



# Théorie des Ondes Bloch Appliquée à la Modélisation de la Propagation d'Ondes Elastiques dans des Milieux Périodiques

Biyu Tian, Bing Tie, Denis Aubry

## ► To cite this version:

Biyu Tian, Bing Tie, Denis Aubry. Théorie des Ondes Bloch Appliquée à la Modélisation de la Propagation d'Ondes Elastiques dans des Milieux Périodiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592891

**HAL Id: hal-00592891**

**<https://hal.science/hal-00592891>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Théorie des Ondes de Bloch Appliquée à la Modélisation de la Propagation d'Ondes Élastiques dans des Milieux Périodiques**

B. -Y. Tian, B. Tie, D. Aubry

*LMSSMat (UMR8579 CNRS), Ecole Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, 92290 Châtenay-Malabry, France, {biyu.tian, bing.tie, denis.aubry}@ecp.fr*

**Résumé** — Cet article présente nos récents travaux de recherche sur l'analyse théorique et numérique de la propagation d'ondes élastiques dans des milieux périodiques, plus particulièrement dans le milieu en nid d'abeille. Notre analyse est basée sur la théorie des ondes de Bloch, en identifiant les valeurs propres et les modes périodiques de Bloch sur une cellule primitive, on peut ainsi étudier les bandes de fréquence passantes et bloquantes et le facteur d'amplification des ondes diffractées. En décomposant des solutions non périodiques sur une base composée de modes périodiques de Bloch, il est possible de développer de nouveaux modèles numériques de taille raisonnable, qui permet de mieux décrire les phénomènes des ondes de hautes fréquences en considérant les phénomènes de propagation des ondes à l'intérieur d'une seule cellule.

**Mots clefs** — Milieu périodique, Ondes de Bloch, Propagation d'ondes élastiques.

## **1 Introduction**

Des matériaux composites sandwichs en nid d'abeilles sont largement utilisés, notamment dans l'industrie aéronautique et spatiale, à cause de leur très bon rapport entre la rigidité en flexion et le poids. Beaucoup d'études ont déjà été consacrées à la modélisation numérique du comportement statique ou dynamique de sandwichs en nid d'abeilles ([1], [2]). Généralement, les modèles homogénéisés classiques sont utilisés afin d'avoir des modèles numériques de taille raisonnable. Cependant, nos travaux précédents ([3], [4]) ont montré que, si le comportement dynamique en membrane des sandwichs peut être correctement représenté par les modèles homogénéisés classiques dans une large gamme de fréquences, les mêmes modèles ne permettent malheureusement pas de bien décrire le comportement en flexion dans le domaine de hautes fréquences (HF). En effet, la couche en nid d'abeilles joue un rôle important dans le comportement en flexion du sandwich, lorsque les longueurs d'ondes impliquées deviennent aussi petites que les longueurs caractéristiques des cellules du nid d'abeilles, sa microstructure interagit avec les ondes et ces effets d'interaction ne peuvent plus être négligés, alors qu'ils ne sont pas pris en compte par des modèles homogénéisés classiques.

Ici, nous nous intéressons à l'analyse théorique de la propagation d'ondes HF dans une plaque mince en nid d'abeilles, qui possède une structure cellulaire hexagonale régulière en dupliquant une cellule primitive composée de trois plaques minces. Il a été prouvé que la propagation d'ondes dans un tel milieu est déterminée par sa microstructure périodique qui joue un rôle de filtrage en fréquence et dans l'espace ([5], [6]). Dans cette contribution, nous considérons successivement deux types de milieux périodiques : 1) un réseau unidimensionnel (1D) composé de barres et 2) un réseau bidimensionnel (2D) composé de poutres, formant un milieu similaire à celui du type nid d'abeilles avec des cellules hexagonales régulières. Nous appliquons la théorie des ondes de Bloch à ces deux milieux périodiques afin d'y analyser théoriquement et numériquement des phénomènes de propagation des ondes HF.

