



**HAL**  
open science

# Matériaux hyperélastique et Méthodes Asymptotique Numérique

S. Nezamabadi, H. Zahrouni, Julien Yvonnet

► **To cite this version:**

S. Nezamabadi, H. Zahrouni, Julien Yvonnet. Matériaux hyperélastique et Méthodes Asymptotique Numérique. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592885

**HAL Id: hal-00592885**

**<https://hal.science/hal-00592885>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Matériaux hyperélastiques et Méthode Asymptotique Numérique

S. Nezamabadi<sup>1,2</sup>, H. Zahrouni<sup>2</sup>, J. Yvonnet<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMSSC, CNAM, Paris, France, saeid.nezamabadi@cnam.fr

<sup>2</sup> LEM3, CNRS UMR 7239, Université Paul Verlaine, Metz, France, hamid.zahrouni@univ-metz.fr

<sup>3</sup> MSME, Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France, julien.yvonnet@univ-paris-est.fr

**Résumé** — Dans cet article, on présente un algorithme numérique basé sur une technique de perturbation appelée Méthode Asymptotique Numérique (MAN) pour résoudre des problèmes non linéaires dans le cadre des matériaux hyperélastiques compressibles et incompressibles. L'efficacité et la précision de la méthode sont examinées en comparant cet algorithme avec la méthode classique de Newton-Raphson pour des problèmes de structures en présence de grandes déformations hyperélastiques et instabilités.

**Mots clés** — Méthode asymptotique numérique, Matériaux hyperélastiques, Instabilités, Flambage.

## 1 Introduction

Les matériaux hyperélastiques sont souvent utilisés dans diverses applications industrielles grâce à leurs propriétés remarquables de flexibilité, de déformabilité et de résistance à la déformation à des niveaux élevés. Le comportement mécanique non linéaire de cette classe de matériaux a été largement étudié par plusieurs chercheurs (voir, par exemple ; [1]). Dans ce travail, nous cherchons à résoudre les problèmes impliquant des lois de comportement hyperélastique en utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN) [2, 3]. La MAN est basée sur un développement des différentes variables du problème non linéaire à résoudre sous la forme de séries tronquées à des ordres relativement élevés [4]. Cela nous permet de transformer les équations non linéaires en une séquence d'équations linéaires qui admettent le même opérateur tangent. La MAN peut être considérée comme un prédicteur d'ordre élevé, qui n'a généralement pas besoin de la phase de correction. Une procédure de continuation est utilisée pour parcourir toute la branche solution du problème posé. Les principaux avantages de la MAN par rapport à Newton-Raphson sont les suivants : a) une réduction importante du nombre de décompositions de la matrice tangente ; b) une très bonne efficacité pour les problèmes présentant des instabilités ou des points de limite.

## 2 Formulation du problème

Dans ce travail, on se place dans le cadre d'une formulation lagrangienne totale qui prend en compte les grands déplacements et les grandes rotations. Plusieurs lois de comportement hyperélastique sont proposées. On montrera comment ces lois fortement non linéaires peuvent être adaptées au cadre de la méthode asymptotique numérique. La forme faible du problème à résoudre dans un domaine  $\Omega$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} {}^t\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} d\Omega = \lambda \mathbf{T}_{ext}(\delta \mathbf{u}) \\ \mathbf{S} = \mathcal{F}(\gamma) \\ \mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \\ \gamma = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} . \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{S}$  représentent respectivement le premier et le second tenseurs de Piola-Kirchhoff ;  $\gamma$  est le tenseur de déformation de Green Lagrange ;  $\mathbf{F}$  est le tenseur gradient de déformation ;  $\lambda$  est un paramètre de chargement et  $\mathbf{T}_{ext}$  est le travail des efforts extérieurs.  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre deux et  $\mathbf{u}$  représente le champ de déplacement. Notons qu'on définit  $\mathbf{S}$  en fonction de  $\gamma$  au travers de la relation de comportement détaillée plus loin.

En ce qui concerne la relation de comportement, on se propose de présenter quatre modèles de relation de comportement hyperélastique qui présentent divers degrés de difficulté concernant leur adaptation au cadre de la MAN.

