

Approche hybride Laplace-temps pour les calculs dynamiques d'interaction

A. Nieto Ferro^{1,2}, D. Clouteau¹, N. Greffet², G. Devésa²

¹ LMSSMat, École Centrale Paris, France, {alex.nieto-ferro,didier.clouteau}@ecp.fr

² AMA, Électricité de France R&D, France, {nicolas.greffet,georges.devesa}@edf.fr

Résumé — La résolution des problèmes dynamiques d'interaction entre deux sous-domaines dont l'un, linéaire, n'est connu que par une impédance de bord, entraîne lorsqu'on cherche à prendre en compte des non-linéarités, l'apparition d'intégrales de convolution dans le domaine temporel. Dans ce travail, on présente une approche pour les évaluer, basée sur la transformée de Laplace de l'impédance. Une analyse plus détaillée est ensuite poursuivie sur un cas pratique d'interaction sol-structure.

Mots clés — fonction d'impédance, méthode de quadratures de convolution, interaction sol-structure.

1 Introduction générale

Les problèmes dynamiques d'interaction sont souvent résolus en utilisant une technique de sous-structuration où le système complet est décomposé en deux ou plusieurs sous-domaines. Considérons le cas particulier de deux sous-domaines séparés par une interface Γ : l'un noté Ω_1 , qui est non-borné et qui présente un comportement linéaire et l'autre, Ω_2 , borné et éventuellement non-linéaire. Considérons aussi que les effets d'interaction entre les deux sous-domaines sont représentés sur l'interface par une impédance définie dans le domaine de Fourier ou de Laplace. Dans ce cadre, on résout le problème global en temps dans Ω_2 en prenant en compte les effets du sous-domaine Ω_1 au moyen d'une force externe appliquée sur la frontière. Cette force d'interaction, qui met en jeu la fonction impédance dans le domaine temporel $Z(t)$, revient à calculer une intégrale de convolution avec le champ inconnu $u(t)$:

$$(Z * u)(t) = \int_0^t Z(t - \tau)u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

où $Z(t)$ et $u(t)$ sont deux fonctions causales.

Pour ce faire, la littérature propose la méthode temps-fréquence [1] ou la méthode de variables cachées [2] qui, en utilisant la fonction impédance ou son inverse [3, 4], reposent sur une formulation dans le domaine fréquentiel. On trouve également des formulations de la fonction impédance dans le domaine de Laplace [5, 6, 7] qui peut se combiner à des méthodes de quadratures de convolution [8].

En l'occurrence, on s'intéresse à une fonction impédance $\hat{Z}(s) = \mathcal{L}(Z(t))$ définie dans le domaine de Laplace, analytique dans le demi-plan complexe $\Re(s) > \sigma_0$ et à croissance lente pour s grand :

$$|\hat{Z}(s)| \leq M |s|^\mu \quad (2)$$

avec $M, \mu \in \mathbb{R}$. Pour des problèmes d'interaction dynamique, on peut alors factoriser cette partie polynomiale en faisant apparaître des termes d'inertie, d'amortissement et de raideur.

2 Méthode

On cherche à résoudre une intégrale de convolution entre deux fonctions causales telle que donnée dans l'équation 1. Considérons dans la suite toutes les grandeurs déjà discrétisées dans l'espace.

Soit $\hat{Z}(s) = \hat{P}(s)\hat{Z}_m(s)$ avec $\hat{P}(s)$ une fonction polynomiale en s à valeurs matricielles de degré $m \geq \mu$. Dans ce cadre, on considère le cas où le noyau de convolution $Z(t)$ est défini au sens des distributions comme une somme de dérivés d'ordre p ($0 \leq p \leq m$) d'une fonction continue et exponentiellement

bornée $\mathbf{Z}_m(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\hat{\mathbf{Z}}_m(s) \right)$, ponderées par des coefficients matriciels $\{\Lambda_p\}_{ij} \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\mathbf{Z}(t) = \left(\sum_{p=0}^m \Lambda_p \frac{d^p}{dt^p} \right) \mathbf{Z}_m(t). \quad (3)$$

Notons que, par le théorème de l'intégral de Cauchy, $\mathbf{Z}_m(t)$ est une fonction causal. On a donc :

$$(\mathbf{Z} * \mathbf{u})(t) = \sum_{p=0}^m \Lambda_p \left(\int_0^t \mathbf{Z}_m(\tau) \mathbf{u}^{(p)}(t - \tau) d\tau \right) \quad (4)$$

avec $\mathbf{u}(t)$ une fonction causale suffisamment différentiable.

