^1(\Omega_E) \;\middle|\; \Delta p_E + k^2 p_E = f(\underline{x}), \;\; \forall \underline{x} \in \Omega_E \right\} \tag{5}$$

$$\mathcal{A}_{ad,0}^{(E)} = \left\{ p_E \in H^1(\Omega_E) \;\middle|\; \Delta p_E + k^2 p_E = 0, \;\; \forall \underline{x} \in \Omega_E \right\} \tag{6}$$

Le problème aux dérivées partielles avec conditions aux limites sur le bord (1)-(2)-(3) est équivalent au problème variationnel suivant :

Trouver $(p_1, \cdots, p_{N_\Omega}) \in \mathcal{A}_{ad}^{(1)} \times \cdots \times \mathcal{A}_{ad}^{(N_\Omega)}$, tels que :

$$\Re\Bigg\{ \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_p \Omega_E} (p_E - p_{dE}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E]} \mathrm{d}s + \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_v \Omega_E} \left(\overline{\mathcal{L}_v[p_E] - v_{dE}} \right) \delta p_E \mathrm{d}s$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_Z \Omega_E} \left(\left((1 - Z_E \mathcal{L}_v)[p_E] - h_{dE} \right) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E]} + \left(\overline{(\mathcal{L}_v - 1/Z_E)[p_E] + h_{dE}/Z_E} \right) \delta p_E \right) \mathrm{d}s$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_{EE'}} \int_{\Gamma_{EE'}} \left((p_E - p_{E'}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E - \delta p_{E'}]} + \overline{\mathcal{L}_v[p_E + p_{E'}]} (\delta p_E + \delta p_{E'}) \right) \mathrm{d}s \Bigg\}$$
$$\forall (\delta p_1, \cdots, \delta p_{N_\Omega}) \in \mathcal{A}_{ad,0}^{(1)} \times \cdots \times \mathcal{A}_{ad,0}^{(N_\Omega)} \tag{7}$$

La solution est unique si la partie réelle de l'impédance Z est positive sur une partie de la frontière de mesure non nulle.

La formulation utilisée (voir [5], [6] ou [8]) peut être vue comme un bilan de puissance sur les frontières de chacune des sous-cavités Ω_E. Cette formulation est une formulation mixte non-symétrique. En revanche, elle permet de construire des approximations *a priori* indépendantes sur chacune des sous-cavités Ω_E, car les conditions de continuité à l'interface y sont directement incorporées. Ceci lui confère une grande souplesse en comparaison avec les techniques utilisant des multiplicateurs de Lagrange ou un terme de pénalisation pour assurer ces conditions.

3 Approximation utilisée pour l'acoustique 3D

L'approximation des champs vibratoires est décomposée en une somme d'une solution particulière (notée $p^p(\underline{x})$) et d'un solution homogène (notée $p^h(\underline{x})$) :

$$p_E(\underline{x}) = p_E^h(\underline{x}) + p_E^p(\underline{x}) \quad \text{où } p_E^h(\underline{x}) \in \mathcal{A}_{ad,0}^{(E)} \text{ et } p_E^p(\underline{x}) \in \mathcal{A}_{ad}^{(E)} \tag{8}$$

3.1 Solution homogène de l'équation d'Helmohltz

La TVRC considère que la solution homogène peut être localement décrite par une répartition intégrale de modes locaux appelés rayons de vibration (voir équation (9)). Ce sont des fonctions à deux échelles, l'échelle rapide caractérisant le phénomène vibratoire est prise en compte analytiquement, tandis que l'échelle lente est calculée numériquement. Cette propriété donne le coté multiéchelle à la TVRC. La solution homogène du problème d'acoustique $p_E^h(\underline{x})$ est donc recherchée sous la forme :

$$p_E^h(\underline{x}) = \int_{C_a^{(E)}} A_E(\underline{k}_E) e^{i\underline{k}_E \cdot \underline{x}} \mathrm{d}C_a^{(E)} \tag{9}$$

où $\underline{k}_E$ désigne le vecteur d'onde associé aux ondes acoustique, A_E est la distribution des amplitudes des rayons complexes aussi appelée portrait d'amplitude, et C_a^E la surface décrite par l'ensemble des vecteurs d'onde quand ces derniers parcourent toutes les directions de l'espace. Pour déterminer cette surface, on injecte (9) dans l'équation homogène associée à (1), on conclut à l'existence de 2 familles de rayons possibles :

