



**HAL**  
open science

## Etude de différentes représentations des interefforts dans une stratégie de décomposition de domaines mixte

Geoffrey Desmeure, Pierre Gosselet, Christian Rey, Philippe Cresta

### ► To cite this version:

Geoffrey Desmeure, Pierre Gosselet, Christian Rey, Philippe Cresta. Etude de différentes représentations des interefforts dans une stratégie de décomposition de domaines mixte. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592892

**HAL Id: hal-00592892**

**<https://hal.science/hal-00592892>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude de différentes représentations des interefforts dans une stratégie de décomposition de domaines mixte

G. Desmeure<sup>1</sup>, P. Gosselet<sup>1</sup>, C. Rey<sup>1</sup>, P. Cresta<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris), 61 av. du Président Wilson, F-94230 Cachan, France.

<sup>1</sup> [desmeure/gosselet/rey]@lmt.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> EADS Innovation Works France – Computational Structural Mechanics, 18 rue Marius Terce, 31025 Toulouse France.

<sup>2</sup> philippe.cresta@eads.net

**Résumé** — Nous nous intéressons à une méthode de décomposition de domaine mixte afin de traiter de grands problèmes de structure incluant des comportements complexes. L'efficacité de cette méthode est basée sur une représentation pertinente des efforts d'interface dans  $H^{1/2}$  et un algorithme de résolution de type LaTIn. Nous proposons d'évaluer les performances comparées de plusieurs mise en dualité ( $L^2$ ,  $H^{1/2}$ , discrète) couplées à différentes discrétisations d'interface ( $P0$ ,  $P1$ ) sur l'exemple académique d'un demi-portique.

**Mots clés** — Décomposition de domaine, méthode LaTIn, produit scalaire  $H^{1/2}$ .

## 1 Introduction

Le besoin de fiabilité exprimé par les industries mécaniques dans les simulations numériques entraîne un accroissement de la finesse et de la complexité des modèles employés conduisant à une explosion de la taille des systèmes discrets associés. Afin d'exploiter l'accroissement simultané des capacités de calcul (banalisation des clusters), des méthodes adaptées doivent être développées. Parmi ces méthodes, les décompositions de domaine [8] sont un outil de base, fiable et robuste pour de nombreuses applications mais dont la maîtrise doit être améliorée pour traiter les problèmes les plus complexes. La méthode de sous-structuration appuyée sur le solveur LaTIn [9] combine de nombreuses opportunités pour un traitement efficace de problèmes variés :

- Traitement localisé des non-linéarités matériaux,
- Traitement mixte des interfaces entre sous-domaines permettant l'introduction aisée de comportements complexes aux interfaces,
- Discrétisation propre des interfaces et raccord faible pour le traitement de type mortar [5] des non-conformités,

Ces possibilités s'accompagnent de subtilités de mise en oeuvre. Nous nous intéressons particulièrement au traitement des interfaces mixtes qui peut entraîner des problèmes de stabilité (condition LBB, [6]) notamment à cause des choix de discrétisation [10]. Dans [3], un cadre mathématique simple est proposé, pour la méthode FETI, afin de traiter les quantités duales via un représentant des interefforts dans  $H^{1/2}$ . En effet, l'application du théorème de représentation de Riesz au calcul de travail des interefforts sur les déplacements d'interface permet de ne travailler qu'avec des quantités de  $H^{1/2}$  ce qui facilite les discrétisations et les interpolations. Les quantités cinématiques et d'effort sont donc mieux représentées et la convergence de la méthode en est améliorée. Cependant, cette simplicité se paye au prix de l'évaluation complexe d'une « matrice de masse d'interface » pleine. L'expression du produit scalaire de  $H^{1/2}$  présente une fausse singularité requérant l'utilisation de changements de variables alourdissant les calculs ou de méthodes d'approximation adaptées. Par ailleurs, le changement de cadre mathématique impose de repenser certains paramètres LaTIn comme les directions de recherche.

La deuxième section de l'article présente, tout d'abord, la formulation continue de la méthode de décomposition de domaine de type LaTIn puis les choix de discrétisations du problème et leurs conséquences. L'introduction du représentant de l'intereffort est ensuite abordé avant le détail du calcul de « matrice de masse d'interface ». Enfin la troisième section présente une étude de performances comparées sur un cas test académique.