*Modèle de Saint-Venant Kirchhoff :*

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma}. \quad (2)$$

*Modèle de Mooney-Rivlin :*

$$\mathbf{S} = 2(c_1 + c_2 I_1) \mathbf{I} - 2c_2 \mathbf{C} + [2cJ(J-1) - d] \mathbf{C}^{-1}. \quad (3)$$

*Modèle de Néo-Hookéan :*

$$\mathbf{S} = (\lambda_0 \ln J - \mu_0) \mathbf{C}^{-1} + \mu_0 \mathbf{I}. \quad (4)$$

*Modèle de Gent :*

$$\mathbf{S} = \mu \left[ J(bJ - b - 1) \mathbf{C}^{-1} + \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} \mathbf{I} \right]. \quad (5)$$

Dans ces relations,  $\mathbb{C}$  représente le tenseur classique d'élasticité d'ordre 4,  $\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$  le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit.  $I_1 = \text{Tr}(\mathbf{C})$  et  $J = \sqrt{\det(\mathbf{C})}$  sont deux invariants du tenseur  $\mathbf{C}$ . Les paramètres scalaires  $c_1, c_2, c, d, \lambda_0, \mu_0, b$  et  $J_m$  sont des constantes du matériau.

Comme ces modèles hyperélastiques impliquent généralement des relations fortement non linéaires, l'application de la MAN à ces modèles n'est pas directe. Pour appliquer la technique de perturbation d'une manière simple, il faut remplacer ces équations par des relations quadratiques. Ceci permet de générer les formules de récurrence pour des différents ordres de troncature avec une addition simple et efficace. De cette manière, on transforme les relations de comportement hyperélastique avec forte non linéarité en une forme plus convenable dans le cadre de la MAN.

En principe, toutes les variables de la loi de comportement non linéaire sont développées sous forme de séries entières par rapport à un paramètre de développement. Les relations non linéaires sont ainsi transformées en une suite récurrente de relations linéaires. Plus généralement, si on considère le modèle de Saint-Venant Kirchhoff qui donne une relation linéaire entre les contraintes et les déformations, l'application de la technique de perturbation conduit à la relation linéaire suivante pour un ordre arbitraire de troncature des séries  $k$  :

$$\mathbf{S}_k = \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma}_k. \quad (6)$$

Dans le cas de relation non linéaire entre les contraintes et les déformations, on peut écrire les problèmes linéaires générés par l'application de la technique de perturbation comme suit :

$$\mathbf{S}_k = \mathbb{C}_t : \boldsymbol{\gamma}_k + \mathbf{S}_k^{res}, \quad (7)$$

où le tenseur  $\mathbb{C}$  est remplacé par le tenseur de module tangent  $\mathbb{C}_t$ , qui dépend à la fois des constantes élastiques du matériau et du champ de contraintes actuelles. En outre, la non linéarité du matériau induit un terme résiduel  $\mathbf{S}_k^{res}$  qui dépend de la solution calculée aux ordres précédant l'ordre 'k'.

Les différents modèles considérés (les relations (2), (3), (4) et (5)) peuvent être écrits sous la forme des relations (6) ou (7) en termes du second tenseur de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{S}$  et du tenseur des déformations de Green-Lagrange,  $\boldsymbol{\gamma}$ . Comme le modèle de Saint-Venant Kirchhoff a une forme quadratique, on peut facilement traiter cette relation dans le cadre de la MAN. Toutefois, les autres relations de comportement contiennent les variables suivantes :  $\mathbf{C}^{-1}, J, \ln J$ , qui ne peuvent pas être directement développées en séries pour une raison d'efficacité numérique.

Étant donné que ces relations ne sont pas quadratiques, des variables supplémentaires sont introduites afin de simplifier les formules de récurrence dans le cadre de la MAN. En outre, des relations différentielles peuvent également être utilisées pour certaines fonctions. Pour cette raison, une variable supplémentaire  $\mathbf{C}^{inv} = \mathbf{C}^{-1}$  est introduite. Elle permet d'écrire la relation quadratique suivante :

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{inv} = \mathbf{I}. \quad (8)$$

La variable scalaire  $J$  implique une relation cubique par rapport au tenseur  $\mathbf{C}$  :  $J^2 = \det(\mathbf{C}) = \varepsilon_{lmn} C_{l1} C_{m2} C_{n3}$ . Pour cela, on transforme cette relation sous une forme quadratique en introduisant une variable supplémentaire  $\tilde{C}_{lm} = C_{l1} C_{m2}$  :

$$J^2 = \det(\mathbf{C}) = \varepsilon_{lmn} \tilde{C}_{lm} C_{n3}. \quad (9)$$

Enfin, une nouvelle variable  $\beta$  est introduite pour traiter la fonction  $\ln J$  telle que  $\beta = \ln J$ . Une relation quadratique est obtenue en considérant la forme différentielle de cette équation :

$$J \delta\beta - \delta J = 0. \quad (10)$$

Les relations (8), (9) et (10) sont utilisées dans la loi de comportement permettant ainsi d'obtenir une forme simple à développer en séries entières dans la cadre de la MAN. Ceci permet d'écrire les différentes lois de comportement considérées dans cette étude sous la forme de la relation (7).

