

## Analyse de stabilité d'une nappe fibrée en compression

E. Lignon<sup>1</sup>, P. Le Tallec<sup>2</sup>, N. Triantafyllidis<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, eric.lignon@polytechnique.edu

<sup>2</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, patrick.letaltec@polytechnique.edu

<sup>3</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, nicolas.triantafyllidis@polytechnique.edu

**Résumé** — Nous décrivons une méthode d'analyse de stabilité multi-échelles basée sur les résultats de [1] et reprenant en grande partie la démarche décrite dans [2], en recherchant les modes d'instabilité sous forme d'ondes de Bloch. Cette méthode est appliquée à la prédiction du flambement dans le plan d'une nappe fibrée soumise à une compression axiale couplée à de la flexion. La démarche s'avère rapide et précise, et peut facilement être adaptée à tout problème pour lequel une cellule élémentaire 2D peut être identifiée et où la solution fondamentale est périodique.

**Mots clés** — Analyse de stabilité, méthodes multi-échelles, composites fibrés.

Les structures composées de fibres très rigides entourées d'une matrice plus souple sont fréquemment rencontrées en biologie (ex : fibres de Collagen dans les tendons) ou en industrie (ex : composites fibrés en aéronautique). Ces structures sont capables de résister à de grandes déformations, mais un facteur limitant est leur instabilité sous compression axiale dans le sens des fibres. L'objectif de ce travail est de mieux comprendre ces instabilités, en utilisant une analyse multi-échelles pour calculer leur apparition, d'un point de vue théorique et numérique.

### 1 Problème mécanique

La stabilité des matériaux fibrés est un sujet qui a été largement étudié (voir par exemple [3], [4], ...). Ces auteurs ont considéré des structures 3D composées de fibres alignées, distribuées périodiquement ou aléatoirement. Dans notre cas, l'objectif est d'analyser l'apparition d'instabilités macroscopiques dans une structure fine comportant une seule couche de fibres (voir figure 1). La nappe renforcée forme alors une singularité dans l'épaisseur, qui rend impossible l'application de méthodes d'homogénéisation classiques. Une nouvelle stratégie a ainsi été utilisée.

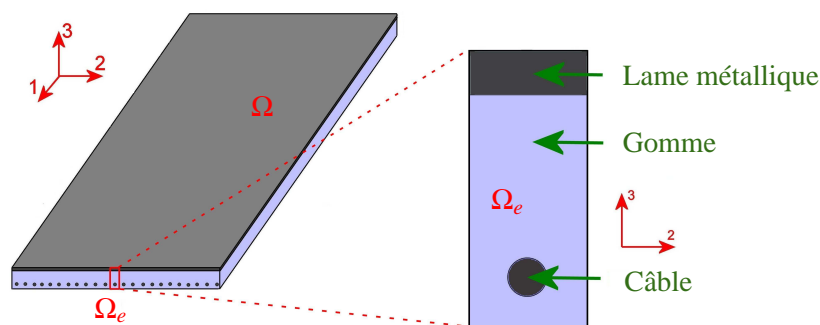


FIG. 1 – Géométrie de l'éprouvette soumise à une flexion circulaire.

Nous considérons l'éprouvette représentée sur la figure 1, dans laquelle la matrice subit des *grandes déformations*, et dont la longueur et la largeur sont supposées infinies. Les fibres sont alignées de manière périodique, et supposées très rigides par rapport à la matrice de caoutchouc.

Nous soumettons cette structure à une flexion circulaire qui crée une *compression axiale* des câbles situés sous la fibre moyenne (voir figure 2).

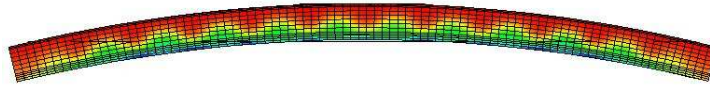


FIG. 2 – Modélisation de la flexion circulaire de la nappe fibrée.

## 2 Analyse de stabilité multi-échelles

Grâce à la périodicité de sa géométrie, la structure est décomposée en cellules élémentaires 2D (voir figure 1). Toutes les cellules sont supposées se déformer de manière identique dans la solution principale, de telle sorte que les calculs peuvent être réduits à l'échelle *microscopique* sur seulement l'une d'entre elles (avec une méthode d'éléments finis).

La stabilité du chemin d'équilibre principal est gouvernée par le critère de seconde variation, basé sur la définie-positivité d'une fonctionnelle quadratique. En reprenant le résultat de [1], les modes propres du problème de stabilité peuvent être exprimés sous formes d'*ondes de Bloch*, dont les inconnues sont une fonction de forme sur une cellule 2D, et les nombres d'ondes latérales et axiales. Ainsi l'étude d'une matrice tangente sur un problème local 2D est suffisante pour analyser la stabilité du solide 3D.

## 3 Validation numérique

Cette méthode multi-échelles permet de calculer rapidement le chargement critique et les modes d'instabilité correspondants. Nous vérifions sa précision sur l'exemple de flexion circulaire :

- l'analyse de stabilité prédit un flambement latéral des câbles dans le plan de la nappe, ce qui est observé expérimentalement (voir figure 3) ;
- le chargement critique et la longueur d'onde du flambement prédits correspondent à la première instabilité observée dans nos calculs 3D (voir figure 4).

Ceci valide complètement nos résultats.



FIG. 3 – Flambement dans le plan de la nappe fibrée observé expérimentalement.

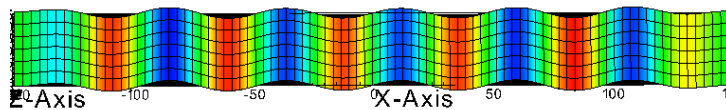


FIG. 4 – Flambement dans le plan de la nappe fibrée calculé numériquement.

## Références

- [1] G. Geymonat, S. Müller, N. Triantafyllidis, *Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity*, Archive for rational mechanics and analysis, 1993.
- [2] N. Triantafyllidis, M. Nestorovic, M. Schraad, *Failure surfaces for finitely strained two-phase periodic solids under general in-plane loading*, Journal of applied mechanics-transactions of the ASME, 73 , 505-515, 2006.
- [3] N. Triantafyllidis, B. Maker, *On the Comparison Between Microscopic and Macroscopic Instability Mechanisms in a Class of Fiber Reinforced Composites*, Journal Appl. Mech., 52, 794-800, 1985.
- [4] M. Agoras, O.Lopez-Pamies, P. Ponte Castañeda, *Onset of macroscopic instabilities in fiber-reinforced elastomers at finite strain*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 57 , 1828-1850, 2009.