- les rayons propagatifs qui sont des ondes planes se propageant dans une direction donnée. Pour un problème 3D, le vecteur d'onde s'écrit :

$$\underline{k}_E = ik \left(\cos(\varphi) \sin(\theta) \underline{e}_x + \sin(\varphi) \sin(\theta) \underline{e}_y + \cos(\theta) \underline{e}_z \right) \tag{10}$$

  avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$. La distribution des amplitudes associées aux rayons propagatifs est définie sur la sphère unité.
- les rayons évanescents de bord, ces ondes se caractérisent par le fait qu'elles ont une longueur d'onde plus courte que les ondes propagatives. Ils ne sont pas pris en compte dans un problème d'acoustique pure.

Le portrait d'amplitude étant défini sur la sphère unité, on peut très facilement utiliser les séries de Laplace pour représenter ce dernier. Les séries de Laplace sont l'équivalent 3D des séries de Fourier et utilisent la base orthonormée des harmoniques sphériques (voir [9]).

$$A_E(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{L_p}\sum_{m=-l}^{l} a_{l,m}^E \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta,\varphi) sin(\varphi) d\theta d\varphi \tag{11}$$

avec :

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{2.(l-m)!}{(l+m)!}}.P_l^m(cos\theta).e^{im\varphi} \\ P_l^m(X) &= \frac{(-1)^m}{2^l.n!}\left(1-X^2\right)^{m/2}\frac{\partial^{m+l}(X^2-1)^l}{\partial X^{m+n}} \end{aligned} \tag{12}$$

où, $Y_l^m(\theta,\varphi)$ est l'harmonique sphérique de degré l et d'ordre m, (m varie de $-l$ à l). $P_l^m(X)$ est le polynôme de Legendre.

Finalement dans le cadre de problème d'acoustique pure la solution homogène du champ de pression est recherché sous la forme :

$$p_E^h(\underline{x}) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} A_E(\theta,\varphi).e^{i\underline{k}(\theta,\varphi).\underline{x}} d\theta d\varphi = \sum_{l=0}^{L_p}\sum_{m=-l}^{l} a_{l,m}^E \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta,\varphi) e^{i\underline{k}(\theta,\varphi).\underline{x}} sin(\varphi) d\theta d\varphi \tag{13}$$

où les coefficients $a_{l,m}^E$ sont les inconnues du problème, et L_p le degré de discrétisation.

3.2 Solution particulière de l'equation inhomogène d'Helmholtz

Le traitement d'une source ponctuelle dans l'équation de Helmholtz inhomogène ne pose pas de difficultés particulières. Il suffit de rajouter à l'espace d'approximation le noyau de Green associé à l'équation de Helmholtz inhomogène. Pour un problème de dimension 3, cette fonction s'écrit

$$p^p(\underline{x}) = -\frac{\rho_0\omega}{4^2} q_d H_0^{(2)}(k\|\underline{x}-\underline{x}_{q_d}\|) \tag{14}$$

où $H_0^{(2)}$ désigne la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. Cette fonction représente le champ rayonné par la source q_d dans un milieu infini. Pour un problème en milieu fermé, les solutions particulières utilisées ne vérifient pas *a priori* les conditions aux limites imposées. Il convient donc de modifier ces dernières de sorte que l'ajout d'une solution particulière à l'approximation du problème homogène associé conduise à la solution recherchée.

4 Mise en oeuvre numérique

En injectant les expressions (13) dans la formulation variationnelle (7), on aboutit à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \cdots & \mathbf{K}_{1,N_\Omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N_\Omega,1} & \cdots & \mathbf{K}_{N_\Omega,N_\Omega} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \underline{a}_{l,m}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}_{l,m}^{N_\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_{N_\Omega} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Puisque les fonctions de forme sont définies de façon continue sur les sous-cavités Ω_E, les blocs $\mathbf{K}_{EE}$ sont des matrices pleines. Toutefois, quand le nombre de sous-cavités augmente, les blocs de couplage $\mathbf{K}_{EE'}$ sont des matrices nulles dès que les domaines Ω_E et $\Omega_{E'}$ n'ont pas de frontière commune.

