HAL
open science

Couplage adaptatif d un modèle stochastique et d un modèle déterministe par la méthode Arlequin

C. Zaccardi, L. Chamoin, Régis Cottereau, H. Ben Dhia

To cite this version:

C. Zaccardi, L. Chamoin, Régis Cottereau, H. Ben Dhia. Couplage adaptatif d un modèle stochastique et d un modèle déterministe par la méthode Arlequin. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592886

HAL Id: hal-00592886

https://hal.science/hal-00592886v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Couplage adaptatif d'un modèle stochastique discret et d'un modèle déterministe continu par la méthode Arlequin

C. Zaccardi[1,2], L. Chamoin[2], R. Cottereau[1], H. Ben Dhia[1]

[1] *Laboratoire MSSMat UMR8579, Ecole Centrale Paris, CNRS, France, {cedric.zaccardi,regis.cottereau,hachmi.ben-dhia}@ecp.fr*
[2] *LMT-Cachan, Ecole Normale Supérieure de Cachan, CNRS, Université Paris 6, France, chamoin@lmt.ens-cachan.fr*

Résumé — Dès que l'on s'intéresse à des phénomènes multi-échelles, des quantités localisées, ou des comportements locaux particuliers, l'utilisation de modèles multi-échelles est nécessaire. Dans ce contexte, une méthode de couplage entre un modèle déterministe continu et un modèle stochastique discret par la méthode Arlequin est proposée. Une stratégie d'adaptation de modèle est ensuite utilisée afin de garantir la qualité de grandeurs locales obtenues par ce couplage en suivant une méthode du type *Goal oriented*.
Mots clés — multi-échelle, couplage discret-continu, stochastique, estimation d'erreur, méthode Arlequin, adaptativité.

1 Contexte

Face à l'utilisation actuelle de structures de plus en plus complexes, des simulations prédictives et rapides doivent rendre compte du comportement mécanique. Classiquement, des modèles déterministes relativement grossiers permettent d'appréhender globalement la réponse d'une structure simple à une sollicitation. Cependant, ces modèles deviennent insuffisants dès lors que l'on s'intéresse à des grandeurs localisées ou à des comportements locaux. De plus, dans de nombreux cas, un défaut local (fissure, trou, rigidité) altère le comportement de la structure dans un périmètre proche, tandis que le comportement du reste de la structure n'est que faiblement modifié. Dans ce cas, il n'est pas raisonnable d'utiliser le même niveau d'analyse fine dans toute la structure.

Les méthodes multi-échelles répondent particulièrement à ce besoin. On peut distinguer dans la littérature principalement trois familles de méthodes multi-échelles : celles basées sur des techniques d'homogénéisation comme la FE^2 [1], celles basées sur l'enrichissement du champ (méthode de partition de l'unité [2], GFEM, X-FEM), et enfin celles basées sur la superposition de champs ou de modèles (Méthode Variationnelle Multi-échelles [3, 4], Méthode de projection de Dirichlet Hiérarchique, S-méthode...). Dans cette dernière famille, la méthode Arlequin [5, 6] propose une méthode de superposition volumique de modèles très flexible.

Cependant, il faut garder à l'esprit que le modèle utilisé pour la résolution d'un problème d'ingénierie ne reste qu'une approximation du problème réel. C'est pour cela que parallèlement au développement de méthode toujours plus pertinentes, de gros efforts de recherche sont menés sur le contrôle de la qualité des solutions obtenues par des méthodes numériques. Dans le cadre de l'approximation numériques par la méthode des Élements Finis, des premiers travaux de vérification ont porté, dans les années 70, d'abord sur des problèmes linéaires de thermique et d'élasticité [7], depuis étendus à des problèmes non-linéaires. Néanmoins, d'un point de vue d'un ingénieur, une quantité de contrôle global n'ait que peu utile lorsque celui-ci s'intéresse d'avantage à des quantités locales comme une moyenne de contrainte dans une certaine zone ou encore le déplacement en un point. Ce n'est que plus récemment que des techniques visant à quantifier l'erreur commise vis-à-vis d'une quantité d'intérêt ont été développées. L'idée, proposée par exemple dans [10], consiste alors à mettre la quantité d'intérêt locale sous forme globale, par des techniques d'extraction, pour pouvoir utiliser les mêmes outils que pour l'estimation d'erreur globale.