Une fois le problème non linéaire à résoudre est mis sous une forme quadratique, les variables du problème sont donc développées en séries entières comme suit :

$$\begin{cases} \mathbb{U}(a) = \mathbb{U}_0 + \sum_{k=1}^N a^k \mathbb{U}_k, \\ \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^N a^k \lambda_k. \end{cases} \quad (11)$$

où  $\mathbb{U}$  représente les variables du problème à résoudre et  $N$  l'ordre de troncature des séries. La substitution de ces développements dans le problème non linéaire permet d'obtenir la suite récurrente de problèmes linéaires comme suit ( $1 \leq k \leq N$ ) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} {}^t \mathbf{P}_k : \delta \mathbf{F} d\Omega = \lambda_k \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) \\ \mathbf{S}_k = \mathbf{C}_t : \gamma_k + \mathbf{S}_k^{res} \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{S}_k + \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{S}_0 + \sum_{r=1}^{k-1} \mathbf{F}_{k-r} \cdot \mathbf{S}_r \\ \gamma_k = \frac{1}{2} \left( {}^t \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_k + {}^t \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{F}_0 + \sum_{r=1}^{k-1} {}^t \mathbf{F}_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r \right) \\ \mathbf{F}_k = \nabla \mathbf{u}_k. \end{cases} \quad (12)$$

Dans cette formulation, seul le vecteur déplacement sera discrétisé. Pour cela, une méthode de substitution est utilisée pour condenser les différentes équations de (12) dans celle d'équilibre (12<sub>1</sub>). Donc, le problème à l'ordre  $k$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}) = \lambda_p \mathbf{T}_{ext}(\delta \mathbf{u}) + \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}), \quad (13)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur tangent de rigidité qui dépend de la solution initiale, il est le même pour tous ordres de la série ;  $\mathcal{F}_p^{nl}$  est un terme résiduel qui contient des termes dépendant des ordres inférieures à  $k$  et nul pour l'ordre 1. Les détails de calcul relatifs à ces termes peuvent être consultés dans la référence [3].

La technique présentée dans cette étude permet d'obtenir une bonne partie de la branche solution en décomposant une seule matrice de rigidité tangente. Rappelons que malgré la présence de la relation non linéaire de comportement, aucune itération n'est effectuée ni au niveau local au point d'intégration ni au niveau global sur la condition d'équilibre de la structure. Il est important également de noter que le comportement non linéaire de type hyperélastique s'apprête bien au développement en séries à l'aide de la MAN puisqu'il ne présente pas de singularité comme celle rencontrée dans une loi de plasticité : condition de passage de l'état élastique à l'état plastique et vice versa. La solution complète du problème est obtenue en utilisant une technique de continuation asymptotique. Cette technique est assez simple à mettre en oeuvre, elle consiste à comparer des solutions à des ordres consécutifs et d'exiger que la différence relative entre ces deux solutions reste petite par rapport à un paramètre de précision  $\delta$  (exemple  $\delta = 10^{-5}$ ). Pour réduire le nombre de pas asymptotique, il est possible d'utiliser des approximants de Padé. L'expérience montre que cette technique permet de diviser d'environ par deux le nombre de pas asymptotiques. Le surcoût relatif au calcul des fractions rationnelles est négligeable.

### 3 Exemples numériques

La précision et l'efficacité de la procédure proposée ont été testées sur plusieurs problèmes de structures. Tout d'abord, des problèmes de tension et de compression de matériaux hyperélastiques ont été étudiés pour valider notre procédure (MAN avec approximants de Padé). Les résultats sont comparés

avec ceux obtenus à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson. La MAN montre clairement sa robustesse et son efficacité dans ces problèmes par rapport à Newton-Raphson [3].