## 2 Formulations de la résolution par décomposition de domaine

### 2.1 Formulation continue de la méthode de sous-structuration

Le domaine à étudier  $\Omega$  est modélisé comme un assemblage de constituants simples : les sous-structures et les interfaces [9], voir figure 1. Chacun d'entre eux possède ses propres variables et ses propres équations. La frontière  $\partial\Omega_E$  d'une sous-structure  $\Omega_{E \in \mathbf{E}}$  est soumise à la distribution d'efforts  $\underline{\mathbf{F}}_E$  et de déplacements  $\underline{\mathbf{W}}_E$ . L'interface  $\Gamma_{EE'}$  gère le lien entre les composantes respectives des couples  $(\underline{\mathbf{W}}_E, \underline{\mathbf{F}}_E)$  et  $(\underline{\mathbf{W}}_{E'}, \underline{\mathbf{F}}_{E'})$ . Le domaine  $\Omega$  est soumis à des efforts volumiques  $\underline{f}_d$  et sur sa frontière à des sollicitations en effort sur  $\partial_f\Omega$  et en déplacement sur  $\partial_u\Omega$ .

#### 2.1.1 Séparation des équations

La décomposition en constituants simples entraîne une séparation des équations en deux groupes (présentés ici dans le cas particulier de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations). La solution  $s = \{s_E, E \in \mathbf{E}\}$  où  $s_E = (\underline{\mathbf{u}}_E, \underline{\mathbf{W}}_E, \underline{\underline{\sigma}}_E, \underline{\mathbf{F}}_E)$ , avec  $\underline{\mathbf{u}}_E$  le déplacement dans la sous-structure et  $\underline{\underline{\sigma}}_E$  la contrainte, doit ainsi vérifier :

- Le groupe d'équations  $\mathbf{A}_d$  qui traduit l'admissibilité du comportement des sous-structures :

Equations de liaison :	$\underline{\mathbf{u}}_E$ suffisamment régulier,	
	$\underline{\mathbf{u}}_E _{\partial\Omega_E} = \underline{\mathbf{W}}_E$	
	Equations d'équilibre :	$\forall \underline{\mathbf{u}}^*, \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\sigma}}_E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}^*) d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbf{F}}_E \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega$
Relation de Comportement :	$\underline{\underline{\sigma}}_E = \mathcal{K} : \underline{\underline{\varepsilon}}_E$	

- Le groupe d'équations  $\Gamma$  qui traduit le comportement des interfaces :

Comportement des interfaces :	Cas général :	$\underline{\mathbf{F}}_E = b(\underline{\mathbf{W}}_{E'} - \underline{\mathbf{W}}_E)$	
	Cas interface parfaite :	$\underline{\mathbf{W}}_E = \underline{\mathbf{W}}_{E'}, \quad \underline{\mathbf{F}}_E + \underline{\mathbf{F}}_{E'} = 0,$	(Γ)
	C.L. sur $\partial_f\Omega$ et $\partial_u\Omega$ .		

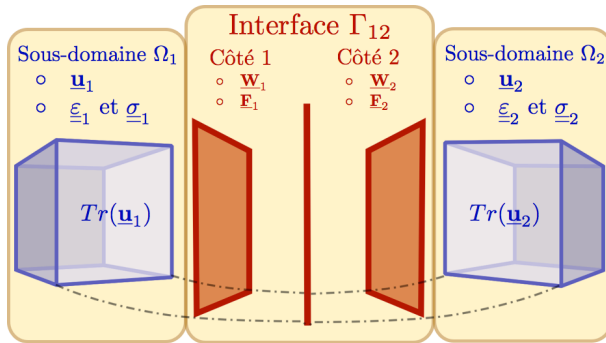


FIGURE 1 – Sous-structuration sur un cas à deux sous-domaines.

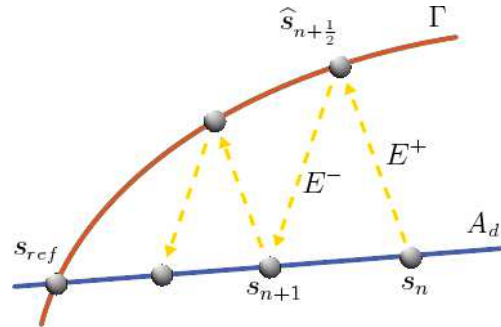


FIGURE 2 – Algorithme de résolution LaTIn .

#### 2.1.2 Méthode de résolution

Une fois les deux ensembles d'équations définis et en remarquant  $s_{ref} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$ , la résolution se base sur un algorithme itératif, illustré figure 2, consistant à rechercher une solution alternativement dans un

groupe puis dans l'autre en les reliant par les équations de directions de recherche :

$$\begin{aligned}
\text{Etape locale :} \quad & \text{Connaissant } (\underline{\mathbf{W}}_E^n, \underline{\mathbf{F}}_E^n) \text{ trouver } (\underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}}) \text{ tel que :} \\
& \text{En tout point de } \Gamma_E, \left( \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\mathbf{F}}_E^n \right) + k_E^+ \left( \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\mathbf{W}}_E^n \right) = 0 \\
\text{Etape linéaire :} \quad & \text{Connaissant } (\underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}}) \text{ trouver } (\underline{\mathbf{W}}_E^{n+1}, \underline{\mathbf{F}}_E^{n+1}) \text{ tel que :} \\
& \text{En tout point de } \Gamma_E, \left( \underline{\mathbf{F}}_E^{n+1} - \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) + k_E^- \left( \underline{\mathbf{W}}_E^{n+1} - \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Les équations faisant le lien entre les ensembles d'équations sont appelées directions de recherche.