Dans le cadre de l'acoustique le terme $\mathbf{K}_{(lm),(l'm')}$ est de la forme :

$$\mathbf{K}_{(lm),(l'm')} = \iint_{\partial\Omega_E} p(\underline{x})\overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E(\underline{x})]}\mathrm{d}s \tag{16}$$

$$= \iint_{\partial\Omega_E}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -i\underline{k}_E(\theta',\varphi').\underline{n}\, Y_l^m(\theta,\varphi)\overline{Y_{l'}^{m'}(\theta',\varphi')} e^{i(\underline{k}_E(\theta,\varphi)-\underline{k}_E(\theta',\varphi')).\underline{x}}\, \mathrm{d}\theta sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta' sin(\varphi')\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}s \tag{17}$$

Le calcul de chaque terme de l'opérateur nécessite donc le calcul d'une intégrale sextuple : une intégration double sur le bord, et deux intégrales double sur la sphère unité. La décomposition de Anger Jacobi permet d'avoir un résultat analytique pour évaluer le champ de pression et de vitesse associés à une fonction de forme. La stratégie de calcul mise en place est donc une méthode semi-analytique : les intégrales sur la sphère unité sont réalisées de manière analytique, et l'intégration sur le bord de manière numérique.

5 Convergence de la méthode

Pour illustrer les propriétés de convergence de la TVRC-Fourier 3D, on considère une cavité cubique de 1 m^3 remplie d'air ($\rho = 1.25 kg.m^{-3}$, $c = 340 m.s^{-1}$). Les six faces sont soumises à des conditions aux limites de type Robin. Les sollicitations du problème sont associées à une solution exacte, qui est ici une onde plane de direction ($\theta = 30°$ et $\varphi = 70°$). Ce problème est résolu à différentes fréquences telle que k =20 et 40 m^{-1}, ce qui correspond respectivement à environ 3 et 6 longueurs d'ondes dans la structure.

On définit l'erreur comme :

$$\varepsilon = \frac{\int_\Omega \|p - p_{ex}\| d\Omega}{\int_\Omega \|p_{ex}\| d\Omega} \tag{18}$$

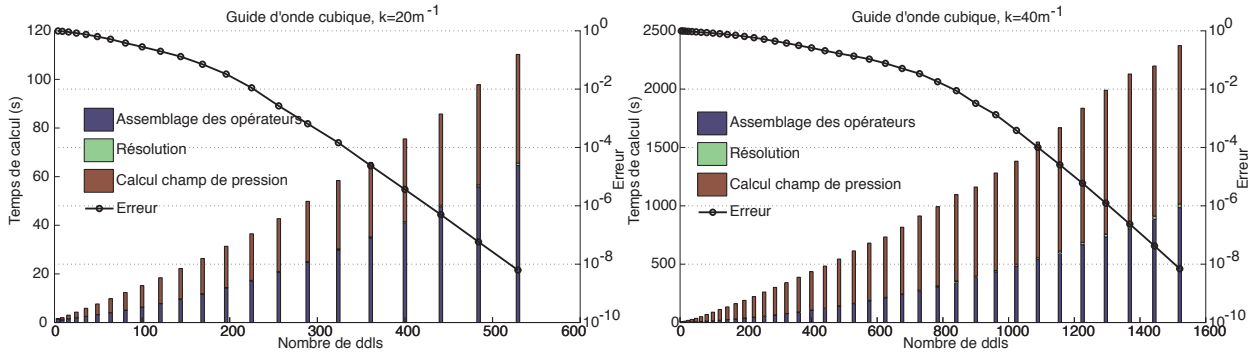

FIGURE 1 – Evolution de l'erreur (19) et du temps de calcul en fonction du nombre de ddls, pour l'exemple présenté dans la partie 5, pour k =20m^{-1} (gauche), k =40m^{-1} (droite)

La figure 1 représente d'une part l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de degrés de libertés (ddls), et d'autre part la répartition du temps de calcul, entre la phase d'assemblage, de résolution et de reconstruction du champ de pression. Le nombre de ddls est piloté en augmentant progressivement le degré de la discrétisation L_p.

