

Matériaux hyperélastiques et Méthode Asymptotique Numérique

S. Nezamabadi^{1,2}, H. Zahrouni², J. Yvonnet³

¹ LMSSC, CNAM, Paris, France, saeid.nezamabadi@cnam.fr

² LEM3, Université Paul Verlaine, Metz, France, zahrouni@univ-metz.fr

³ MSME, Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France, julien.yvonnet@univ-paris-est.fr

Résumé — Dans cette contribution, on présente un algorithme numérique basé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) associant une technique de perturbation et la méthode des éléments finis pour résoudre des problèmes non linéaires en présence de matériaux hyperélastiques compressibles ou incompressibles. L'efficacité et la précision de la méthode sont examinées en comparant cet algorithme avec la méthode classique de Newton-Raphson pour des problèmes de structures en grandes déformations hyperélastiques en présence d'instabilités.

Mots clés — Méthode asymptotique numérique, Matériaux hyperélastiques, Instabilités, Flambage.

Les matériaux hyperélastiques sont souvent considérés pour diverses applications industrielles, grâce à leurs propriétés remarquables de flexibilité, de déformabilité et de résistance à la déformation à des niveaux élevés. Le comportement mécanique non linéaire de cette classe de matériaux a été largement étudié par plusieurs chercheurs (voir, par exemple [1]).

Dans ce travail, nous cherchons à résoudre les problèmes impliquant des lois de comportement hyperélastique en utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN) [2]. La MAN est basée sur un développement des différentes variables des problèmes non linéaires à résoudre sous la forme de séries tronquées à des ordres relativement élevés. Cela nous permet de transformer les équations non linéaires en une séquence de problèmes linéaires qui ont le même opérateur. La MAN peut être considérée comme un prédicteur d'ordre élevé, qui n'a généralement pas besoin de la phase de correction. Une procédure de continuation est utilisée pour s'affronter des limitations du rayon de validité du développement en séries. Les principaux avantages de la MAN par rapport à Newton-Raphson sont les suivants : a) une réduction importante du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente ; b) c'est une technique très bien adaptée aux problèmes en présence des instabilités ou des points limites. Nous considérons ici quatre modèles de comportement hyperélastique :

Modèle de Saint-Venant Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma} . \quad (1)$$

Modèle de Mooney-Rivlin :

$$\mathbf{S} = 2(c_1 + c_2 I_1) \mathbf{I} - 2c_2 \mathbf{C} + [2cJ(J-1) - d] \mathbf{C}^{-1} . \quad (2)$$

Modèle de Néo-Hookéan :

$$\mathbf{S} = (\lambda_0 \ln J - \mu_0) \mathbf{C}^{-1} + \mu_0 \mathbf{I} . \quad (3)$$

Modèle de Gent :

$$\mathbf{S} = \mu \left[J(bJ - b - 1) \mathbf{C}^{-1} + \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} \mathbf{I} \right] . \quad (4)$$

Dans ces relations, \mathbb{C} est le tenseur classique d'élasticité d'ordre 4, $\mathbf{C} = {}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$ le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit, $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}$ le gradient de déformation (\mathbf{I} le tenseur identité de second ordre et \mathbf{u} le champ de déplacement), $\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ le tenseur des déformations de Green-Lagrange. $I_1 = Tr(\mathbf{C})$ et $J = \sqrt{\det(\mathbf{C})}$ sont deux invariants du tenseur \mathbf{C} . Finalement, c_1 , c_2 , c , d , λ_0 , μ_0 , b et J_m sont des constantes des matériaux.