En outre, une microstructure de matériaux cellulaires montrée sur la figure 1(a) a été étudiée montrant l'utilisation de cette procédure dans une analyse multi échelle des matériaux hétérogènes en présence des instabilités. Les inclusions sont faites d'un matériau hyperélastique pour lequel la loi de comportement de Mooney-Rivlin est considérée et la matrice est faite d'un matériau hyperélastique modélisé à l'aide de la loi de Gent. Le gradient de déformation homogène avec des fluctuations périodiques est imposé sur le bord de la microstructure (voir, par exemple, [5]). Le chargement appliqué est une compression avec un cisaillement de faible amplitude, introduit pour déclencher le flambage. On voit dans les figures 1(b) et 1(c) les états déformés de la microstructure pour les points A et B de la courbe 2. Avant le point A, la réponse est essentiellement linéaire. Après le point A, des instabilités au niveau local induisent un changement brutal dans la rigidité de la structure (portion de courbe entre les points A et B).

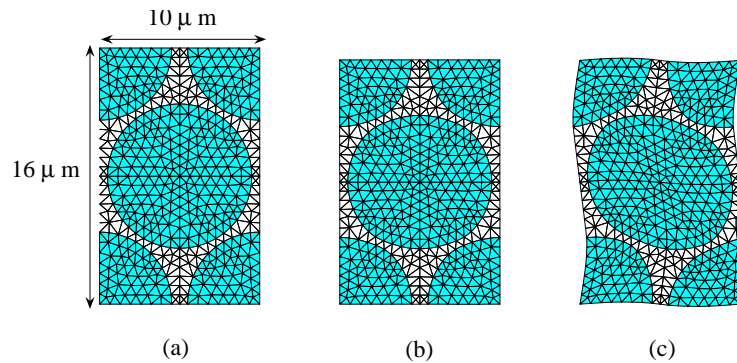


FIGURE 1 – Microstructure cellulaire (a) ; et l'état déformé de cette microstructure au point A (b) et au point B (c) montrés sur la figure 2.

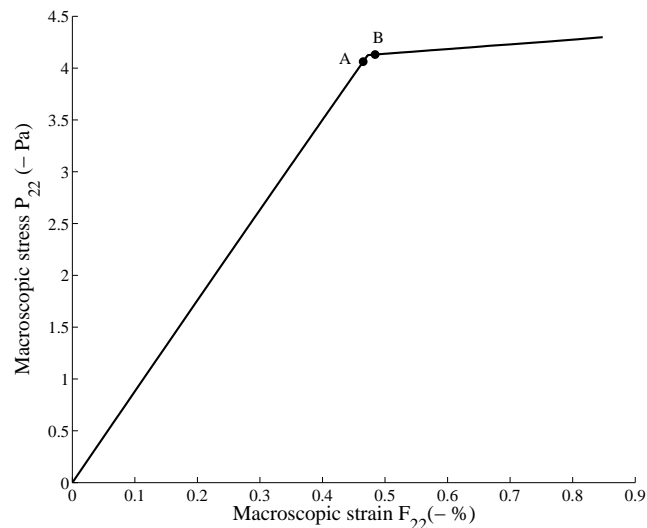


FIGURE 2 – Le diagramme contrainte-déformation de la microstructure du matériau cellulaire.

Dans ce deuxième exemple, on présente un problème d'homogénéisation à deux échelles comportant un matériau hétérogène hyperélastique. Le but est de montrer le potentiel de notre approche pour étudier des matériaux comme les polymères renforcés ou des biomatériaux. La structure étudiée est représentée par une bague annulaire composée d'un manchon métallique interne, un manchon métallique externe,

et un matériau hétérogène décrit par la microstructure périodique montrée dans la figure 3. Le manchon rigide interne est soumis à un déplacement vertical imposé comme le montre la figure 3. Pour étudier ce problème, nous utilisons une procédure multi échelles employant la MAN à deux échelles. Cette technique initialement présentée dans [5] et [6], est appelée MAN-multi échelle et offre un cadre efficace pour l'homogénéisation non linéaire en raison des propriétés de la "linéarisation" de la MAN. Les inclusions sont modélisées par le modèle de Saint-Venant Kirchhoff. La matrice est constituée d'un matériau décrit par le modèle de Mooney-Rivlin.