## **2 Transformation des ondes de Bloch**

Selon la théorie des ondes de Bloch, une fonction non périodique  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  définie dans un milieu

périodique peut être transformée en une fonction périodique de Bloch  $\mathbf{V}^B(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ , qui possède la même périodicité que le milieu de manière suivante :

$$\mathbf{V}^B(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{n}_i \lambda_i \mathbf{e}_i) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{n}_i \lambda_i \mathbf{e}_i)} \quad (1)$$

où  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  est le nombre de cellules dans l'espace,  $n_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) étant le nombre de cellule dans la direction spatiale  $\mathbf{e}_i$ ,  $\lambda_i$  est la période dans la direction  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde. Et la transformation inverse des ondes de Bloch s'écrit comme suit :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\text{Volume}(Q_0^*)} \int_{Q_0^*} \mathbf{V}^B(\mathbf{x}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (2)$$

Où  $Q_0$  est la cellule primitive et  $Q_0^*$  est la première zone de Brillouin, qui est en fait la cellule réciproque de  $Q_0$  ([7]). Grâce aux transformées des ondes de Bloch, on peut décomposer une fonction non périodique sur une base composées de modes périodiques, appelés des fonctions de Bloch. Par conséquent, on a seulement besoin de considérer une cellule primitive en recherchant des valeurs propres et des modes propres du système périodique ([8]). Ainsi, on peut obtenir des informations importantes, comme les bandes de la fréquence passante ou bloquante et l'amplitude des ondes diffractées par les cellules périodiques. Ensuite, on peut chercher à développer une solution non périodique en utilisant cette base de modes de Bloch et obtenir ainsi des modèles numériques

La théorie des ondes de Bloch a été d'abord développée dans le domaine de la mécanique quantique pour étudier des réseaux périodiques de particules. Le modèle le plus simple est celui de Kronig-Penney défini pour un réseau périodique 1D infini composé d'un même type de particule, qui consiste à résoudre l'équation de Schrödinger ([9]).

### 3 Propagation d'ondes élastiques dans un réseau périodique 1D composé de barres

Maintenant, nous appliquons la théorie des ondes de Bloch à un milieu continu élastique. On remarque que dans un milieu continu élastique, la périodicité est due à la variation dans la géométrie et le comportement de matériau.

#### 3.1 Milieu périodique 1D et modes de Bloch

On s'intéresse d'abord à un milieu périodique 1D infini dont la cellule de construction de base est composée de deux barres de longueur  $l_1$  et  $l_2$ , la jonction entre deux barres étant considérée comme parfaite (FIG. 1). Le module d'Young et la masse volumique des deux barres sont respectivement  $(E_1, \rho_1)$  et  $(E_2, \rho_2)$ . La période de ce milieu périodique est donc  $\lambda = l_1 + l_2$ .

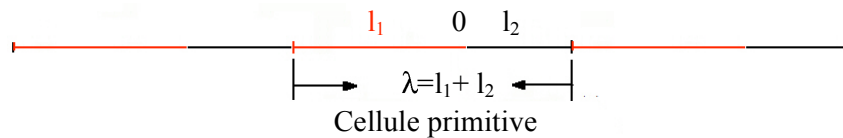


FIG. 1 – Milieu périodique 1D infini composé de barres élastiques

Considérons l'équation d'équilibre modale suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[ E_i \frac{dU(x)}{dx} \right] = -\rho_i \omega^2 U(x), \quad (i=1, 2) \quad (3)$$

avec  $\omega$  la fréquence propre et  $U(x)$  le mode propre du système. Après l'application de la transformation des ondes de Bloch à l'équation (3), on obtient l'équation d'équilibre modale de Bloch :

$$E_i \frac{\partial^2 U^B(x, k)}{\partial x^2} - 2ikE_i \frac{\partial U^B(x, k)}{\partial x} - E_i k^2 U^B(x, k) = -\rho_i \omega^2 U^B(x, k) \quad (4)$$

Cette équation est définie uniquement dans la cellule primitive  $Q_0$ , avec  $U^B(x, k)$  la fonction de Bloch périodique de  $U(x)$ , qui est le mode propre (de Bloch) de (4) correspondant à la valeur propre  $\omega$ , et  $k$  le vecteur d'onde de Bloch, dont les valeurs sont limitées dans la première zone de Brillouin  $Q_0^*$ . La résolution du problème de valeur propre (4) se fait par un calcul de  $(\omega, U^B(x, k))$  pour tout vecteur d'onde  $k$  appartenant à  $Q_0^*$ .