Dans ce cadre, on souhaite étudier un problème dit de référence, modélisé par une physique particulaire et stochastique. En pratique, de part son grand nombre de degrés de liberté (aussi bien pour la description particulaire que pour la description de la dimension stochastique), ce problème ne peut être

résolu dans un temps raisonnable. On propose alors de l'approcher en utilisant la méthode Arlquin dans laquelle un modèle déterministe continu et un modèle stochastique particulaire vont être couplés. Afin de maîtriser la qualité de la solution, un estimateur d'erreur sur une quantité d'intérêt local est mise en place pour conduire une adaptativité du modèle.

2 Modèle de référence

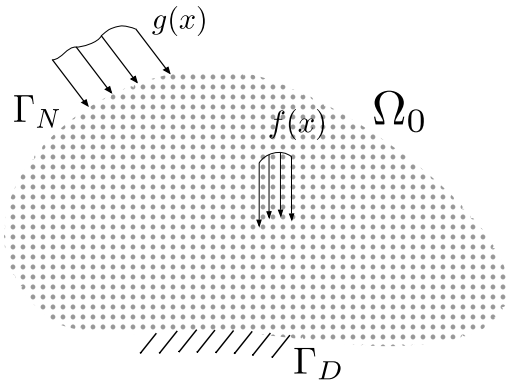

FIGURE 1 – Problème de référence

On souhaite étudier un modèle de référence décrit par une physique particulaire dont les paramètres associés sont aléatoires (cf. Fig. 1). Ce modèle est composé de N particules (qui peuvent représentées des éléments physiques comme des atomes, des molécules, des chaines de polymère ou bien des éléments virtuels comme des centres d'aggrégats...), occupant un domaine Ω_0 et soumis à un champs de force volumique $f(x)$. Les frontières Γ_N et Γ_D sont décrites par N_N particules (indices décrits par l'ensemble Γ_{N_N}) et N_D particules (indices décrits par l'ensemble Γ_{N_D}) respectivement. Un déplacement nul est imposé sur les particules de Γ_{N_N} tandis qu'une force surfacique $g(x)$ est distribuée sur les particules de Γ_{N_D}. En considérant un espace probabilisé complet $(\Theta, \mathscr{T}, P)$ avec Θ un ensemble d'événements, $\mathscr{T}$ une tribu associée à Θ, et $P : \mathscr{T} \to [0,1]$ une mesure de probabilité, et en notant z^0 le vecteur des déplacements des particules, et $\mathcal{V}^0 = \{z \in \mathbb{R}^{2N}, z_i = 0, \forall i \in \Gamma_{N_D}\}$ l'espace des déplacements admissibles, le problème s'écrit :

Trouver $z^0 \in \mathcal{V}^0$ tel que :

$$a^0(z^0, w) = \ell^0(w), \qquad \forall w \in \mathcal{V}^0, \tag{1}$$

où $a^0 : \mathcal{V}^0 \times \mathcal{V}^0 \to \mathbb{R}$ et $\ell^0 : \mathcal{V}^0 \to \mathbb{R}$ sont définis respectivement par :

$$a^0(z, w) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial Ep(z, \theta)}{\partial z_i} w_i,$$

et

$$\ell^0(w) = \sum_{i=1}^{N} f_i w_i + \sum_{i \in \Gamma_{N_N}} g_i w_i,$$

où f_i la force volumique f distribuée sur les particules, g_i la force surfacique g distribuée sur les particules indexées sur Γ_{N_N} et où $Ep(z, \theta)$ représente l'énergie potentiel du système.

En pratique, ce modèle demande un cout trop important pour obtenir une bonne approximation de la solution dans un délai raisonnable. C'est pourquoi la méthode Arlequin est utilisée afin d'approximer ce modèle par un problème moins couteux (cf. Fig. 2).

3 Approximation par la méthode Arlequin

La méthode Arlequin propose une stratégie multi-modèles basée sur les points clés suivants :

– la superposition des modèles,
– un couplage volumique des deux modèles,
– une distribution de l'énergie mécanique entre les deux modèles dans une zone de couplage.