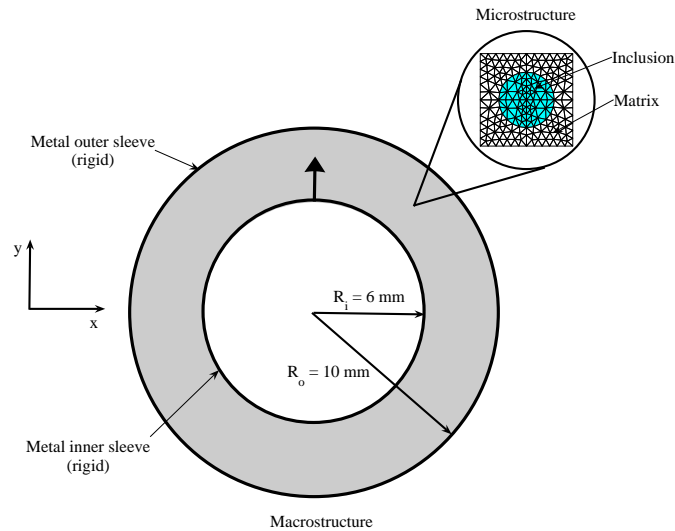


FIGURE 3 – Géométrie et conditions aux limites du problème.,.

Les états déformés de la macrostructure et des microstructures sont présentés dans la figure 4. La Figure 5 présente le seconde tenseur de contraintes macroscopiques de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  par rapport à la déformation macroscopique de Green-Lagrange  $\gamma$  aux points d'intégration situés aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

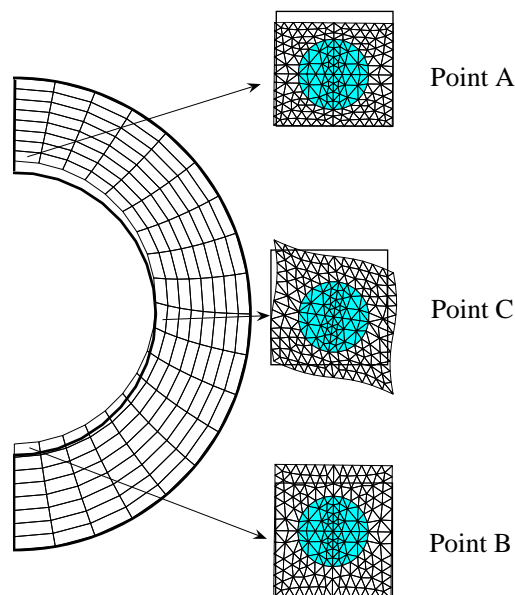


FIGURE 4 – Les états déformés des macro- et micro- structures.

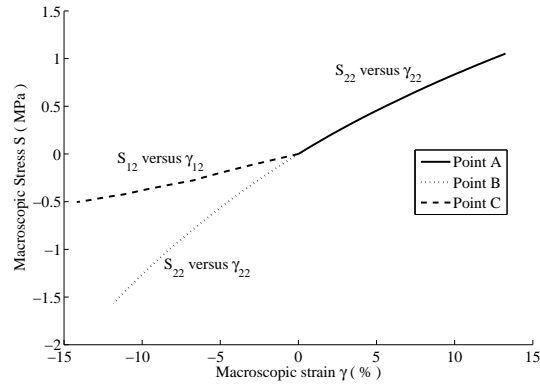


FIGURE 5 – Courbes contraintes-déformations macroscopiques pour les points A, B et C.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté les formulations permettant de résoudre des problèmes hyperélastiques à l'aide de la méthode asymptotique numérique (MAN). En utilisant la MAN, le problème non linéaire à résoudre est transformé en une séquence de problèmes linéaires. Par conséquent, la matrice de rigidité tangente est calculée une seule fois pour chaque pas asymptotique. Une technique de continuation classique est utilisée dans le cadre de la MAN pour décrire toute la branche solution. Dans ce type de problème où la réponse ne présente pas de singularité ou de fortes irrégularité, peu de pas est suffisant pour calculer la réponse complète de la structure sur un grand intervalle de chargement, ce qui permet une réduction significative du temps de calcul par rapport aux méthodes classiques de type Newton-Raphson.

## Références

- [1] G. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : A continuum approach for engineering*, Wiley, 2000.
- [2] S. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, F. Chinesta. *Model order reduction for hyperelastic materials*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 81 : 1180-1206, 2009.
- [3] S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet. *Solving hyperelastic material problems by Asymptotic Numerical Method*, Computational Mechanics, Springer, 47 : 77-92, 2011.
- [4] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*, Hermès Science Publications, 2007.
- [5] S. Nezamabadi, J. Yvonnet, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry. *Multilevel computational strategy for microscopic and macroscopic instabilities*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198 : 2099-2110, 2009.
- [6] S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet, M. Potier-Ferry. *A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites*, International Journal for Multiscale Computational Engineering, Begell House, 8 : 287-301, 2010.