### 3.2 Relation de dispersion

Dans chacune des deux barres élastiques, les solutions générales de l'équation (4) s'écrivent :

$$U_i^B(x, k) = a_i e^{i\left(k + \frac{\omega}{c_i}\right)x} + b_i e^{i\left(k - \frac{\omega}{c_i}\right)x} \quad (5)$$

avec  $c_i = \sqrt{E_i / \rho_i}$  ( $i = 1, 2$ ) la vitesse des ondes de traction/compression dans la barre  $i$ . ( $a_i, b_i$ ) ( $i = 1, 2$ ) sont quatre constantes à déterminer. Le vecteur d'onde  $k = k_r + i k_{im}$  ici est une variable complexe. Nous écrivons les conditions d'interface entre les deux barres à l'intérieur de la cellule primitive et les conditions périodiques aux extrémités de celle-ci :

$$\begin{aligned} U^B(0^-) &= U^B(0^+), N^B(0^-) = N^B(0^+) \\ U^B(-l_1) &= U^B(l_2), N^B(-l_1) = N^B(l_2) \end{aligned} \quad (6)$$

où  $N^B = \frac{dU^B}{dx} - ikU^B$  est le vecteur de contrainte 1D de Bloch. Ainsi, nous obtenons un système linéaire à résoudre pour ( $a_i, b_i$ ). La condition pour obtenir des solutions non nulles est que le discriminant du système s'annule, ce qui donne finalement la relation de dispersion suivante entre  $k$  et  $\omega$  :

$$\cos(k\lambda) = \cos(\omega T_1) \cos(\omega T_2) - \left(\frac{Z_1}{2Z_2} + \frac{Z_2}{2Z_1}\right) \sin(\omega T_1) \sin(\omega T_2) \quad (7)$$

avec  $Z_i = \rho_i c_i$  l'impédance acoustique,  $T_i = l_i / c_i$  le temps pour que l'onde traverse la barre  $i$ .

Selon l'équation (7), pour chaque  $\omega$  donné, qui est réel,  $k = k_r + i k_{im}$  peut être réel, imaginaire pur ou complexe, ce qui donne :

$$U_i^B(x, k) = a_i e^{i\left(k_r + \frac{\omega}{c_i}\right)x} e^{-k_{im}x} + b_i e^{i\left(k_r - \frac{\omega}{c_i}\right)x} e^{-k_{im}x} \quad (8)$$

Quand  $k$  est réel ( $k_{im} = 0$ ), on a un mode propagatif qui se propage de cellule en cellule sans perdre d'amplitude. Quand  $k$  est imaginaire pur ou complexe ( $k_{im} \neq 0$ ), on obtient un mode évanescent qui est atténué très rapidement sur l'interface des deux cellules adjacentes, l'énergie échangée entre les cellules périodiques est très faible voire égale à zéro pour un tel mode. Par conséquent, pour les intervalles de fréquences  $\omega$ , qui donnent un vecteur d'onde de Bloch  $k$  réel, on parle de bandes de fréquence passantes et, pour ceux qui donnent des  $k$  imaginaires purs ou complexes, on parle de bandes de fréquence bloquantes. On constate que la structure des bandes de fréquence dépend de l'impédance acoustique  $Z_i$  et le temps de parcours d'onde  $T_i$  de chaque barre élastique (7). La FIG. 2 montre les bandes passantes et bloquantes du système périodique 1D de barres élastiques étudié, où pour les bandes passantes, la valeur de  $k$  est tracée, alors que pour les bandes bloquantes, seule  $k_{im}$  la

partie imaginaire de  $k$  est tracée. Le cas particulier où  $Z_1/Z_2 = 1$  donne une solution réelle de  $k = \omega/c_{\text{moy}}$ , où  $c_{\text{moy}} = (l_1 + l_2)/(T_1 + T_2)$  est la vitesse moyenne de propagation du milieu, on a donc un mode qui est toujours propagatif (FIG. 2(B)).

