



**HAL**  
open science

## Approche hybride Laplace-temps pour les calculs dynamiques d'interaction

Alex Nieto Ferro, Didier Clouteau, Nicolas Greffet, Georges Devésá

### ► To cite this version:

Alex Nieto Ferro, Didier Clouteau, Nicolas Greffet, Georges Devésá. Approche hybride Laplace-temps pour les calculs dynamiques d'interaction. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592889

**HAL Id: hal-00592889**

**<https://hal.science/hal-00592889v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Approche hybride Laplace-temps pour les calculs d'interaction dynamique

A. Nieto Ferro<sup>1,2</sup>, D. Clouteau<sup>1</sup>, N. Greffet<sup>2</sup>, G. Devésá<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMSSMat, École Centrale Paris, France, {alex.nieto-ferro,didier.clouteau}@ecp.fr

<sup>2</sup> AMA, Électricité de France R&D, France, {nicolas.greffet,georges.devesa}@edf.fr

**Résumé** — La résolution des problèmes d'interaction dynamique entre deux sous-domaines dont l'un, linéaire, n'est connu que par une impédance de bord, entraîne lorsqu'on cherche à prendre en compte des non-linéarités, l'apparition d'intégrales de convolution dans le domaine temporel. Dans ce travail, on présente une approche pour les évaluer, basée sur la transformée de Laplace de l'impédance. Une analyse plus détaillée est ensuite poursuivie sur un cas pratique d'interaction sol-structure.

**Mots clés** — fonction d'impédance, méthode de quadratures de convolution, interaction sol-structure.

### 1 Introduction générale

Les problèmes dynamiques d'interaction sont souvent résolus en utilisant une technique de sous-structuration où le système complet est décomposé en deux ou plusieurs sous-domaines. Considérons le cas particulier de deux sous-domaines séparés par une interface  $\Gamma$  : l'un noté  $\Omega_1$ , qui est non-borné et qui présente un comportement linéaire et l'autre,  $\Omega_2$ , borné et éventuellement non-linéaire. Les effets d'interaction entre les deux sous-domaines peuvent être représentés sur l'interface par une impédance que nous supposons définie dans le domaine de Fourier ou de Laplace. Dans ce cadre, on résout le problème global en temps dans  $\Omega_2$  en prenant en compte les effets du sous-domaine  $\Omega_1$  au moyen d'une force externe appliquée sur la frontière. Cette force d'interaction, qui met en jeu la fonction impédance dans le domaine temporel  $Z(t)$ , revient à calculer une intégrale de convolution avec le champ inconnu  $u(t)$ , que l'on notera  $(Z * u)(t)$ .

Le problème de l'évaluation de ces produits de convolution est souvent rencontré par exemple, lors de calculs d'interaction fluide-structure ou d'interaction sol-structure. Pour ces derniers, la littérature propose la méthode temps-fréquence [1] ou la méthode de variables cachées [2] qui, en utilisant la fonction impédance ou son inverse [3, 4], reposent sur une formulation dans le domaine fréquentiel. On trouve également des formulations de la fonction impédance dans le domaine de Laplace [5, 6, 7] qui peut se combiner à des méthodes de quadratures de convolution [8].

Ces intégrales de convolution étant homogènes à des efforts, on trouve également dans la littérature des méthodes [9] qui cherchent à les calculer en faisant apparaître les termes d'inertie, d'amortissement et de raideur qui caractérisent les problèmes dynamiques.

### 2 Méthode

De manière générale, la résolution de ce problème passe par l'évaluation d'une intégrale de convolution entre deux fonctions causales définie comme :

$$(Z * u)(t) = \int_0^t Z(t - \tau)u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

L'approche présentée dans cet article est essentiellement une extension des travaux effectués par [10, 11]. Vu qu'elle repose sur des méthodes de quadrature de convolution, on supposera que la transformée de Laplace du noyau de convolution  $\hat{Z}(s) = \mathcal{L}(Z)$  est analytique dans le demi-plan complexe  $\Re(s) > \sigma_0$  et à croissance lente pour  $|s|$  grand :

$$|\hat{Z}(s)| \leq D |s|^\mu \quad (2)$$

avec  $D, \mu \in \mathbb{R}$ . Nous considérons dans la suite toutes les grandeurs déjà discrétisées dans l'espace.