## 2.2 Discrétisations du problème

Afin de résoudre le problème par la méthode des éléments finis, on discrétise les quantités suivantes :

- le déplacement dans les sous-structures  $\underline{\mathbf{u}}$  ;
- les déplacements d'interface  $\underline{\mathbf{W}}$  ;
- et les interefforts  $\underline{\mathbf{F}}$ .

Le choix classique, présenté dans [10] est d'utiliser des éléments  $P1$  pour les déplacements dans les sous-structures et  $P0$  pour les quantités d'interfaces. Cette représentation discontinue des quantités d'interface est motivée par la non-continuité a priori des interefforts et par l'apparition, dans la résolution du problème, des déplacements d'interfaces que sous forme de saut pouvant s'interpréter comme des déformations d'interface. Le calcul sur les interfaces se fait donc uniquement aux points de Gauss et un raccord de type mortier [5] est nécessaire pour faire le lien entre sous-structures et interfaces que les maillages des sous-structures soient compatibles ou non. Ce type de d'interpolation présente des problèmes de mauvaise prise en compte de l'énergie de modes oscillants qui introduisent une erreur en énergie dans les zones à fort gradient et pénalisent la convergence de la méthode. Afin de pallier ces difficultés, il est proposé de raffiner la discrétisation des déplacements dans les sous-structures en rajoutant sur leurs bords :

- des éléments (version h) : sur-discrétisation des sous-structures vis-à-vis des interfaces ;
- des points de Gauss (version p) : sous-intégration des quantités d'interface vis-à-vis des quantités des sous-structures.

Afin de s'affranchir de ces procédures et de vérifier exactement la relation de trace  $\text{Tr}(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{W}}$ , nous choisissons de nous placer dans un cadre où la discrétisation des quantités duales ne pose pas de difficulté, pour cela nous appliquons le théorème de représentation de Riesz à la forme linéaire continue de travail  $b_{\underline{\mathbf{F}}}(\cdot)$  associée à l'intereffort  $\underline{\mathbf{F}}$  :

$$\langle \underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{W}} \rangle_{L^2} = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{F}}(x) \cdot \underline{\mathbf{W}}(x) dx = b_{\underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{W}}) \tag{2}$$

Les déplacements d'interface  $\underline{\mathbf{W}}$  appartenant à  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $b_{\underline{\mathbf{F}}}(\cdot)$  à l'espace  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , l'application du théorème permet d'introduire un représentant  $\underline{\mathbf{T}}$  de l'intereffort  $\underline{\mathbf{F}}$  :

$$\begin{aligned}
& \forall b_{\underline{\mathbf{F}}}(\cdot) \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \exists ! \underline{\mathbf{T}} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ tel que :} \\
& \forall \underline{\mathbf{W}} \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad b_{\underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{W}}) = \langle \underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{W}} \rangle_{L^2} = \langle \underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{W}} \rangle_{H^{1/2}}
\end{aligned} \tag{3}$$

où le produit scalaire de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  est donné par [1] :

$$\langle \underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{T}} \rangle_{H^{1/2}} = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{W}}(x) \underline{\mathbf{T}}(x) dx + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(\underline{\mathbf{W}}(x) - \underline{\mathbf{W}}(y))(\underline{\mathbf{T}}(x) - \underline{\mathbf{T}}(y))}{|\underline{x} - \underline{y}|^d} dx dy \tag{4}$$

L'utilisation du représentant  $\underline{\mathbf{T}}$  dans l'écriture et la résolution du problème permet de ne travailler, au niveau des interfaces, qu'avec des quantités de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  pour lesquelles les fonctions de formes sont choisies naturellement comme les traces des fonctions de formes utilisées dans les sous-domaines. Le lien mortier n'est alors plus nécessaire dans les cas de maillages compatibles.

