

# Modèle d'interface homogénéisée décrivant des défauts périodiquement répartis sur une surface

M. David<sup>1,2</sup>, J.-J. Marigo<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMS, École Polytechnique, France, {david,marigo}@lms.polytechnique.fr

<sup>2</sup> LaMSID, EDF R&D, France

**Résumé** — L'objectif de ce travail est de construire un modèle homogénéisé d'interface pour des défauts localisés sur une surface. Contrairement aux travaux précédemment publiés sur ce sujet, on ne fait pas d'hypothèses sur le caractère très souple ou très rigide de cette interface. Ceci permet d'exhiber un modèle d'interface plus général, couplant élasticité d'interface et rigidité membranaire. Enfin, on présente une formulation énergétique du comportement de cette interface, qui rend très simple son implémentation dans un code éléments finis.

**Mots clés** — approches multi-échelles, homogénéisation.

## 1 Introduction

### 1.1 Le problème étudié

On s'intéresse à l'homogénéisation d'un réseau périodique de défauts, localisés sur une surface. Ces défauts peuvent être de diverses natures : armatures en acier dans un béton, microfissures ou cavités dans un matériau. Décrire individuellement ces défauts dans un calcul éléments finis est souvent extrêmement coûteux en temps de calcul. Il est donc préférable d'introduire dans le modèle éléments finis un modèle homogénéisé, reproduisant l'influence de ces défauts sur l'ensemble de la structure.

### 1.2 Séparation des échelles

On utilise une approche de séparation d'échelles. On introduit donc un paramètre  $\eta$ , qui correspond au rapport de la périodicité des défauts sur la taille de la structure, et on étudie le comportement macroscopique de la structure lorsque ce paramètre tend vers zéro. Pour parler en termes mathématiques, on construit un développement limité du comportement de la structure au voisinage de  $\eta = 0$ . On décompose donc les champs solutions de ce problème en puissances de  $\eta$  :

$$\underline{u}(\eta) = \underline{u}^0 + \eta \underline{u}^1 + \eta^2 \underline{u}^2 + \dots$$

## 2 Mise en œuvre de la séparation d'échelles

### 2.1 Problème macroscopique

Les calculs montrent que les défauts n'ont pas d'influence à l'ordre 0 sur le comportement global de la structure. En d'autres termes, lorsque  $\eta$  tend vers 0, l'influence de l'interface disparaît. Ce phénomène est connu comme le théorème du tailleur : si deux pièces de tissu sont cousues ensemble avec un pas assez fin, la couture n'est pas visible. Pour identifier l'influence des défauts sur le comportement global de la structure, il faut donc prendre en compte l'ordre suivant.

À l'ordre 1, la présence des défauts induit un saut de déplacement et un saut de contraintes au travers de l'interface, qui se met sous la forme

$$\begin{aligned} [[u^1]] &= d(\epsilon^0) \\ [[\sigma^1]] \cdot n &= -\text{div}_x(\sigma_I(\epsilon^0)) \end{aligned}$$

avec  $d$  le saut de déplacement à la traversée de l'interface,  $\sigma_I$  les contraintes membranaires portées par l'interface et  $\varepsilon^0$  les déformations volumiques d'ordre 0 du matériau au voisinage de l'interface. En vertu de la linéarité du problème,  $d$  et  $\sigma_I$  sont des fonctions linéaires de la déformation macroscopique.

## 2.2 Problèmes élémentaires

Homogénéiser le comportement de l'interface revient donc à identifier les fonctions linéaires  $d(\varepsilon)$  et  $\sigma_I(\varepsilon)$ . Pour cela, on résout 6 problèmes élastiques au niveau d'un motif élémentaire, et on extrait de ces problèmes le saut de déplacement et les contraintes membranaires. Ces problèmes s'écrivent en termes des correcteurs en déplacement et en contraintes  $\hat{v}^1$  et  $\hat{\tau}^0$

$$\begin{aligned}\hat{\tau}^0 &= \mathbf{A} : \varepsilon_y(\hat{v}^1) + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\text{volume}}) : \varepsilon_x(u^0) \\ \text{div}(\hat{\tau}^0) &= 0\end{aligned}$$

avec des conditions de périodicité pour  $\hat{v}^1$  et une condition de décroissance des contraintes  $\hat{\tau}^0$  loin de l'interface. On en déduit les fonctions  $d$  et  $\sigma_I$  via

$$\begin{aligned}d(\varepsilon) &= \lim_{y_1 \rightarrow \infty} (\hat{v}^1(y_1) - \hat{v}^1(-y_1)) \\ \sigma_I(\varepsilon) &= \langle \hat{\tau}^0 \rangle_Y\end{aligned}$$

On construit ainsi une matrice  $6 \times 6$  telle que

$$\begin{pmatrix} d \\ \sigma_I \end{pmatrix} = M \cdot \varepsilon^0$$

## 2.3 Modèle énergétique

Cette formulation n'est pas très adaptée à une implémentation numérique. Elle mélange en effet des grandeurs primales et duales, et ne fait pas apparaître l'énergie de l'interface. On transforme donc cette formulation par quelques opérations matricielles, et on la met sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma \cdot n \\ \sigma_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{dd} & K_{d\varepsilon} \\ K_{\varepsilon d} & K_{\varepsilon\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ \varepsilon_I \end{pmatrix}$$

de sorte que l'énergie de l'interface s'écrit

$$E_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d \\ \varepsilon_I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} K_{dd} & K_{d\varepsilon} \\ K_{\varepsilon d}^T & K_{\varepsilon\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ \varepsilon_I \end{pmatrix}$$

avec  $d$  le saut de déplacement à l'interface, et  $\varepsilon_I$  les déformations d'interface. Cette formulation énergétique à partir des grandeurs primales rend très simple l'implémentation de ce modèle dans un code éléments finis.

On reconnaît dans cette formulation un certain nombre de phénomènes classiques. Le terme  $K_{dd}$  correspond à une simple interface élastique, appelée aussi « ligne de ressorts ». De même, le terme  $K_{\varepsilon\varepsilon}$  correspond à une simple membrane élastique. La particularité de cette formulation est qu'elle couple ces deux comportements via le terme  $K_{d\varepsilon}$ , qui est généralement non nul.

Une seconde caractéristique de cette formulation est que l'énergie de l'interface est généralement non positive. Par exemple, si les défauts sont plus rigides que le volume environnant, la matrice  $K_{dd}$  est négative. Inversement, si les défauts sont moins rigides, c'est la matrice  $K_{\varepsilon\varepsilon}$  qui sera négative. Cette non-positivité de l'énergie d'interface rend le problème global généralement mal posé : on perd les propriétés d'existence et d'unicité de la solution.

## Références

- [1] J.-J. Marigo, C. Pideri. *The effective behavior of elastic bodies containing microcracks or microholes localized on a surface*, International Journal of Damage Mechanics, Special issue of ESMC2009 (à paraître).
- [2] R. Abdelmoula, J.-J. Marigo. *The effective behavior of a fiber bridged crack*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48 (2000) 2419-2444.