Comme ces modèles hyperélastiques impliquent généralement des relations fortement non linéaires, l'application de la MAN à ces modèles n'est pas directe. Pour appliquer la technique de perturbation

d'une manière simple, il faut remplacer ces relations par des formes quadratiques. Ceci permet de générer les formules de récurrence pour les différents ordres de troncature de façon efficace avec une simple sommation. De cette manière, on transforme les relations fortement non linéaires du comportement hyperélastique sous une forme bien adaptée au développement asymptotique. Dans le cas de la loi de comportement linéaire (par exemple, le modèle de Saint-Venant Kirchhoff), l'application de la technique de perturbation conduit à la relation linéaire suivante pour un ordre arbitraire p :

$$\mathbf{S}_p = \mathbb{C} : \gamma_p . \quad (5)$$

Dans le cas des lois de comportement non linéaire, cette relation peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{S}_p = \mathbb{C}_t : \gamma_p + \mathbf{S}_p^{res} , \quad (6)$$

où le tenseur \mathbb{C} est remplacé par le tenseur des modules tangents \mathbb{C}_t qui dépend à la fois des constantes élastiques du matériau et du champ des contraintes actuelles. En outre, la non linéarité du matériau induit un terme résiduel \mathbf{S}_p^{res} qui dépend de la solution calculée aux ordres précédant l'ordre p .

Les différents modèles considérés (relations (1), (2), (3) et (4)) peuvent être écrits sous la forme des relations (5) ou (6) en termes du second tenseur de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , et du tenseur des déformations de Green-Lagrange, γ . Comme le modèle de Saint-Venant Kirchhoff a une forme quadratique, on peut facilement traiter cette relation dans le cadre de la MAN. Toutefois, les autres relations de comportement contiennent les variables suivantes : \mathbf{C}^{-1} , J , $\ln J$, qui ne peuvent pas être directement et simplement développées en séries.

Étant donné que ces relations ne sont pas quadratiques, des variables supplémentaires sont introduites afin de simplifier les formules de récurrence dans le cadre de la MAN. En outre, des relations différentielles peuvent également être utilisées pour certaines fonctions. Pour cette raison, une variable supplémentaire $\mathbf{C}^{inv} = \mathbf{C}^{-1}$ est introduite. Elle permet d'écrire la relation quadratique suivante :

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{inv} = \mathbf{I} . \quad (7)$$

La variable scalaire J implique une relation cubique par rapport au tenseur \mathbf{C} : $J^2 = \det(\mathbf{C}) = \varepsilon_{ijk} C_{i1} C_{j2} C_{k3}$. Pour cela, on transforme cette relation sous une forme quadratique en introduisant une variable supplémentaire $\tilde{C}_{ij} = C_{i1} C_{j2}$:

$$J^2 = \det(\mathbf{C}) = \varepsilon_{ijk} \tilde{C}_{ij} C_{k3} . \quad (8)$$

Enfin, une nouvelle variable β est introduite pour traiter la fonction $\ln J$ telle que $\beta = \ln J$. Une relation quadratique est obtenue en considérant la forme différentielle de cette équation :

$$J \delta \beta - \delta J = 0 . \quad (9)$$

Les relations (7), (8) et (9) peuvent être facilement développées dans le cadre de la MAN qui permet d'écrire les différentes lois de comportement considérées sous la forme de la relation (6).

L'efficacité et la précision de la procédure proposée sont montrées sur plusieurs problèmes de structures et des comparaisons sont effectuées avec les algorithmes classiques de type Newton-Raphson. Des problèmes présentant des instabilités de microstructures sont étudiés et montrent l'intérêt de notre procédure pour l'analyse multi échelles des matériaux hétérogènes en présence d'instabilités [4].

Références

- [1] G. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : A continuum approach for engineering*, Wiley, 2000.
- [2] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*, Hermès Science Publications, 2007.
- [3] S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet. *Solving hyperelastic material problems by Asymptotic Numerical Method*, Computational Mechanics, Springer, available online, 2010.
- [4] S. Nezamabadi, J. Yvonnet., H. Zahrouni, M. Potier-Ferry. *Multilevel computational strategy for microscopic and macroscopic instabilities*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 198 :2099-2110, 2009.