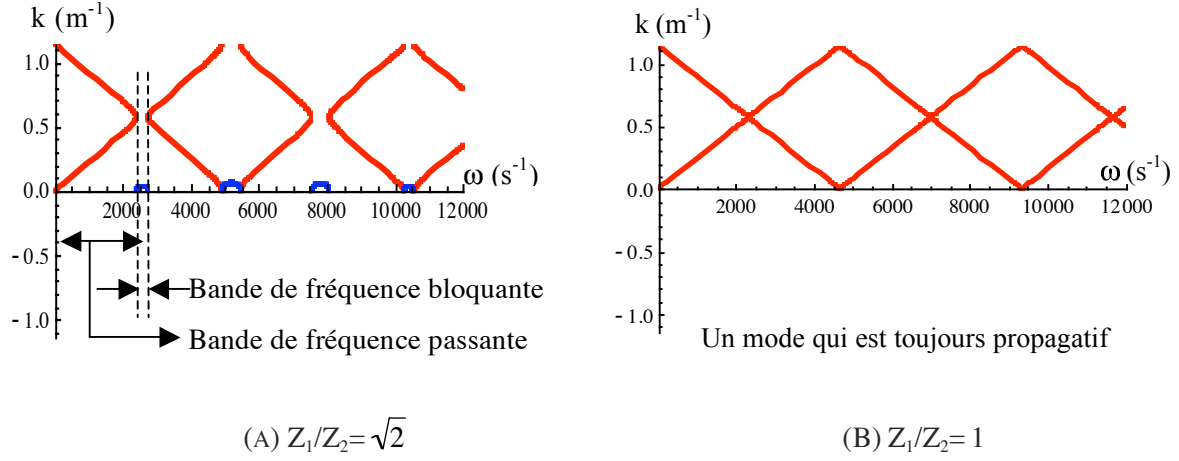


FIG. 2 – Bandes de fréquence passantes et bloquantes pour un réseau 1D composé de barres

La FIG. 3 montre l'influence du rapport d'impédance  $Z_1/Z_2$  sur les bandes bloquantes en ne traçant que la partie imaginaire de  $k$  complexe. Nous constatons que, plus ce rapport s'éloigne de 1, plus les bandes bloquantes sont larges et plus l'atténuation est forte. Par contre, lorsque  $Z_1/Z_2$  est fixé, la différence entre  $T_1$  et  $T_2$  a peu d'effets sur les bandes passantes et bloquantes.

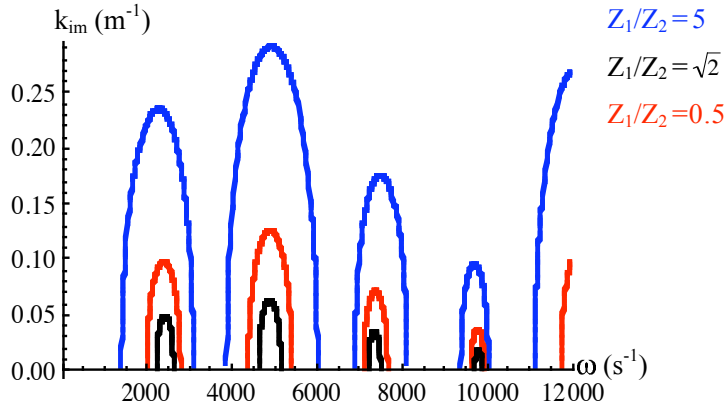


FIG. 3 – Influence du rapport d'impédance acoustique  $Z_1/Z_2$  sur les bandes de fréquence bloquantes

### 3.3 Ondes diffractées dues à la périodicité de cellules

Nous considérons maintenant des ondes diffractées dues à la périodicité de cellules en injectant une onde incidente plane  $u_0(x, t)$  dans le milieu périodique 1D. L'onde  $u(x, t)$  se propageant dans le milieu peut être décomposée en deux parties :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \\ u(x, t) &= \left[ e^{ik_0 x} + u_d(x) \right] e^{-i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (9)$$

où  $k_0$  et  $\omega_0$  sont le vecteur d'onde et la fréquence angulaire de l'onde incidente. On cherche donc à calculer  $u_d(x)$  l'onde diffractée. Après la transformation de Bloch, on peut écrire l'onde diffractée de

