

Identification de sources de chaleur dans le contexte de la thermographie infrarouge

N. Auffray¹, M. Bonnet¹, S. Pagano²

¹ LMS (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, France, {nicolas.auffray, marc.bonnet}@polytechnique.edu

² LMGC (UMR CNRS 5508), Université Montpellier 2, France, stephane.pagano@univ-montp2.fr

Motivation

La déformation d'un matériau solide s'accompagne quasi-systématiquement d'une variation de température. L'équation de la chaleur, découlant des premier et second principes de la thermodynamique, relie ces variations de température aux phénomènes de dissipation intrinsèque et de couplage thermomécanique qui ont lieu au sein de la matière. Grâce à la thermographie infrarouge les variations de température peuvent être mesurées à la surface d'un échantillon au cours d'un essai mécanique. Toutefois, le champ thermique, qui dépend également des conditions aux limites de la structure observée, n'est pas intrinsèque au comportement du matériau. De fait, pour comprendre le comportement thermomécanique d'une structure, il faut être capable de lier le champ thermique observé aux sources l'ayant produit, ce qui demande de résoudre un problème inverse. Or il est bien connu que ces problèmes sont mal posés au sens d'Hadamard : la solution peut en particulier ne pas dépendre continument des données [1]. À ce problème générique vient s'ajouter celui, propre à l'inversion à partir de données surfaciques, de non-unicité de la solution [2]. De ce fait, de manière à retrouver les informations qui nous intéressent, une paramétrisation du terme source est nécessaire [2, 3].

Modélisation du problème

On considère Ω un domaine compact de \mathbb{R}^2 dont la frontière Γ , suffisamment régulière, admet une normale unitaire sortante n . On note $Q_T = \Omega \times [0, T]$ le cylindre spatio-temporel et Σ_T sa frontière latérale. Notre objectif est d'identifier le terme source f dans le problème d'évolution parabolique (rendu adimensionnel par un choix convenable d'unités de longueur et de temps) :

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) \theta(x, t) = f(x, t), & \text{dans } Q_T \\ \theta(x, t) + \partial_n \theta(x, t) = 0, & \text{sur } \Sigma_T \\ \theta(x, 0) = 0, & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} \quad (1)$$

connaissant $\theta(x, t)$ et $\partial_n \theta(x, t)$ sur Σ_T . Le terme source est ici supposé représentable par une combinaison linéaire de N sources ponctuelles dont les intensités sont modélisées par des fonctions portes :

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^N p_j \delta(x - x_j) \Pi\left(\frac{t - t_j}{l_j}\right) \quad (2)$$

avec

$$\Pi(u) = H(u + 1/2) - H(u - 1/2) \quad (3)$$

où H est la fonction de Heaviside et p_j , x_j , t_j , l_j , paramètres inconnus pour la j -ième source, désignent respectivement son intensité, sa localisation spatiale, sa position temporelle et sa durée d'allumage. Sous ces hypothèses, le terme source peut être identifié de manière unique à partir d'observations réalisées en surface.

Méthode de l'écart à la réciprocity parabolique

L'objet de notre communication est de présenter une méthode numérique directe permettant d'obtenir le nombre de points sources, leurs positions, et leurs intensités intégrées dans le temps. Cette méthode

se base sur l'utilisation d'une fonctionnelle d'écart à la réciprocité [4] :

$$\int_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \bar{\theta} - \bar{\phi} \psi \right) ds dt + \int_{\Omega} [\theta_t(x) \psi_t(x)]_0^T dx = \int_{Q_T} f \psi dx dt \quad (4)$$

que l'on testera avec des champs harmoniques ψ stationnaires :

$$H(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega), \Delta \psi = 0\} \quad (5)$$

Il peut être montré que la combinaison de cette fonctionnelle avec cette classe de champs tests équivaut à la sommation durant le temps d'observation des champs dépendant du temps. De fait, choisir un temps d'observation supérieur à celui de l'extinction de la dernière source assure que l'information sur l'activité des sources est bien contenue dans la fonctionnelle d'écart à la réciprocité. L'application de l'algorithme d'inversion algébrique proposé par El Badia et Ha-Duong [3] à ces données sommées permet d'identifier les caractéristiques de la source qui sont indépendantes du temps. L'application de cette méthode à des données bruitées donne des résultats satisfaisants (Fig. 1), dont la relative stabilité par rapport au bruit (Fig. 2) résulte du caractère intégré dans le temps de la formulation.

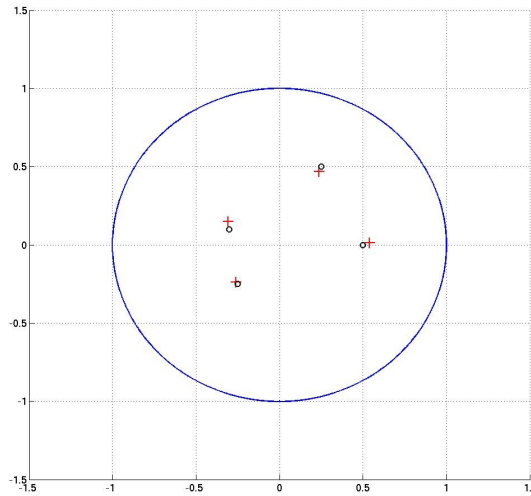


FIG. 1: Identification de 4 sources ponctuelles réalisée avec 5% de bruit. Cercles noirs : sources réelles ; croix rouges : sources reconstruites. L'algorithme a trouvé une bonne solution.

	0%	0.5%	1%	5%	10%
$\max(err_{rel}(Localisation))$	0.27%	1.18%	2.29%	11.63%	14.52%
$\max(err_{rel}(Intensity))$	0.84%	2.59%	5.61%	22.32%	23.76%

FIG. 2: Erreurs relatives maximales sur la localisation spatiale et la détermination de l'intensité pour différents niveaux de bruit (identification de 4 sources actives).

Remerciements. Le travail présenté dans cette communication est financé par le projet ANR QIRD-THS.

Références

- [1] V. Isakov. *Inverse source problems*. American Mathematical Society, 1989.
- [2] A. El Badia and T. Ha Duong. Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements. *Inverse Problems*, **14**:883–891, 1998.
- [3] A. El Badia and T. Ha Duong. An inverse source problem in potential analysis. *Inverse Problems*, **16**:651–663, 2000.
- [4] S. Andrieux, A. Ben Abda, and T. N. Baranger. Data completion via an energy error functional. *Comptes Rendus Mécanique*, **333**:171–177, 2005.