Pour la plus petite des fréquence testée, la TVRC-Fourier 3D résoud le problème avec une erreur de l'ordre de 1%, en environ 1 min et avec seulement 300 degrés de liberté pour déterminer un champ de pression. À titre de comparaison, en utilisant la règle de 10 éléments par longueur d'onde il faudrait un maillage d'environ 6000 ddls pour avoir une solution acceptable avec les éléments finis. Pour la plus haute fréquence, il faut 20 minutes et 1000 ddls pour résoudre le problème contre plus de 45000 ddls pour la méthode des éléments finis.

En terme de temps de calcul, il apparait que la phase de résolution du système est négligeable devant l'assemblage des opérateurs et la reconstruction du champ de pression. Le temps nécessaire à la reconstruction du champ de pression dépend de la finesse du maillage sur lequel on le calcul. Ici le champ de pression est reconstruit sur un maillage avec une moyenne de 10 éléments par longueur d'onde. On peut très bien imaginer réduire ce temps, en s'intéréssant au champ vibratoire uniquement sur des patchs.

Dans [7], il a été montré que la convergence de la méthode était pilotée par l'énergie des fonctions de forme de plus haut degré. La figure 2 trace l'évolution de l'erreur en fonction de l'énergie moyenne des $2L_p + 1$ fonctions de forme de plus haut degré L_p.

Cette propriété permet comme dans le cas 2D de définir un critère efficace permettant de choisir le degré de discrétisation dans chacun des sous domaines.

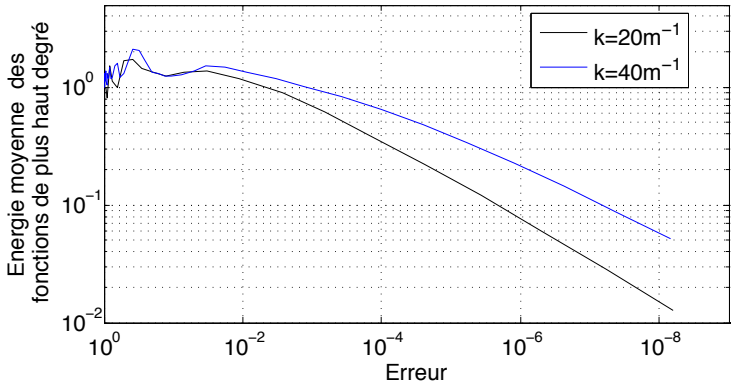

FIGURE 2 – Evolution de l'erreur en fonction de l'énergie moyenne des $2L_p + 1$ fonctions de forme de plus haut degré L_p

6 Exemples d'application

Dans cette dernière partie, la TVRC-Fourier est utilisée pour résoudre deux problèmes d'acoustique de complexité croissante. Dans un premier temps c'est un problème défini dans une cavité en Z qui est résolu, puis dans une cavité simplifiée de voiture. L'ensemble de ces simulations sont réalisées avec le logiciel CoFouRays développé au LMT. Ce logiciel est écrit sous l'environnement Matlab, utilise Gmsh pour traiter les géométries, et Paraview pour visualiser les résultats.

6.1 Cas d'une cavité en Z

On considère une cavité en Z telle que définie dans la figure 3. Cette cavité est remplie d'air ($\rho = 1.25\text{kg.m}^{-3}$, $c = 340\text{m.s}^{-1}$) et soumise à une pression imposée à l'une de ses extrémités, une condition d'impédance normale avec $Z = 425$ Pa.m^{-1}.s sur deux faces à l'autre extrémité, ainsi qu'une condition de mur rigide sur les autres faces. Pour la résolution, la cavité est décomposée en trois sous domaines.