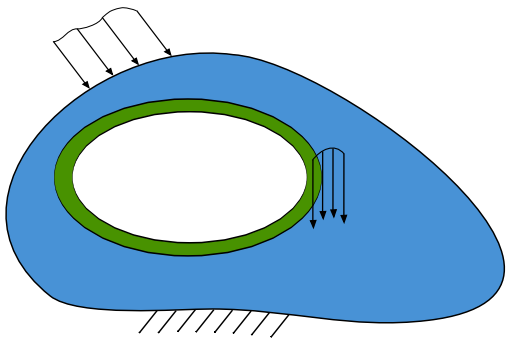

FIGURE 2 – Problème approché par la méthode Arlequin

Par rapport au modèle de référence, on choisit une zone $\Omega_2 \subset \Omega_0$ dans laquelle une description pariculaire est indispensable (zone de singularité géométrique, fond de fissure...), alors que le reste de la structure est modélisé par un modèle continu déterministe équivalent. La méthode Arlequin est alors appliquée pour coupler le modèle déterministe continu au modèle stochastique particulaire. En considérant un espace probabilisé complet $(\Theta, \mathscr{T}, P)$ avec Θ un ensemble d'événements, $\mathscr{T}$ une tribu associée à Θ, et $P : \mathscr{T} \to [0,1]$ une mesure de probabilité, le problème Arlequin dit primal s'écrit :

Trouver (u, z, λ) dans $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_c$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a_1(u,v) + C(\lambda, v) & = & \ell_1(v), & \forall v \in \mathcal{V}_1, \\ a_2(z,w) - C(\lambda, \Pi w) & = & \ell_2(w), & \forall w \in \mathcal{V}_2, \\ C(\mu, u - \Pi z) & = & 0, & \forall \mu \in \mathcal{V}_c. \end{array} \right. \tag{2}$$

avec $\mathcal{V}_1 = \{v \in \mathscr{H}^1(\Omega_1), v(x) = 0, \forall x \in \Gamma_D\}$, $\mathcal{V}_2 = \{z \in \mathscr{L}^2(\Theta) \times \mathbb{R}^{2N}\}$ où Π désigne un opérateur de projection de $\mathcal{V}_2$ dans $\mathcal{V}_c$. Les trois équations (2) décrivent alors respectivement :

1. l'équilibre du premier système (continu déterministe) défini sur le sous-espace Ω_1,
2. l'équilibre du second système (particulaire stochastique) défini sur le sous-espace Ω_2,
3. le couplage du champ de déplacement particulaire z avec le champ de déplacement continu u dans un sous-domaine Ω_c de $S = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq 0$.

L'étude de ce cas s'appuie fortement sur un cas de couplage entre un modèle déterministe continu et un modèle stochastique continu étudié dans [8]. L'espace de couplage $\mathcal{V}_c$ est composée de fonctions aléatoires, parfaitement corrélées en espace, et à moyenne non homogène :

$$\mathcal{V}_c = \{\psi(x) + \theta \mathbb{I}_c(x) | \psi \in \mathscr{H}^1(\Omega_c), \theta \in \mathscr{L}^2(\Theta, \mathbb{R}), \int_{\Omega_c} \psi(x)\, d\Omega = 0\}, \tag{3}$$

où la fonction indicatrice $\mathbb{I}(x)$ est définie par : $\mathbb{I}_c(x \in \Omega_c) = 1$ et $\mathbb{I}_c(x \notin \Omega_c) = 0$. L'opérateur de couplage $C : \mathcal{V}_c \times \mathcal{V}_c \to \mathbb{R}$ s'écrit :

$$C(\lambda, v) = \mathrm{E}\left[\int_{\Omega_c} (\kappa_0 \lambda v + \kappa_1 \nabla\lambda \cdot \nabla v)\, d\Omega\right]. \tag{4}$$

Le couplage des modèles par la méthode Arlequin permet alors de réduire le modèle de référence et d'obtenir une solution approchée. Cependant, la qualité de cette solution doit être contrôlée, notamment en adaptant la taille de Ω_2 suivant la précision voulue.