Soit  $\hat{Z}(s) = \hat{Z}_m(s)\hat{P}(s)$  avec  $\hat{P}(s)$  une fonction polynomiale en  $s$  à valeurs matricielles de degré  $m \geq \mu$ . Dans ce cadre, le noyau de convolution  $Z(t)$  défini au sens des distributions peut s'exprimer sous la forme d'un opérateur de différentiation d'ordre  $p$  ( $0 \leq p \leq m$ ) comme :

$$Z(t) = \sum_{p=0}^m Z_m(t) \Lambda_p \frac{d^p}{dt^p}(\cdot) \quad (3)$$

où  $Z_m(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{Z}_m(s))$  est pondérée par des coefficients matriciels  $\{\Lambda_p\}_{ij} \in \mathbb{R}$ . Notons que, par le théorème de l'intégral de Cauchy,  $Z_m(t)$  est une fonction causal. On a donc :

$$(Z * u)(t) = \sum_{p=0}^m \left( \int_0^t Z_m(\tau) \Lambda_p u^{(p)}(t - \tau) d\tau \right) \quad (4)$$

avec  $u(t)$  une fonction causale suffisamment différentiable.

En se servant de la méthode de quadratures de Lubich [8], on exprime l'équation 4 sous forme d'une convolution discrète. Si l'on note  $\Delta t$  le pas de temps de discrétisation, celle-ci peut s'écrire aux instants de temps  $n\Delta t$  ( $0 \leq n\Delta t \leq t$ ) comme suit :

$$(Z * u)(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \left( \Psi_1^{n-k+1} u_k + \dots + \Psi_p^{n-k+1} u_k^{(p)} + \dots + \Psi_m^{n-k+1} u_k^{(m)} \right) \quad (5)$$

où  $u_k^{(p)} \approx u^{(p)}(k\Delta t)$  et les coefficients  $\{\Psi_j^i\}$  ( $i = 1..n, j = 1..m$ ) contiennent la contribution de  $Z_m(t)$  et des  $\Lambda_p$ .

### 3 Application aux problèmes dynamiques d'interaction sol-structure

Le but de cet travail étant les calculs dynamiques d'interaction sol-structure en temps pour des centrales électriques, avec prise en compte la modélisation des non-linéarités globales ou localisées, on particularisera la méthode de la section précédente à ce domaine. Pour ce type de problèmes dynamiques, le sous-domaine  $\Omega_1$  représente la partie de sol non-bornée ayant un comportement linéaire et  $\Omega_2$ , le système sol non-linéaire plus bâtiment. L'impédance de bord reste définie sur l'interface  $\Gamma$  entre les deux sous-domaines. Cet opérateur peut s'écrire, pour des problèmes dynamiques, sous la forme [2] :

$$\hat{Z}(s) = M_\Gamma s^2 + C_\Gamma s + K_\Gamma + \hat{Z}_{reg}(s) \quad (6)$$

où  $K_\Gamma, C_\Gamma$  and  $M_\Gamma$  sont les matrices associées aux effets d'inertie, d'amortissement et de raideur du sol et où  $\hat{Z}_{reg}(s)$  correspond à une fonction régulière qui s'annule pour des valeurs de  $|s|$  suffisamment grandes. On peut donc conclure que cette impédance vérifie la condition énoncée dans l'équation 2 de la section précédente.

Dans ce cadre, la méthode de quadratures de convolution présentée par Lubich [8] peut être appliquée pour l'évaluation numérique d'une intégrale de convolution telle que donnée dans l'équation 1, où on considérera  $Z(t)$  la transformée de Laplace inverse de l'impédance de sol  $\hat{Z}(s)$  et  $u(t)$ , le champ déplacement. Cette méthode permet d'approcher 1 par une convolution discrète (avec un pas de temps  $\Delta t > 0$ ) :

$$(Z * u)(n\Delta t) = \sum_{0 \leq n\Delta t \leq t} \Phi_k u(t - n\Delta t), \quad t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots \quad (7)$$

où les coefficients  $\Phi_k$  correspondent aux poids de la série de puissances suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k \zeta^k = \hat{Z}(s_{\Delta t}) \quad (8)$$

Les points  $s_{\Delta t}$  où l'impédance dynamique de sol est évaluée sont données, dans le cadre de ce travail, par une fonction rationnelle liée à une méthode linéaire multi-pas d'ordre  $p$  qui vérifie des fortes conditions de A-stabilité. En l'occurrence, on va considérer que  $s_{\Delta t} = \frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}$  avec  $\delta(\zeta) = \frac{3}{2} - 2\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2$ .