## 2.3 Nouvelle méthode de résolution

L'introduction du représentant  $\underline{\mathbf{T}}$  des interefforts permet de réécrire la méthode sous forme continue. En particulier, les directions de recherches sont écrites sur les  $\underline{\mathbf{T}}$  et l'étape linéaire qui est, avec un calcul du travail au sens de  $L^2(\partial\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* d\Omega + k \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{W}}^n \cdot \underline{\mathbf{W}}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( k \underline{\mathbf{W}}^{n-\frac{1}{2}} + \underline{\mathbf{F}}^{n-\frac{1}{2}} \right) \cdot \underline{\mathbf{W}}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega \quad (5)$$

devient avec le produit scalaire et les quantités de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* d\Omega + k \langle \underline{\mathbf{W}}^n, \underline{\mathbf{W}}^* \rangle_{H^{1/2}} = \langle k \underline{\mathbf{W}}^{n-\frac{1}{2}} + \underline{\mathbf{T}}^{n-\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{W}}^* \rangle_{H^{1/2}} + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega \quad (6)$$

Afin d'effectuer des comparaisons de performances, on s'intéresse également au calcul discret du travail sur l'interface qui revient à considérer les interefforts comme nodaux :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* d\Omega + k \sum_{i=1}^{N_n} \underline{\mathbf{W}}^n(x_i) \cdot \underline{\mathbf{W}}^*(x_i) = \sum_{i=1}^{N_n} \left( k \underline{\mathbf{W}}^{n-\frac{1}{2}}(x_i) + \underline{\mathbf{F}}^{n-\frac{1}{2}}(x_i) \right) \cdot \underline{\mathbf{W}}^*(x_i) + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega \quad (7)$$

où  $N_n$  est le nombre de noeuds sur l'interface et  $x_i$  la position du  $i^{\text{ème}}$  noeuds.

L'étape locale est également reformulée sur les représentants des interefforts. Le tableau ci-dessous présente les deux écritures dans le cas d'interfaces parfaites :

Intereffort $\underline{\mathbf{F}}$ :	Intereffort $\underline{\mathbf{T}}$ :
$\left  \begin{array}{l} \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\mathbf{W}}_{E'}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}} + \underline{\mathbf{F}}_{E'}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \left( \underline{\mathbf{F}}_E^n - \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) + k_E^- \left( \underline{\mathbf{W}}_E^n - \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0 \end{array} \right.$	$\left  \begin{array}{l} \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\mathbf{W}}_{E'}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \underline{\mathbf{T}}_E^{n+\frac{1}{2}} + \underline{\mathbf{T}}_{E'}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \left( \underline{\mathbf{T}}_E^n - \underline{\mathbf{T}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) + k_E^- \left( \underline{\mathbf{W}}_E^n - \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0 \end{array} \right.$

(8)

Cette reformulation impose de savoir calculer le produit scalaire de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

## 2.4 Calcul du produit scalaire de $H^{1/2}(\partial\Omega)$

Le calcul de la matrice de masse associée à ce produit scalaire pose problème à cause du terme sous l'intégrale double qui présente une singularité. Cependant cette dernière est fictive et peut être contournée par des techniques de changements de variables issues des méthodes des éléments de frontières [2, 7]. Une alternative possible consiste à calculer des approximations de ce produit scalaire qui soient plus simples de mise en œuvre et moins coûteuses mais suffisamment fines pour ne pas dénaturer le lien de dualité.

Dans [4], un calcul approché du produit scalaire de  $H_{00}^{1/2}(\partial\Omega)$  est utilisé pour des maillages réguliers. Nous proposons sur cette base, pour des maillages réguliers de pas  $h$ , le calcul suivant :

$$\langle \underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{W}} \rangle_{H_h^{1/2}} = \langle \underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{W}} \rangle_{L_h^2} + \alpha \times \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1, l \neq k}^{N_n} h^2 \frac{(\underline{\mathbf{T}}_k - \underline{\mathbf{T}}_l) (\underline{\mathbf{W}}_k - \underline{\mathbf{W}}_l)}{|x_k - x_l|^2} \quad (9)$$

où  $N_n$  est le nombre de noeuds sur l'interface considérée,  $x_i$  la position du  $i^{\text{ème}}$  noeuds et  $\underline{\mathbf{A}}_i$  la valeur au point  $x_i$  du vecteur  $\underline{\mathbf{A}}$  discrétisé. Le coefficient  $\alpha$  a été introduit à la suite d'une analyse dimensionnelle de l'expression du produit scalaire de  $H^{1/2}$  qui montre que le second terme doit être multiplié par une distance afin d'être homogène au premier. Pour que l'expression (9) définisse un produit scalaire équivalent à la formule (4), on doit vérifier :

$$\exists \gamma, \beta \text{ indépendant de } h \text{ tel que : } \gamma \|\underline{\mathbf{W}}\|_{H_h^{1/2}} \leq \|\underline{\mathbf{W}}\|_{H^{1/2}} \leq \beta \|\underline{\mathbf{W}}\|_{H_h^{1/2}} \quad (10)$$