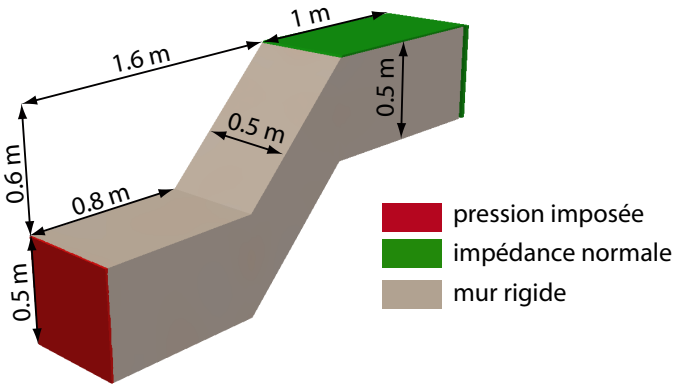

FIGURE 3 – Définition du problème dans une cavité en Z

Ce problème est résolu à différentes fréquences telle que $f = 500$, 1000, et 1500 Hz. On s'intéresse à l'évolution de l'erreur relative calculée par rapport à une solution éléments finis calculée avec une discrétisation très fine (environ 10 éléments de degré 2 par longueur d'onde) notée p_{FEM}. L'erreur relative est alors définie par :

$$\varepsilon = \frac{\int_\Omega \|p - p_{FEM}\| \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \|p_{FEM}\| \mathrm{d}\Omega} \tag{19}$$

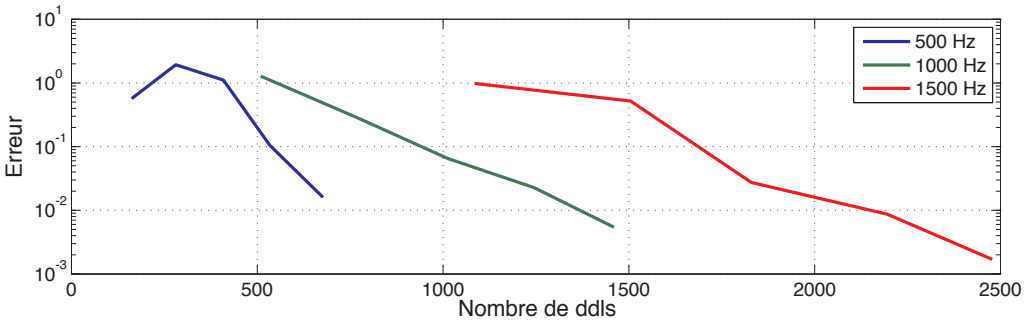

FIGURE 4 – Evolution de l'erreur relative en fonction du nombre de ddls

TABLE 1 – Nombre de ddls requis par la TVRC et la FEM aux 3 fréquences considérées

fréquences	FEM	TVRC
500 Hz	18116	677
1000 Hz	132540	1460
1500 Hz	496434	2478

La figure 4 illustre la convergence exponentielle de la TVRC et le tableau 1 montre le gain réalisé par la TVRC en terme de nombre de ddls. La TVRC semble donc particulièrement adaptée pour la résolution de ce type de problème.

6.2 Cas d'une cavité automobile

L'objectif de cette partie est de montrer la robustesse de la méthode et sa capacité à résoudre un problème complexe. On considère maintenant un modèle simplifié d'une demie cavité automobile. La figure 5 montre une vue 3D de la cavité acoustique, ainsi qu'une coupe. La cavité est soumise à différentes conditions aux limites : vitesse normale nulle (pare brise, lunette arrière, plan de symmétrie), impédance normale (sièges, sol, toit et portières) et pression imposée (face avant). Pour la résolution, la cavité est décomposée en neuf sous domaines.