Bloch  $u_d^B(x, k)$ , pour la fréquence  $\omega_0$ , comme une combinaison linéaire des modes de Bloch du milieu périodique qui sont déjà calculés, on l'injecte dans l'équation d'équilibre modale pour calculer les coefficients de la combinaison. Puis, on utilise la transformation inverse de Bloch pour obtenir l'onde diffractée. La FIG. 4 montre le rapport entre l'amplitude de  $u_d$  et  $u_0$ . On constate une amplification de l'onde diffractée à cause de la périodicité du milieu mais cette amplification n'est pas sensible à la fréquence  $f_0 = \omega_0/2\pi$  de l'onde incidente. En effet, deux fréquences  $f_0$  sont considérées ici, pour la première la longueur d'onde  $\lambda_0$  de l'onde incidente est 0.3 fois la taille d'une cellule, alors que pour la deuxième valeur de fréquence, elle est très petite par rapport à la taille de cellule.

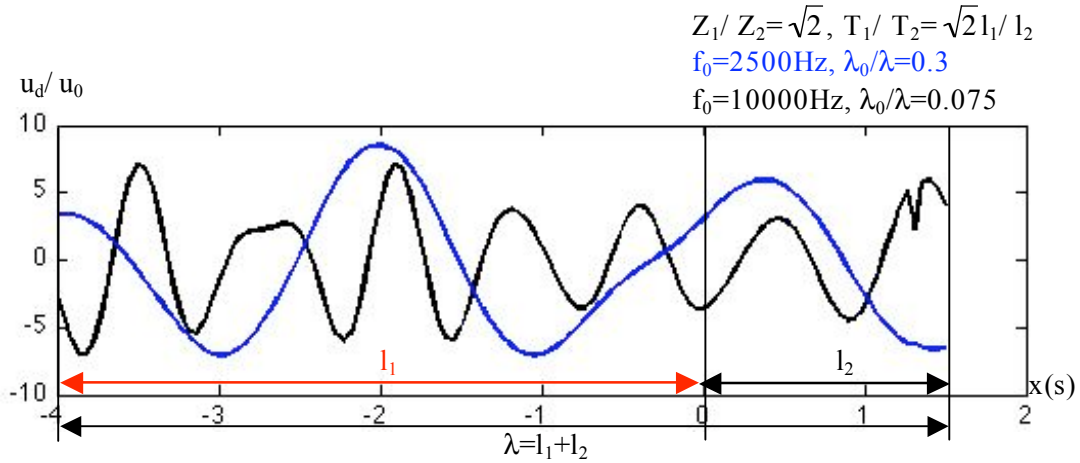


FIG. 4 – Phénomène d'amplification d'ondes diffractées dû à la périodicité de cellules

## 4 Propagation d'ondes élastiques dans un réseau périodique 2D composé de poutres en nid d'abeilles

### 4.1 Milieu périodique 2D et modes de Bloch

Le deuxième milieu analysé ici est un milieu périodique 2D infini dont la cellule de construction de base est une cellule hexagonale régulière composée de trois poutres mince de Timoshenko de longueur  $s$  (FIG. 5). La jonction entre trois poutres est considérée comme parfaite ([10]). Les constantes de Lamé et la masse volumique des trois poutres sont  $(\lambda, \mu, \rho)$ . l'épaisseur  $H_1 = 2H_0$  de la poutre (1) est deux fois plus que  $H_0$  celle des deux autres (2) et (3). Chaque poutre est d'abord considérée dans un système de coordonnées locales  $(s, n)$ , dans lequel l'axe  $s$  est parallèle à la poutre et l'axe  $n$  est perpendiculaire à la poutre. Puis le modèle complet du milieu périodique est considéré et résolu dans un système de coordonnées global  $(x, y)$ .

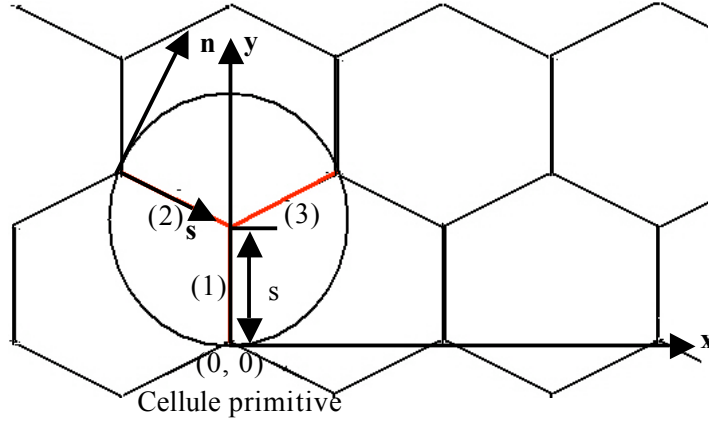


FIG. 5 – Milieu périodique 2D infini composé de poutres en nid d'abeille

La cinématique de Timoshenko pour des poutres épaisses est utilisée dans ce travail, ce qui permet d'exprimer le déplacement  $\mathbf{u}(s,t)$  de chaque poutre comme suit :