Ce qui mène à :  $\gamma \underline{\mathbf{W}}^T \underline{\mathbf{M}}_{H_h^{1/2}} \underline{\mathbf{W}} \leq \underline{\mathbf{W}}^T \underline{\mathbf{M}}_{H^{1/2}} \underline{\mathbf{W}} \leq \beta \underline{\mathbf{W}}^T \underline{\mathbf{M}}_{H_h^{1/2}} \underline{\mathbf{W}}$ , d'où :

$$\left| \begin{array}{l} \gamma = \arg \min_{\lambda} \det(\lambda \underline{\mathbf{M}}_{H_h^{1/2}} - \underline{\mathbf{M}}_{H^{1/2}}) = 0 \\ \beta = \arg \max_{\lambda} \det(\lambda \underline{\mathbf{M}}_{H_h^{1/2}} - \underline{\mathbf{M}}_{H^{1/2}}) = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

La figure 3 présente l'évolution de ces bornes pour différentes discrétisation régulières d'une interface de dimension 1 (avec  $\alpha = 1$ ). On vérifie leur indépendance par rapport au pas  $h$  du maillage.

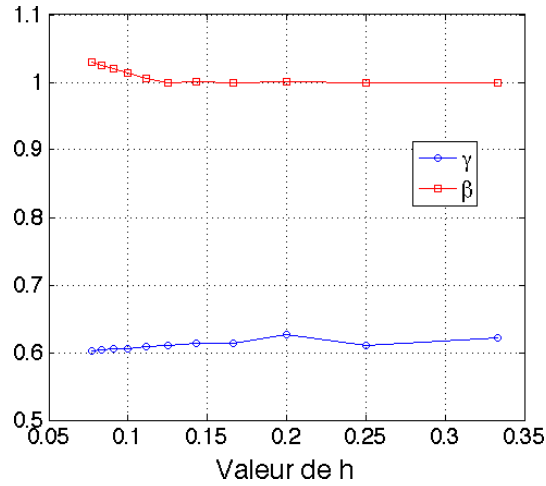


FIGURE 3 – Evolution des valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  en fonction du pas de maillage  $h$ .

### 3 Etude comparative

#### 3.1 Présentation du cas test

Les performances des méthodes sont évaluées sur un cas test académique de type demi-portique dont les dimensions sont présentées figure 4. Les conditions aux limites sont également présentées sur cette figure : le demi-portique est encasturé à sa base et un déplacement selon  $x$  est imposé sur l'autre extrémité. Les autres bords sont libres. On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope avec un matériau de module d'Young  $E = 1$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , l'étude se fait en 2D sous l'hypothèse des déformations planes. Le domaine est décomposé en trois sous-structures présentées de sorte à avoir une interface, la numéro 1, passant par la singularité de coin. Les maillages des sous-domaines sont compatibles et réguliers. Trois valeurs de pas  $h$  sont étudiées : 0.2, 0.04 et 0.01, voir figure 5.

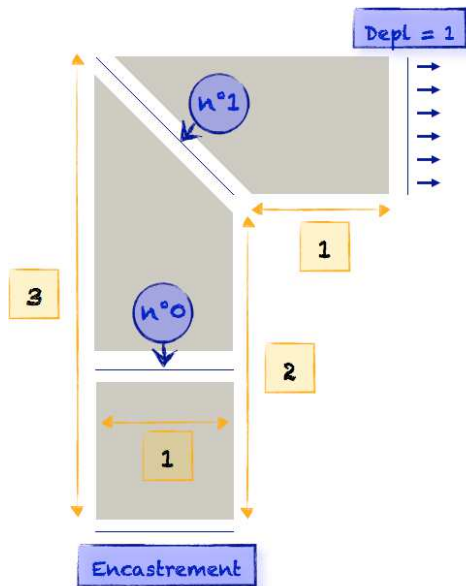


FIGURE 4 – Dimensions, sous-structuration, numérotation des interfaces et conditions limites sur le cas test.

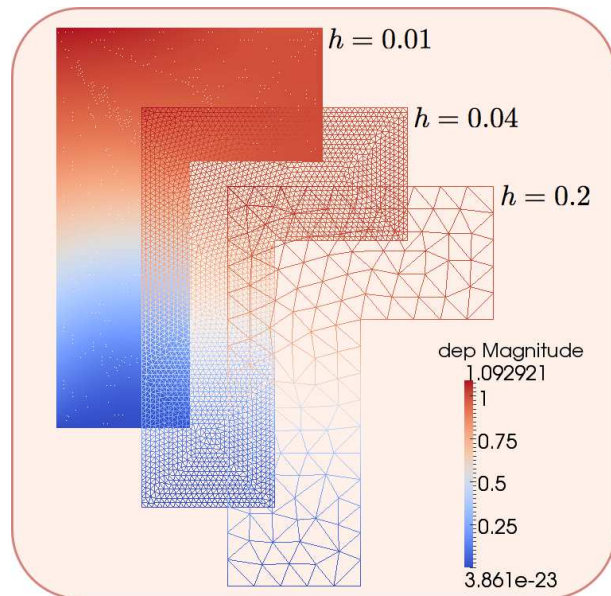


FIGURE 5 – Présentation des trois maillages testés.