4 Estimation d'erreur du type *Goal oriented*

4.1 Erreur sur une quantité d'intérêt

Pour contrôler la précision d'une telle approche, une méthode du style *Goal oriented* [10, 11] est utilisée pour estimer l'erreur introduite par la modélisation sur l'évaluation d'une quantité d'intérêt (*e.g.* la moyenne du déplacement d'une particule k dans la zone Ω_2).

En s'inspirant de l'idée développée dans [9], une estimation de l'erreur $\eta = q(z^0) - q(z)$ est proposée afin de développer une méthode d'adaptativité sur ce type de couplage. Pour cela, la méthode consiste à écrire la quantité locale sous forme globale, ici :

$$q(z) = \mathrm{E}[z_k] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \delta_{ki} z_i\right], \tag{5}$$

où δ_{ki} représente le symbôle de Kronecker. L'erreur η peut alors être reliée au produit de l'erreur globale du problème primal avec celle d'un problème adjoint.

4.2 Définition du problème adjoint

On suppose ici que l'on connait une solution z^0 du problème de référence (1). On considère alors le problème adjoint par rapport à la quantité d'intérêt $q(z^0)$:

Trouver $p^0 \in \mathcal{V}_0$ tel que :

$$(a^0)'(z^0; w, p^0) = q'(z; w), \qquad \forall w \in \mathcal{V}^0, \tag{6}$$

où l'on note avec des $'$ la dérivée au sens de Gâteaux. Dans le cas d'une quantité d'intéret $q(z)$ linéaire, comme le déplacement moyen d'une particule, on peut facilement montrer que le problème (7) se met simplement sous la forme :

Trouver $p^0 \in \mathcal{V}_0$ tel que :

$$a^0(w, p^0) = q(w), \qquad \forall w \in \mathcal{V}^0, \tag{7}$$

avec

$$q(w) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \delta_{ki} w_i\right],$$

dont seul le second membre change par rapport à l'équation (1).

L'erreur η s'approche alors au premier ordre par [9] :

$$\eta \simeq \mathscr{R}(z^p, p^0), \tag{8}$$

où $\mathscr{R}(.,.)$ est le résidu défini par :

$$\mathscr{R}(u, v) = \ell^0(v) - a^0(u, v),$$

et où z^p est une projection de la solution approchée de (1) dans l'espace $\mathcal{V}^0$. Dans le cas d'une approximation de la solution par la méthode Arlequin (u, z, λ), on prend par exemple [9] :

$$z^p = \begin{cases} z_i & \text{si } i = 1 \ldots N, \\ u(x_i) & \text{si } x_i \in \Omega_1 \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

Cependant, le problème (7) est encore défini à partir du modèle de référence. On l'approxime alors de nouveau par un modèle Arlequin, dont les grandeurs sont notées avec un $\sim$ dans la suite, plus fin que le précédent (*i.e.* avec une zone de couplage et de recouvrement plus grandes que dans le cas précédent : $\Omega_2 \subset \tilde{\Omega}_2$). En se donnant $(\tilde{u}, \tilde{z}, \tilde{\lambda})$ une solution reconstruite à partir de (u, z, λ) solution de (2) sur $(\tilde{\mathcal{V}}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \tilde{\mathcal{V}}_c)$ (en suivant par exemple ce qui a été fait dans [9]), on peut alors construire un problème adjoint approché :

Trouver $(\tilde{p}_u, \tilde{p}_z, \tilde{p}_\lambda)$ dans $\tilde{\mathcal{V}}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \tilde{\mathcal{V}}_c$ tel que :

$$a'((\tilde{u}, \tilde{z}, \tilde{\lambda}); (v, w, \mu), (\tilde{p}_u, \tilde{p}_z, \tilde{p}_\lambda)) = q'((\tilde{u}, \tilde{z}); (v, w)), \qquad \forall (v, w, \mu) \in \tilde{\mathcal{V}}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \tilde{\mathcal{V}}_c. \tag{9}$$

Si l'on réécrit le problème (2) sous la forme :

Trouver (u,z,λ) dans $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_c$ tel que :

$$a((u,z,\lambda),(v,w,\mu)) = \ell(v,w), \qquad \forall (v,w,\mu) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_c,$$

on peut montrer de la même manière que précedemment que le problème (9) se réécrit sous la forme :

