

Couplage adaptatif d'un modèle stochastique discret et d'un modèle déterministe continu par la méthode Arlequin

C. Zaccardi^{1,2}, L. Chamoin², R. Cottereau¹, H. Ben Dhia¹

¹ Laboratoire MSSMat UMR8579, Ecole Centrale Paris, CNRS, France, {cedric.zaccardi,regis.cottereau,hachmi.ben-dhia}@ecp.fr

² LMT-Cachan, Ecole Normale Supérieure de Cachan, CNRS, Université Paris 6, France, chamoin@lmt.ens-cachan.fr

Résumé — Dès que l'on s'intéresse à des phénomènes multi-échelles, des quantités localisées, ou des comportements locaux particuliers, l'utilisation de modèles multi-échelles est nécessaire. Dans ce contexte, une méthode de couplage entre un modèle déterministe continu et un modèle stochastique discret par la méthode Arlequin est proposée. Une stratégie d'adaptation de modèle est ensuite utilisée afin de garantir la qualité de grandeurs locales obtenues par ce couplage en suivant une méthode du type *Goal oriented*.

Mots clés — multi-échelle, couplage discret-continu, stochastique, estimation d'erreur, méthode Arlequin, adaptativité.

1 Contexte

Face à l'utilisation actuelle de structures de plus en plus complexes, des simulations prédictives et rapides doivent rendre compte du comportement mécanique. Classiquement, des modèles déterministes relativement grossiers permettent d'appréhender globalement la réponse d'une structure simple à une sollicitation. Cependant, ces modèles deviennent insuffisants dès lors que l'on s'intéresse à des grandeurs localisées, des comportements locaux, ou à des phénomènes de nature multi-échelle. De plus, dans de nombreux cas, un défaut local (fissure, trou, rigidité) altère le comportement de la structure dans un périmètre proche, tandis que le comportement du reste de la structure n'est que faiblement modifié. Dans ce cas, il n'est pas raisonnable d'utiliser le même niveau d'analyse fine dans la structure entière.

Les méthodes multi-échelles répondent particulièrement à ce besoin. On peut distinguer dans la littérature principalement trois familles de méthodes multi-échelles : celles basées sur des techniques d'homogénéisation comme la FE² [1], celles basées sur l'enrichissement du champ (méthode de partition de l'unité [2], GFEM, X-FEM), et enfin celles basées sur la superposition de champs ou de modèles (Méthode Variationnelle Multi-échelles [3, 4], Méthode de projection de Dirichlet Hiérarchique, S-méthode...). Dans cette dernière famille, la méthode Arlequin [5, 6] propose une méthode de superposition volumique de modèles très flexible. On propose ici son utilisation dans le cas d'un couplage d'un modèle déterministe continu et d'un modèle stochastique discret. Afin de garantir la qualité de grandeurs locales obtenues par ce modèle de couplage, une stratégie d'adaptation de modèle est envisagée.

2 Couplage avec la Méthode Arlequin

La méthode Arlequin propose une stratégie multi-modèles basée sur les points clés suivants :

- la superposition des modèles,
- un couplage volumique des deux modèles,
- une distribution de l'énergie mécanique entre les deux modèles dans une zone de couplage.

Cette méthode est appliquée au couplage d'un modèle déterministe continu à un modèle stochastique discret. En considérant un espace probabilisé complet (Θ, \mathcal{T}, P) avec Θ un ensemble d'événements, \mathcal{T} une tribu associé à Θ , et $P : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ une mesure de probabilité, le problème Arlequin s'écrit :

Trouver (u, z, λ) dans $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_c$ tel que :

$$\begin{cases} a_1(u, v) + C(\lambda, v) & = \ell_1(v), & \forall v \in \mathcal{V}_1 \\ a_2(z, w) - C(\lambda, \Pi w) & = \ell_2(w), & \forall w \in \mathcal{V}_2 \\ C(\mu, u - \Pi z) & = 0, & \forall \mu \in \mathcal{V}_c \end{cases} \quad (1)$$

avec $\mathcal{V}_1 = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega_1), v(x) = 0, \forall x \in \Gamma_u\}$, $\mathcal{V}_2 = \{z \in \mathcal{L}^2(\Theta) \times \mathbb{R}^{2N}\}$ et $\mathcal{V}_c = \mathcal{H}^1(\Omega_c)$, où Π désigne un opérateur de projection et où les trois équations (1) décrivent respectivement :

1. l'équilibre du premier système (continu déterministe) défini sur le sous-espace Ω_1 ,
2. l'équilibre du second système (discret stochastique) défini sur le sous-espace Ω_2 ,
3. le couplage du champ de déplacement discret z avec le champ de déplacement continu u dans un sous-domaine Ω_c de $S = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.

L'étude de ce cas s'appuie fortement sur un cas de couplage entre un modèle déterministe continu et un modèle stochastique continu étudié dans [7]. L'opérateur de couplage $C : \mathcal{V}_c \times \mathcal{V}_c \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit :

$$C(\lambda, v) = \mathbb{E} \left[\int_{\Omega_c} (\kappa_0 \lambda v + \kappa_1 \nabla \lambda \cdot \nabla v) d\Omega \right] \quad (2)$$

3 Estimation d'erreur et adaptativité

Pour contrôler la précision d'une telle approche, une méthode du style *Goal oriented* [9, 10] est utilisée pour estimer l'erreur introduite par la modélisation sur l'évaluation d'une quantité d'intérêt (e.g. la moyenne du déplacement d'une particule k dans la zone Ω_2). Pour cela, le problème (1) est réécrit sous la forme :

Trouver (u, z, λ) dans $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_c$ tel que :

$$a((u, z, \lambda), (v, w, \mu)) = \ell(v, w) \quad \forall (v, w, \mu) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_c \quad (3)$$

En s'inspirant de l'idée développée dans [8], une estimation de l'erreur $\eta = q(z^0) - q(z)$ est ensuite proposée afin de développer une méthode d'adaptativité sur ce type de couplage.

Références

- [1] F. Feyel, *Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures*, Comput. Mater. Sci 16, 344-354, 199.
- [2] I. Babuška, J. M. Melenk, *The partition of unity method*, Int. J. Num. Meth. Engrg. 40, 727-758, 1997.
- [3] T. J. R. Hughes, G. R. Feijóo, L. Mazzei, J. Quincy, *The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 166(1-2), 3-24, 1998.
- [4] X. F. Xu, *A multiscale stochastic finite element method on elliptic problems involving uncertainties*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 196(25-28), 2723-2736, 2007.
- [5] H. Ben Dhia, *Multiscale mechanical problems : the Arlequin method*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences - séries IIB 326(12), 899-904, 1998.
- [6] H. Ben Dhia, *Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method*, Int. J. Mult. Comp. Engrg. 6(3), 215-232, 2008.
- [7] R. Cottreau, H. Ben Dhia, D. Clouteau, *Localized modeling of uncertainty in the Arlequin framework*, IUTAM Symposium on the Vibration Analysis of Structures with Uncertainties, R. Langley and A. Belyaev (eds), IUTAM Book-series, 477-488, 2010.
- [8] S. Prudhomme, L. Chamoin, H. Ben Dhia, P. T. Bauman, *An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197, 1887-1901, 2009.
- [9] J.T. Oden, S. Prudhomme, *Goal-oriented error estimation and adaptativity for the finite element method*, Comput. Math. Appl. 41, 735-756, 2001.
- [10] J.T. Oden, S. Prudhomme, *Estimation of modeling error in computational mechanics*, J. Comput. Phys. 182, 496-515, 2002.