**Discrétisations et interpolations :** Les trois formulations d'étape linéaire (5), (6), (7) avec leur étape locale correspondante (8) sont testées. Dans tous les cas, les sous-domaines sont discrétisés par des éléments de types  $P1$ . Pour le cas du calcul du travail aux interfaces selon le produit scalaire de  $L^2(\partial\Omega)$

deux types d'éléments,  $P0$  et  $P1$ , sont testés. Dans les autres cas, seuls les éléments linéaires sont utilisés.

**Paramètres :** Pour chaque configuration testée, les paramètres ont été optimisés de sorte à donner les meilleurs résultats selon les critères présentés ci-après. Les directions de recherches  $k_E^+$  et  $k_E^-$  sont scalaires et égales. Le paramètre de dimension  $\alpha$  (voir (9)) vaut respectivement 0.14, 0.16 et 0.12 pour  $h$  égal 0.2, 0.04 et 0.01.

### 3.2 Évaluation de la qualité des solutions

La comparaison des performances se fait par observation de l'évolution de deux critères sur un nombre imposé de 50 itérations. Le premier critère porte sur le saut de déplacement entre deux sous-structures au niveau d'une interface interne et se formule comme suit :

$$E_{saut}^{\Gamma_{12}} = \sqrt{(\text{Tr}(\underline{\mathbf{u}}_1) - \text{Tr}(\underline{\mathbf{u}}_2)) \cdot (\text{Tr}(\underline{\mathbf{u}}_1) - \text{Tr}(\underline{\mathbf{u}}_2))} \quad (12)$$

Le deuxième critère porte sur la qualité brute de la vérification de l'équilibre au niveau d'une interface :

$$E_F^{\Gamma_{12}} = \|\underline{\mathbf{F}}_1 + \underline{\mathbf{F}}_2\|_{L^2} \quad \text{ou} \quad E_F^{\Gamma_{12}} = \|\underline{\mathbf{T}}_1 + \underline{\mathbf{T}}_2\|_{H^{1/2}} \quad \text{ou} \quad E_F^{\Gamma_{12}} = \|\underline{\mathbf{F}}_1 + \underline{\mathbf{F}}_2\|_{\text{discret}} \quad (13)$$

Ce sont des critères sans normalisation visant à comparer les représentations des quantités cinématiques des sous-domaines et des quantités d'efforts sur les interfaces.

### 3.3 Résultats

Les tracés ont été réalisés sur les quantités de l'interface numéro 1. Chaque figure présente à gauche, l'évolution en fonction des itérations du critère en saut et, à droite, celle du critère en équilibre. La correspondance entre les figures et les méthodes utilisées est donnée tableau 1.

TABLE 1 – Correspondances figures-méthodes.

	Produit scalaire de travail	Discrétisation $\underline{\mathbf{W}}$	Discrétisation $\underline{\mathbf{F}}$ ou $\underline{\mathbf{T}}$
Figure 6	$H^{1/2}$	$P1$	$P1$
Figure 7	$L^2$	$P0$	$P0$
Figure 8	$L^2$	$P1$	$P1$
Figure 9	discret	$P1$	nodale