Trouver $(\tilde{p}_u, \tilde{p}_z, \tilde{p}_\lambda)$ dans $\tilde{\mathcal{V}}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \tilde{\mathcal{V}}_c$ tel que :

$$a((v,w,\mu),(\tilde{p}_u,\tilde{p}_z,\tilde{p}_\lambda)) = q(v,w), \qquad \forall (v,w,\mu) \in \tilde{\mathcal{V}}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \tilde{\mathcal{V}}_c. \tag{10}$$

4.3 Estimation de l'erreur et adaptativité

En projetant les solutions approchées par la méthode Arlequin des problèmes primal (u,z,λ) et adjoint $(\tilde{p}_u,\tilde{p}_z,\tilde{p}_\lambda))$ dans $\mathcal{V}^0$ et en notant respectivement ses projections z^p et $\tilde{p}^p$, l'erreur η s'écrit au premier ordre :

$$\eta \simeq \mathscr{R}(z^p, \tilde{p}^p). \tag{11}$$

Afin d'améliorer la qualité de l'approximation par la méthode Arlequin vis-à-vis de la quantité d'intérêt considérée ici, on propose de séparer les différentes sources d'erreur en introduisant des problèmes intermédiaires. Dès lors, la taille de la zone de couplage, la discrétisation Élements Finis, ou encore la discrétisation liée à la dimension stochastique pourront être adaptées.

5 Conclusion

Dans cette contribution, la méthode Arlequin permet de réduire la taille d'un problème en proposant une méthode efficace de coupler des modèles différents. L'utilisation de cette méthode dans ce cas particulier de couplage est décrite. Enfin, en s'intéressant à une quantité locale (comme la moyenne d'un déplacement), une estimation de l'erreur introduite par la réduction du modèle a été proposé. Afin de ne pas rentrer dans tous les détails liés aux différentes formulations, les auteurs ont délibérément choisi de n'écrire ici que les grandes étapes de la méthode. Les points délicats seront repris pendant la conférence et dans des articles à venir.

Enfin, des applications numériques d'adaptativité sur des exemples uni-dimensionnels seront utilisées afin de montrer l'efficacité de la méthode.

6 Remerciement

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre d'un projet de recherche référencé sous le numéro 2009-26D, financé par DIGITEO et la Région Ile-de-France.

Références

[1] F. Feyel, *Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures*, Comput. Mater. Sci 16, 344-354, 199.

[2] I. Babuška, J. M. Melenk, *The partition of unity method*, Int. J. Num. Meth. Engrg. 40, 727-758, 1997.

[3] T. J. R. Hughes, G. R. Feijóo, L. Mazzei, J. Quincy, *The variational multiscale method–a paradigm for computational mechanics*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 166(1-2), 3-24, 1998.

[4] X. F. Xu, *A multiscale stochastic finite element method on elliptic problems involving uncertainties*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 196(25-28), 2723-2736, 2007.

[5] H. Ben Dhia, *Multiscale mechanical problems : the Arlequin method*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences - séries IIB 326(12), 899-904, 1998.

[6] H. Ben Dhia, *Further insights by theorical investigations of the multiscale Arlequin method*, Int. J. Mult. Comp. Engrg. 6(3), 215-232, 2008.

[7] K. Azziz, I. Babuška, *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*, Academic Press, New York, 33 , 1975-1996, 1972.

[8] R. Cottereau, H. Ben Dhia, D. Clouteau, *Localized modeling of uncertainty in the Arlequin framework*, Proceedings of IUTAM Symposium on the Vibration Analysis of Structures with Uncertainties, R. Langley and A. Belyaev (eds), IUTAM Bookseries vol. 27, 477-488, 2010.

[9] S. Prudhomme, L. Chamoin, H. Ben Dhia, P. T. Bauman, *An adaptative strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197, 1887-1901, 2009.

[10] J.T. Oden, S. Prudhomme, *Goal-oriented error estimation and adaptativity for the finite element method*, Comput. Math. Appl. 41, 735-756, 2001.

[11] J.T. Oden, S. Prudhomme, *Estimation of modeling error in computational mechanics*, J. Comput. Phys. 182, 496-515, 2002.