Néanmoins, étant l'expression 1 homogène à une force, il paraît judicieux d'exprimer cette convolution non seulement en termes de déplacement, mais aussi en fonction des accélérations et des vitesses. L'approche proposée s'inscrit dans cette optique et repose sur la factorisation de la partie polynomiale  $\hat{P}(s)$  de l'impédance. On considère donc :

$$\hat{Z}(s) = \hat{Z}_m(s)\hat{P}(s) = \hat{Z}_m(s) \left( \tilde{M}_\Gamma s^2 + \tilde{C}_\Gamma s + \tilde{K}_\Gamma \right) \quad (9)$$

où  $\tilde{K}_\Gamma$ ,  $\tilde{C}_\Gamma$  et  $\tilde{M}_\Gamma$  sont respectivement les estimateurs des matrices  $K_\Gamma$ ,  $C_\Gamma$  et  $M_\Gamma$  définies dans l'équation 6, qui correspondent en même temps avec les matrices  $\Lambda_p$  ( $0 \leq p \leq 2$ ) définies dans 3.

Dans ce cadre, la convolution peut s'écrire au moyen de la transformée de Laplace inverse comme suit :

$$(\mathbf{Z} * \mathbf{u})(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 + i\mathbb{R}} \hat{Z}_m(s)\hat{P}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) e^{st} ds \quad (10)$$

Par conséquent, la fonction polynomiale  $\hat{P}(s)$  étant vue comme un opérateur de différentiation qui agit sur le champ déplacement, l'équation 1 devient :

$$(\mathbf{Z} * \mathbf{u})(t) = (\mathbf{Z}_m * \tilde{M}_\Gamma \ddot{\mathbf{u}})(t) + (\mathbf{Z}_m * \tilde{C}_\Gamma \dot{\mathbf{u}})(t) + (\mathbf{Z}_m * \tilde{K}_\Gamma \mathbf{u})(t) \quad (11)$$

où les efforts d'interaction (notés dans la suite  $\mathbf{R}_\Gamma(t)$ ) sont calculés par convolutions avec d'accélérations, vitesses et déplacements.

En prenant un pas de temps  $\Delta t > 0$ , l'intégrale de convolution peut être discrétisée à nouveau comme dans l'équation 7 et réécrite comme l'équation 5 pour  $m = 2$  :

$$\mathbf{R}_n = (\mathbf{Z} * \mathbf{u})(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \left( \Psi_2^{n-k+1} \ddot{\mathbf{u}}_k + \Psi_1^{n-k+1} \dot{\mathbf{u}}_k + \Psi_0^{n-k+1} \mathbf{u}_k \right) \quad (12)$$

où les matrices multipliant les vecteurs déplacement  $\mathbf{u}_k$ , vitesse  $\dot{\mathbf{u}}_k$  et accélération  $\ddot{\mathbf{u}}_k$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Psi_0^k &= \mathbf{Z}_m^k \tilde{K}_\Gamma \\ \Psi_1^k &= \mathbf{Z}_m^k \tilde{C}_\Gamma \\ \Psi_2^k &= \mathbf{Z}_m^k \tilde{M}_\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

avec  $\mathbf{Z}_m^k = \mathbf{Z}_m(k\Delta t)$ , des coefficients qui peuvent être calculés à l'aide d'une Transformée de Fourier Rapide (FFT) [12] :

$$\mathbf{Z}_m^k = \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{Z}_m(s_l) e^{-\frac{2\pi i n l}{L}}, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

où les points d'échantillonnage de la transformée de Laplace  $\hat{Z}_m(s)$  correspondent à  $s_l = \frac{\delta(\rho e^{2\pi i l/L})}{\Delta t}$ .