$$\mathbf{u}(s,t) = u_{01}(s)\mathbf{s} + u_{02}(s)\mathbf{n} + t u_{13}(s)\mathbf{s} \quad (10)$$

avec  $u_{01}(s)$  et  $u_{02}(s)$  les déplacements de la ligne moyenne et  $u_{13}(s)$  la rotation des fibres. Les équations d'équilibres modales de Bloch sont

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{01}^B}{ds^2} - 2i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}) \frac{dU_{01}^B}{ds} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 U_{01}^B &= -\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} U_{01}^B \\ \frac{d^2 U_{02}^B}{ds^2} - 2i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}) \frac{dU_{02}^B}{ds} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 U_{02}^B + \frac{dU_{13}^B}{ds} &= -\frac{\rho\omega^2}{\mu} U_{02}^B, \quad (m=0, 1) \quad (11) \\ \frac{d^2 U_{13}^B}{ds^2} - 2i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}) \frac{dU_{13}^B}{ds} - \left[ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 + \frac{12\mu}{(\lambda + 2\mu)H_m^2} \right] U_{13}^B - \frac{12\mu}{(\lambda + 2\mu)H_m^2} \frac{dU_{02}^B}{ds} &= -\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} U_{13}^B \end{aligned}$$

avec  $U_{01}^B$ ,  $U_{02}^B$  et  $U_{13}^B$  les modes de Bloch,  $\omega$  la valeur propre du système et  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})$  la projection du vecteur d'onde de Bloch  $\mathbf{k}$  sur l'axe  $\mathbf{s}$ . Pour tout vecteur  $\mathbf{k}$  dans la première zone de Brillouin, qui est également une cellule hexagonale, on peut chercher ainsi à calculer les valeurs propres  $\omega$  et les modes de Bloch correspondants.

## 4.2 Relation de dispersion

Pour obtenir la relation de dispersion, on procède comme dans le cas précédent du milieu périodique 1D en écrivant les conditions d'interface entre les trois poutres à l'intérieur de la cellule primitive et les conditions périodiques sur sa frontière, et obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} U_{01}^{B(1)} + U_{02}^{B(1)} &= U_{01}^{B(2)} + U_{02}^{B(2)} = U_{01}^{B(3)} + U_{02}^{B(3)} \\ U_{13}^{B(1)} &= U_{13}^{B(2)} = U_{13}^{B(3)} \\ N^{B(1)} + Q^{B(1)} + N^{B(2)} + Q^{B(2)} + N^{B(3)} + Q^{B(3)} &= 0 \\ M^{B(1)} &= M^{B(2)} = M^{B(3)} \end{aligned} \quad (12)$$

avec  $\mathbf{N}^B$  est le vecteur d'effort normal de traction-compression de Bloch,  $\mathbf{Q}^B$  le vecteur d'effort tranchant de Bloch et  $\mathbf{M}^B$  le vecteur de moment de flexion de Bloch. Comme dans le cas 1D, on considère le déterminant du système (12) pour avoir des solutions non nulles, ce qui nous permet d'obtenir une relation de dispersion entre  $\omega$  et  $\mathbf{k}$ , Mais on ne peut plus expliciter cette relation comme dans le cas 1D. On peut néanmoins analyser numériquement cette relation de dispersion et la FIG. 6 donner les premières bandes de fréquence passantes et bloquantes, où on a tracé les solutions réelles de  $\mathbf{k}$  qui définissent les bandes passantes, entre ces deux bandes, il s'agit de la première bande bloquante.