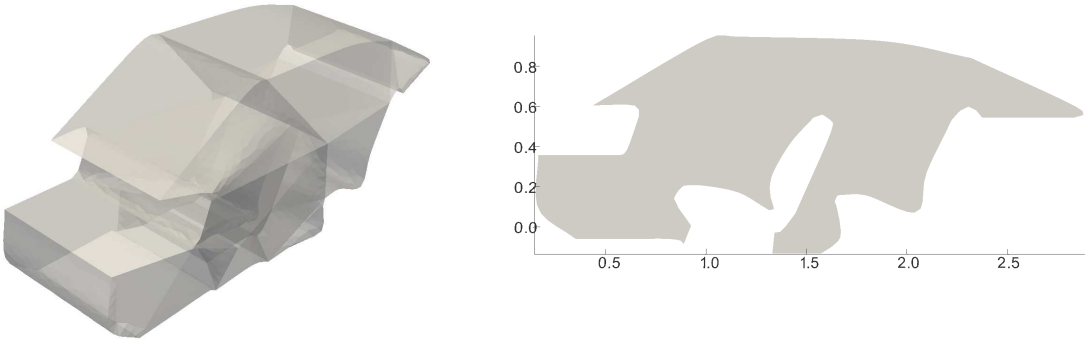

FIGURE 5 – Vue 3D et coupe de la cavité automobile

La figure 6 montre la partie réelle du champ de pression pour une fréquence d'excitation de 500 et 750 Hz. Ces solutions sont calculées avec respectivement 2120 et 4600 degrés de libertés, et sont cohérentes avec les conditions aux limites imposées. La TVRC semble donc capable de résoudre des problèmes d'acoustique complexes. Néanmoins, au vue de la complexité de la géométrie et de la taille du problème éléments finis équivalent, ces solutions n'ont pas pu être comparées.

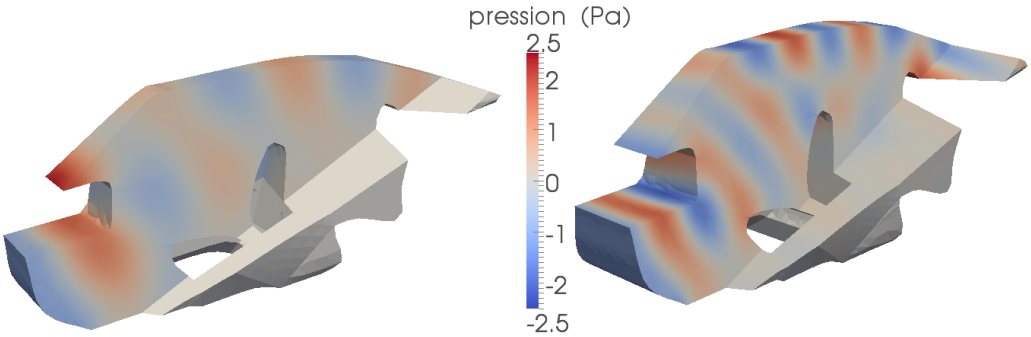

FIGURE 6 – Partie réelle du champ de pression pour une fréquence d'excitation de 500 Hz (gauche) et 750 Hz (droite)

7 Conclusion

Ce papier présente l'extension de la TVCR à l'analyse de problème de vibrations acoustiques 3D dans le domaine des moyennes fréquences. L'utilisation des harmoniques sphériques pour représenter le portrait d'amplitudes, permet de mettre en place une méthode d'intégration efficace à travers un schéma semi-analytique. La convergence exponentielle de la méthode est illustrée sur un guide d'onde cubique. Enfin la robustesse de la méthode est prouvée, en appliquant avec succès la TVRC-Fourier à des problèmes d'acoustique tridimensionnel complexes. Les travaux futurs peuvent être d'une part l'extension aux problèmes vibro acoustique en 3 dimensions et d'autre part un analyse plus poussée du domaine de validité fréquentiel de la TVRC-Fourier 3D.

Remerciements

Les auteurs remercient les partenaires du projet ITN Marie Curie GA-214909 "MID-FREQUENCY - CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics".

Références

[1] A. Deraemaeker, I. Babuska et P. Bouillard *Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions.* International Journal in Numerical Methods in Engineering, 46 : 471-499, 1999.

[2] C. Farhat, I. Harari, and L.P. Franca, *The discontinuous enrichment method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190 :6455-6479, 2001.

[3] W. Desmet, P. Sas and D. Vandepitte, *An indirect trefftz method for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro- acoustic systems*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 8 :271-288, 2001.

[4] O. Cessenat and B. Despres, *Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 35(1) :255-299, 1998.

[5] P. Ladevèze, *A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range* Comptes Rendus Académie des Sciences Paris, 322(IIb) :849-856, 1996.

[6] P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch et C. Blanzé, *The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations* Engineering Computations, 18(1-2) :193-214, 2001.

[7] L. Kovalevsky, P. Ladeveze and H. Riou. The Variational Theory of Complex Rays for Helmholtz equation : effect of choice of Fourier series,submitted.

[8] H. Riou, P. Ladevèze et B. Sourcis, *The multiscale VTCR approach applied to acoustics problems* Journal of Computational Acoustics, 16(4) :487-505, 2008.

[9] I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products,* Academic Press (6e édition — 2000).