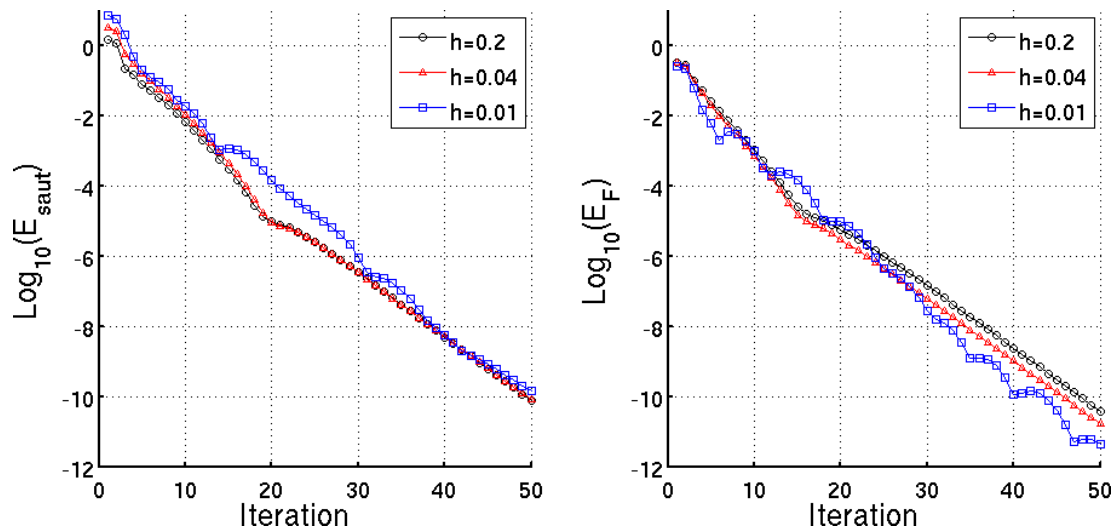


FIGURE 6 – Méthode avec produit scalaire  $H^{1/2}$ , interface discrétisée avec éléments  $P1$ .

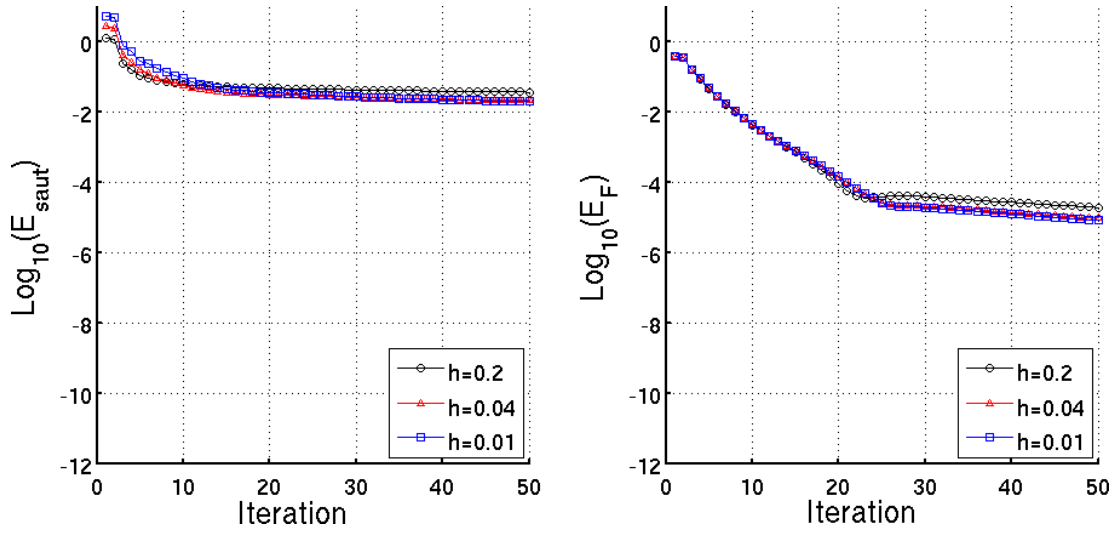


FIGURE 7 – Méthode avec produit scalaire  $L^2$ , interface discrétisée avec éléments  $P_0$ .

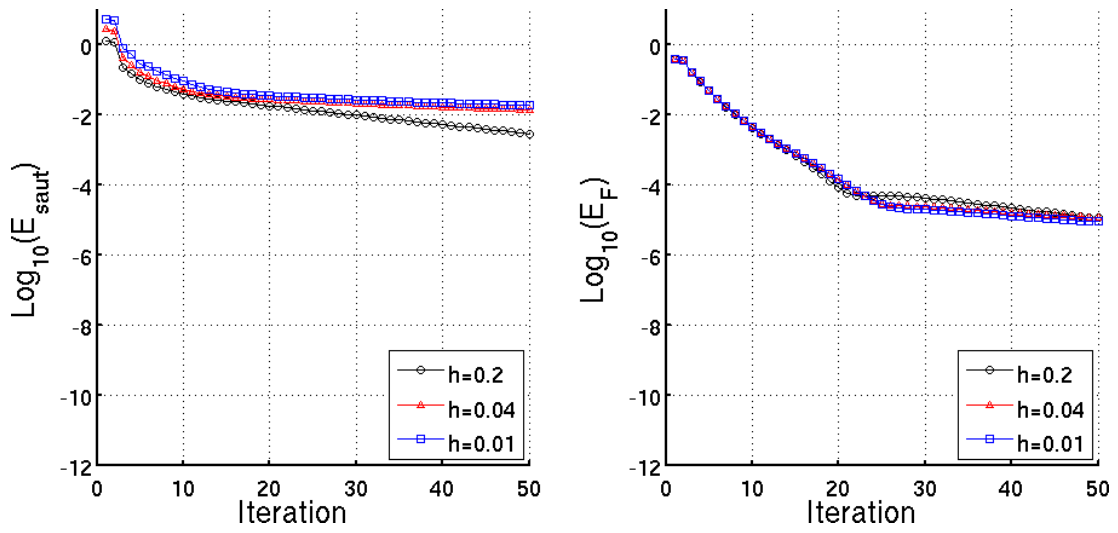


FIGURE 8 – Méthode avec produit scalaire  $L^2$ , interface discrétisée avec éléments  $P_1$ .