D'un point vue numérique, on s'intéresse au calcul des grandeurs à l'instant  $t = n\Delta t$  qui dépendent des mêmes grandeurs évaluées aux instants précédents. Il semble donc pertinent d'écrire l'équation 12 en séparant l'instant  $n$  :

$$\mathbf{R}_n = \Psi_2^1 \ddot{\mathbf{u}}_n + \Psi_1^1 \dot{\mathbf{u}}_n + \Psi_0^1 \mathbf{u}_n + \mathbf{R}_{\Sigma(n-1)} \quad (15)$$

Ainsi, les  $\Psi_i^1$  ( $i = 0, 1, 2$ ) font référence respectivement à la raideur, l'amortissement et l'inertie instantanés et  $\mathbf{R}_{\Sigma(n-1)}$  dépend uniquement des quantités aux instants précédents :

$$\mathbf{R}_{\Sigma(n-1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \Psi_2^{n-k+1} \ddot{\mathbf{u}}_k + \Psi_1^{n-k+1} \dot{\mathbf{u}}_k + \Psi_0^{n-k+1} \mathbf{u}_k \right) \quad (16)$$

## 4 Schéma d'intégration en temps

On cherche dans la suite à résoudre le problème dynamique linéaire dans le domaine temporel. En particulier, l'équation qui décrit la dynamique de la structure (notée avec l'indice  $b$ , en contraposition aux degrés de liberté de l'interface, notés  $\Gamma$ ) s'énonce dans le cas général :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{bb}(\cdot) & \mathbf{L}_{b\Gamma}(\cdot) \\ (sym.) & \mathbf{L}_{\Gamma\Gamma}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b(t) \\ \mathbf{u}_\Gamma(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_\Gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_b(t) \\ \mathbf{F}_\Gamma(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

où un opérateur de différentiation en temps est introduit  $L_{\alpha\beta}(\cdot) = M_{\alpha\beta}\partial_{tt}(\cdot) + D_{\alpha\beta}\partial_t(\cdot) + K_{\alpha\beta}$  pour  $\alpha, \beta \in \{b, \Gamma\}$ . Le vecteur  $R_\Gamma(t)$ , appelé efforts d'interaction, correspond à une intégrale de convolution et les matrices  $M_{\alpha\beta}$ ,  $C_{\alpha\beta}$  et  $K_{\alpha\beta}$  aux matrices de masse, d'amortissement et de raideur du modèle discrétisé de la structure.

En résolvant le système avec un schéma d'intégration Newmark inconditionnellement stable ( $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ ) en déplacement, l'équation 17 devient :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{F}}_n = \bar{\mathbf{F}}_n - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\Sigma(n-1)} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

où  $\bar{\mathbf{F}}_n$  et  $\bar{K}_{ij}$  sont respectivement l'effort équivalent et la matrice de raideur issus de l'application d'un tel schéma de Newmark. En particulier, le terme  $\bar{K}_{22}$  qui correspond aux degrés de liberté de l'interface  $\Gamma$ , s'écrit :

$$\bar{K}_{22} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (M_{22} + \Psi_2^1) + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (C_{22} + \Psi_1^1) + (K_{22} + \Psi_0^1) \quad (19)$$

Les termes  $\Psi_2^1$ ,  $\Psi_1^1$ ,  $\Psi_0^1$  dans l'équation 19 modifient le conditionnement de la matrice de Newmark  $\bar{K}$  et par conséquent, leur valeurs ont un impact sur la convergence de la solution. Notons que cette matrice reste constant pendant tout le calcul et il est donc nécessaire de la calculer juste la première fois.

## 5 Résultats numériques

Afin de tester la méthode, un modèle numérique d'un système sol-structure est considéré. En l'occurrence, la structure est représentée par une masse  $m_1$  liée à une masse  $m_2$ , plus petite, par un ressort et un amortisseur. Une fondation superficielle modélisée à l'aide d'éléments surfaciques est rattachée à la masse  $m_2$  par une liaison de corps rigide (voir figure 1). L'ensemble de la structure repose sur un sol élastique et homogène modélisé par une méthode d'éléments frontière qui s'applique à l'interface entre le sol et la fondation. C'est aussi au moyen de cette méthode d'éléments frontière qu'on obtient l'impédance de sol dans le domaine de Laplace. Les données concernant les propriétés du système sont fournies dans le tableau 1.

TAB. 1 – Données de la structure et de sol.

Structure	$m_1$	$m_2$	$k$	$c$	$\rho$	E
Sol	$1.8 \cdot 10^{07}$	$3.6 \cdot 10^{06}$	$2.1 \cdot 10^{10}$	$1.23 \cdot 10^{07}$	-	-
	-	-	-	-	$2.1 \cdot 10^{03}$	$1.5 \cdot 10^{09}$

Le chargement, appliqué sur  $m_2$  dans la direction  $z$ , correspond à un séisme d'accélération maximale  $0.3g$ . Les paramètres utilisés pour la méthode de quadratures de convolution ont été repris de la littérature pour des problèmes similaires.