En se servant de la méthode de quadratures de Lubich [8], on exprime l'équation 1 sous forme d'une convolution discrète. Si l'on note Δt le pas de temps de discrétisation, celle-ci peut s'écrire aux instants de temps $n\Delta t$ ($0 \leq n\Delta t \leq t$) comme suit :

$$(\mathbf{Z} * \mathbf{u})(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \left(\Psi_1^{n-k+1} \mathbf{u}_k + \dots + \Psi_p^{n-k+1} \mathbf{u}_k^{(p)} + \dots + \Psi_m^{n-k+1} \mathbf{u}_k^{(m)} \right) \quad (5)$$

où $\mathbf{u}_k^{(p)} \approx \mathbf{u}^{(p)}(k\Delta t)$ et les coefficients $\{\Psi_j^i\}$ ($i = 1..n$, $j = 1..m$) contiennent la contribution de $\mathbf{Z}_m(t)$ et des Λ_p .

3 Application aux problèmes dynamiques d'interaction sol-structure

Dans un problème dynamique d'interaction sol-structure, le noyau de l'intégrale de convolution et la fonction $\mathbf{u}(t)$ correspondent respectivement à l'impédance de sol $\hat{\mathbf{Z}}_s(s)$ définie dans le domaine temporel et au déplacement. La partie régulière de cette impédance vérifiant la condition 2 pour $\mu < 0$, la méthode de quadratures de convolution peut être utilisée pour la résolution de l'équation 4, en obtenant ainsi une équation analogue à 5 qui dépend du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

La partie non-régulière de $\hat{\mathbf{Z}}_s(s)$ intervient directement dans le schéma d'intégration en temps lorsqu'on l'exprime sous forme d'une impédance dynamique classique : $\hat{\mathbf{Z}}_{sNonReg}(s) = \mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}$. Cela permet ainsi d'améliorer la convergence de la résolution en choisissant les bons coefficients $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$.

Le but de cette thèse étant le calcul des centrales électriques avec prise en compte des non-linéarités dans le sol, le bâtiment et/ou avec décollement de radier, un cas d'application d'interaction sol-structure est traité pour illustrer les propriétés de cette nouvelle approche.

Références

- [1] G.R. Darbre and J.P. Wolf, *Criterion of stability and implementation issues of hybrid frequency time domain procedure for non-linear dynamic analysis*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 16, 4, 569-581, 1988.
- [2] R. Cottureau, D. Clouteau, C. Soize and S. Cambier, *Probabilistic nonparametric models of impedance matrices. Application to the seismic design of a structure.*, European Journal of Computational Mechanics, 15, 1-3, 131-142, 2006.
- [3] J.P. Wolf, *Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1988.
- [4] S. François and G. Degrande, *A time domain coupled boundary element-finite element method for the dynamic response of structures*, Proceedings of the 12th International Congress on Sound and Vibration, 2005.
- [5] L. Gaul and M. Schanz, *A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 179, 111-123, 1999.
- [6] M. Schanz and H. Antes, *Application of 'Operational Quadrature Methods' in Time Domain Boundary Element Methods*, Meccanica, 32, 3, 179-186, 2006.
- [7] A. Pereira and G. Beer, *Interface dynamic stiffness matrix approach for three-dimensional transient multi-region boundary element analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 80, 1463-1495, 2009.
- [8] C. Lubich, *Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II*, Numerische Mathematik, 52, 129-145, 413-425, 1988.