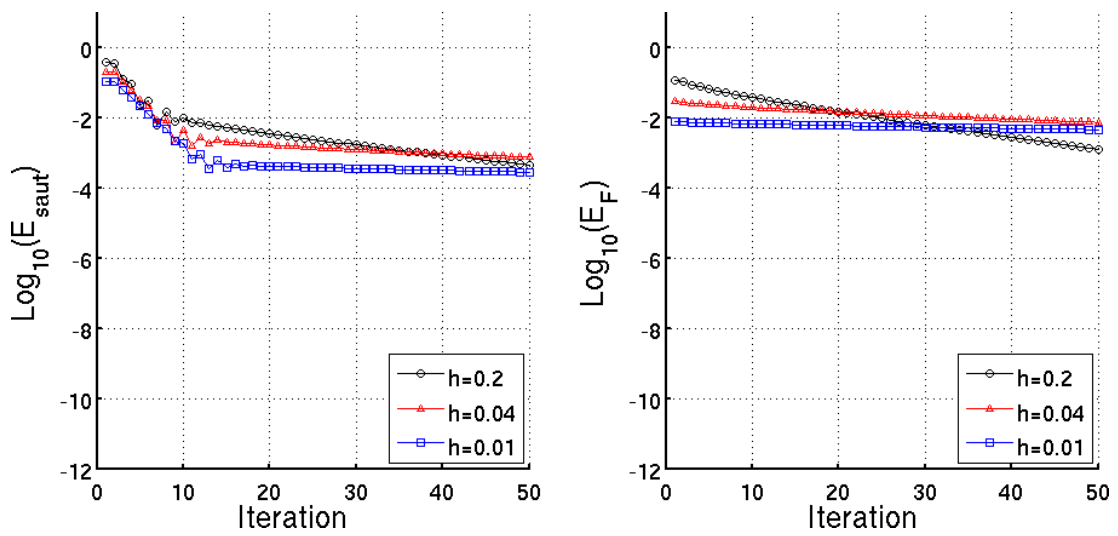


FIGURE 9 – Méthode avec produit scalaire discret, interface discrétisée avec éléments  $P_1$ .



## 4 Conclusion

L'introduction d'un représentant dual au sens du produit scalaire de  $H^{1/2}$  de l'inter-effort permet de fournir un cadre mathématique simple pour la méthode de décomposition de domaine mixte présentée. Un calcul approché de ce produit scalaire permet d'utiliser des discrétisations d'interface et des interpolations des quantités correspondantes plus adaptées. Elles fournissent de meilleures représentations des quantités cinématiques et d'efforts et la convergence de la méthode s'en trouve améliorée. Les travaux suivants porteront sur l'extension de cette méthode à une version multi-échelle et sur la mise en œuvre de comportements d'interface complexes.

## Références

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces, Second Edition*, Academic Press, 2003.
- [2] H. Andrä, E. Schnack. *Integration of singular galerkin-type boundary element integrals for 3D elasticity problems*, Numer. Math., 76 p143–p165, 1997.
- [3] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera. *A FETI method with a mesh independent condition number for the iteration matrix*, Comput. Methods Appl. Mech and Engrg., 197 p1410–p1429, 2008.
- [4] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera, F. Coronil, *A posteriori error analysis for two non-overlapping domain decomposition techniques*, Appl. Numer. Math., 59 p1214–p1236, 2009.
- [5] C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera. *A new nonconforming approach to domain decomposition : The mortar element method*, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Pitman, H. Brezis J. Lions (Eds.), page13–page51, 1994.
- [6] F. Brezzi, L. D. Marini. *Error estimates for the three-field formulation with bubble stabilization*, Math. Comput., 70 , p911–p934, 2000.
- [7] A. Frangi, G. Novati, R. Springhetti, M. Rovizzi, *3D fracture analysis by the symmetric galerkin BEM*, Comput. Mech., 28, p220–p232, 2002.
- [8] P. Gosselet, C. Rey. *Non-overlapping Domain Decomposition Methods in Structural Mechanics*, Arch. Comput. Meth. Engrg., 13 p515–p572, 2006.
- [9] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer-Verlag, 1999.
- [10] P. Ladeveze , A. Nouy, O. Loiseau. *A multiscale computational approach for contact problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191, p4869–p4891, 2002.