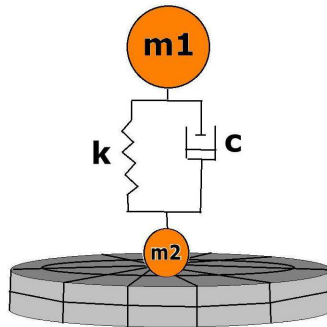


FIG. 1 – Modèle simplifié de structure sur une fondation superficielle.

La figure 2 montre l'accélération absolue subie par la masse  $m_1$  lorsque la méthode de quadratures de convolution est directement appliquée à l'impédance de sol. Dans ce cas, l'erreur quadratique moyen

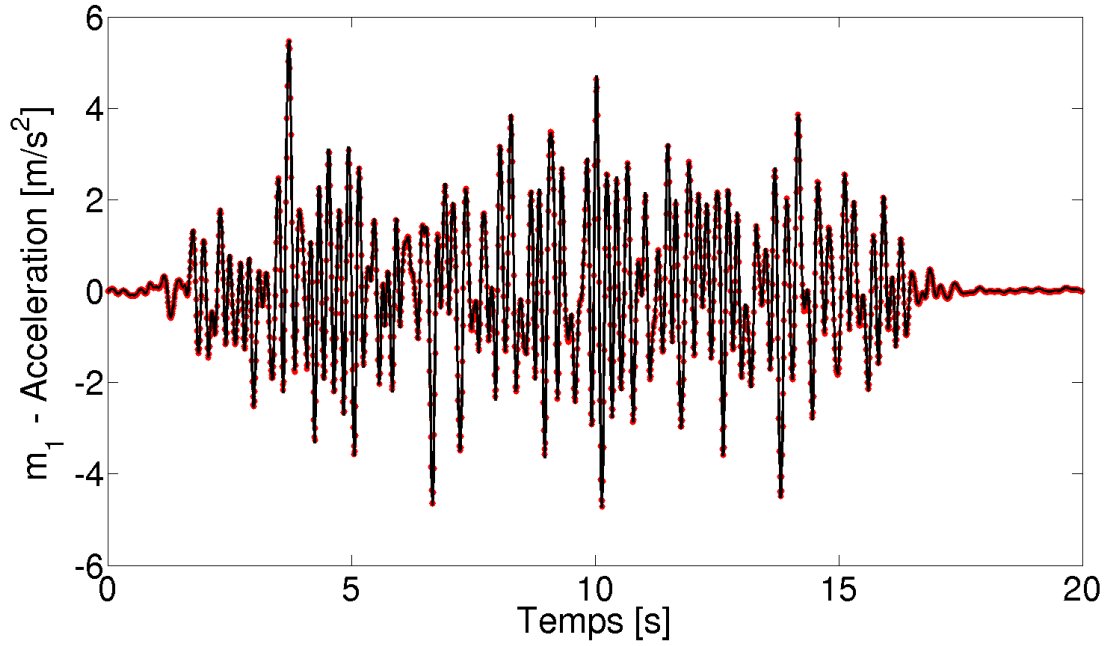


FIG. 2 – Accélération absolue subie par la masse  $m_1$  calculée par l’approche hybride Laplace-temps (ligne noire) et par un calcul de référence (ligne pointillée rouge).

relative à l’accélération maximale sur un intervalle de 20s et par rapport à la solution de référence donnée est de  $\varepsilon = 0.53\%$ . Les résultats s’améliorent si on factorise la partie polynomiale de l’impédance. Le tableau 2 montre les erreurs obtenues pour les cas suivants :

- (i).  $(\mathbf{Z} * \mathbf{u})(t) = (\mathbf{Z}_m * \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}})(t)$  ;
- (ii).  $(\mathbf{Z} * \mathbf{u})(t) = (\mathbf{Z}_m * \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}})(t) + (\mathbf{Z}_m * \mathbf{K}\mathbf{u})(t)$  ;
- (iii).  $(\mathbf{Z} * \mathbf{u})(t) = (\mathbf{Z}_m * \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}})(t) + (\mathbf{Z}_m * \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}})(t) + (\mathbf{Z}_m * \mathbf{K}\mathbf{u})(t)$ .