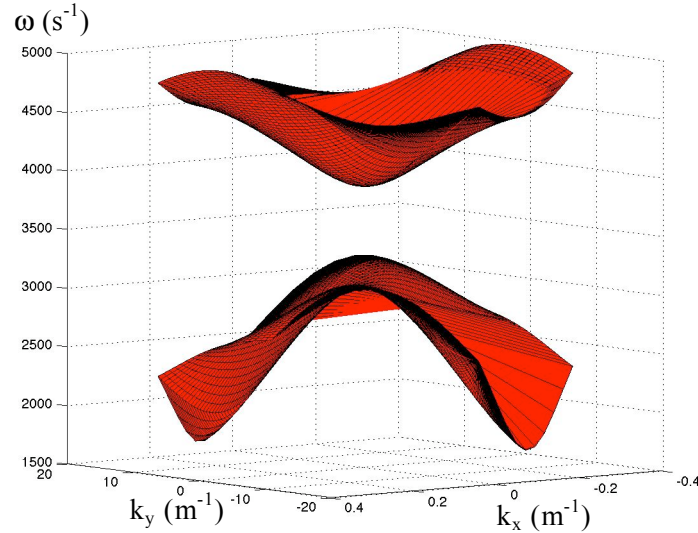


FIG. 6 – Premières bandes de fréquence passantes et bloquantes pour le milieu périodique 2D composé de poutres

## 5 Conclusions

Les modèles homogénéisés classiques ne peuvent pas décrire correctement le comportement en flexion dans le domaine HF des coques sandwich en nid d'abeille. Il est nécessaire d'étudier les effets des microstructures du milieu périodique en nid d'abeille sur la propagation des ondes HF. Dans ce travail on a proposé d'appliquer la théorie des ondes de Bloch à un tel milieu. On a d'abord développé et validé notre approche dans un milieu périodique 1D composé de barres élastiques. La relation de dispersion entre le vecteur d'onde de Bloch  $k$  et la fréquence propre  $\omega$  a été obtenue analytiquement et numériquement. Pour ce milieu, on a également calculé les ondes diffractées dues à la périodicité de cellules en considérant seulement une seule cellule. Le phénomène d'amplification dû à la périodicité du milieu a été observé. Ensuite, on a appliqué notre approche à un milieu périodique 2D composé de poutres en nid d'abeille. Les premiers calculs numériques ont permis d'obtenir les bandes de fréquences passantes et bloquantes et les modes de Bloch.

## Références

- [1] L. J. Gibson, M. F. Ashby. *Cellular solids: Structure and properties*, International Series on Materials Science & Technology, Pergamon Press, Oxford, Great Britain, 1988.
- [2] W. S. Burton, A. K. Noor. *Assessment of continuum models for sandwich panel honeycomb cores*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 45, page341-page360, 1997.
- [3] A. Grédé, B. Tie, D. Aubry. *Elastic wave propagation in hexagonal honeycomb sandwich panels: Physical understanding and numerical modeling*, Journal de Physique, vol. 134, page507-page514, 2006.
- [4] B. Tie, D. Aubry, A. Grédé, J. Philippon, B. -Y. Tian, Ph. Roux, B. Troclet. *Predictive numerical modeling of pyroshock propagation in payload adaptors of space launcher*, 11th ECSSMMT European Conference on Spacecraft Structures, Materials & Mechanical Testing (CNES ESA DLR), Toulouse, France, 2009.
- [5] D. J. Mead. *A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiply coupling*, Journal of Sound and Vibration, vol. 27, page235-page260, 1973.
- [6] R. S. Langley, N. S. Bardell, H. M. Ruivo. *The response of two-dimensional periodic structures to harmonic point loading: a theoretical and experimental study of a beam grillage*, Journal of Sound and Vibration, vol. 207, page521-page535, 1997.
- [7] L. Brillouin. *Wave propagation in the periodic structures*, Dover Publications, New York, 1946.
- [8] A. Srikantha, J. Woodhouse, N. A. Fleck. *Wave propagation in two-dimensional periodic lattice*, J. Acoust. Soc. Am, vol. 119(4), page1995-page2005, 2006.

- [9] P. Atkins, *R. Friedman*. Molecular quantum mechanics, Oxford university press, New York, 2005.
- [10] C. Davini, F. Ongaro. *A Homogenized Model for Honeycomb Cellular Materials*. Journal of Elasticity, Published online, 2011.