En ce qui concerne l’estimation des valeurs  $\mathbf{K}_\Gamma$ ,  $\mathbf{C}_\Gamma$  et  $\mathbf{M}_\Gamma$ , elles ont été saisies en cherchant celles minimisant l’erreur quadratique moyen par rapport à une solution de référence.

TAB. 2 – Erreur quadratique moyen relative à l’accélération maximale sur la durée du séisme lorsque des termes (i) d’inertie (ii) d’inertie et de raideur et (iii) d’inertie, de raideur et d’amortissement sont pris en compte pour l’évaluation des efforts d’interaction.

(i)	(ii)	(iii)
1.35%	0.50%	0.43%

Ces résultats montrent effectivement que l’écriture des efforts d’interaction sous la forme de termes d’inertie, amortissement et raideur permet un meilleur pilotage de la convergence vers la solution, ce qui rend le schéma de résolution plus robuste face aux perturbations numériques.

## 6 Conclusions

Dans cet article, une approche hybride Laplace-temps a été présentée pour l’évaluation temporel des efforts d’interaction dynamique qui interviennent lors de la prise en compte du couplage entre deux sous-domaines, en particulier lorsque l’un est linéaire et l’autre non-linéaire.

La méthode, exposée de façon générale, a été ensuite particularisée au cas de problèmes dynamiques d’interaction sol-structure en introduisant la notion de matrice d’impédance de sol. Un cas d’application numérique formulé avec un schéma d’intégration temporel de la famille Newmark a été finalement abordé.

En termes numériques, la méthode s'avère d'abord moins sensible au choix du pas de temps que d'autres méthodes traditionnelles basées sur des passages temps-fréquence. Il profite aussi des avantages offerts par la Transformée de Fourier Rapide, gagnant ainsi en nombre d'opérations à effectuer. Finalement, cette approche rend possible l'écriture des efforts d'interaction au moyen de convolutions avec les déplacements, les vitesses et les accélérations qui d'après les résultats obtenus améliorent la convergence de la solution.

La suite de ces travaux de recherche s'orientent vers l'introduction de non-linéarités et la validation de la méthode sur des modèles plus complexes.

## Références

- [1] G.R. Darbre and J.P. Wolf, *Criterion of stability and implementation issues of hybrid frequency time domain procedure for non-linear dynamic analysis*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 16, 4, 569-581, 1988.
- [2] R. Cottreau, D. Clouteau, C. Soize and S. Cambier, *Probabilistic nonparametric models of impedance matrices. Application to the seismic design of a structure.*, European Journal of Computational Mechanics, 15, 1-3, 131-142, 2006.
- [3] J.P. Wolf, *Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1988.
- [4] S. François and G. Degrande, *A time domain coupled boundary element-finite element method for the dynamic response of structures*, Proceedings of the 12th International Congress on Sound and Vibration, 2005.
- [5] L. Gaul and M. Schanz, *A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 179, 111-123, 1999.
- [6] M. Schanz and H. Antes, *Application of 'Operational Quadrature Methods' in Time Domain Boundary Element Methods*, Meccanica, 32, 3, 179-186, 2006.
- [7] A. Pereira and G. Beer, *Interface dynamic stiffness matrix approach for three-dimensional transient multi-region boundary element analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 80, 1463-1495, 2009.
- [8] C. Lubich, *Convolution quadrature and discretized operational calculus I*, Numerische Mathematik, 52, 129-145, 413-425, 1988.
- [9] J.P. Wolf, *Unit-Impulse response matrix of unbounded medium by infinitesimal finite-element cell method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 122, 251-272, 1995.
- [10] W. Moser and H. Antes and G. Beer, *A Duhamel integral based approach to one-dimensional wave propagation analysis in layered media*, Computational Mechanics, 35, 115-126, 2005.
- [11] W. Moser and H. Antes and G. Beer, *Soil-structure interaction and wave propagation problems in 2D by a Duhamel integral based approach and the convolution quadrature method*, Computational Mechanics, 36, 431-443, 2005.
- [12] C. Lubich, *Convolution quadrature and discretized operational calculus II*, Numerische Mathematik, 52, 413-425, 1988.