



HAL
open science

Identification de sources de chaleur dans le contexte de la thermographie infrarouge

Nicolas Auffray, Marc Bonnet, Stéphane Pagano

► **To cite this version:**

Nicolas Auffray, Marc Bonnet, Stéphane Pagano. Identification de sources de chaleur dans le contexte de la thermographie infrarouge. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p.; Clé USB. hal-00592878

HAL Id: hal-00592878

<https://hal.science/hal-00592878v1>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Identification de sources de chaleur dans le contexte de la thermographie infrarouge

N. Auffray^{1,3}, M. Bonnet¹, S. Pagano²

¹ LMS, École Polytechnique, France, bonnet@lms.polytechnique.fr

² LMGC, Université Montpellier 2, France, stephane.pagano@univ-montp2.fr

³ MSME, Université Marnes-La-Vallée Paris-Est, France, nicolas.auffray@univ-mlv.fr

Résumé — La déformation d'un matériau s'accompagne d'une variation de sa température. La détermination des sources volumiques ayant produites cette variation nous renseigne sur les processus de dissipation intrinsèque ainsi que les couplages présents au sein du matériau. Il est pour se faire nécessaire de relier le champ de température observé au cours de l'essai aux sources volumiques l'ayant engendré. Une méthode inverse adaptée à cette problématique est proposée dans cet article, la technique se base sur une extension au cas temporel de la méthode d'écart à la réciprocité. Sous certaines hypothèses le nombre de sources, leur position et leur énergie intégrée dans le temps sont retrouvées. La méthode bien que non-itérative présente une bonne stabilité vis-à-vis de mesures bruitées.

Mots clés — Problème inverse, Équation de la chaleur, Identification de sources, Thermographie infrarouge, Écart à la réciprocité, Méthode non-itérative.

1 Introduction

Motivation physique. Les variations de température induites par la dissipation intrinsèque et les couplages thermomécaniques sont régies par l'équation de la chaleur (1) résultant des premier et second principes de la thermodynamique :

$$\rho C \partial_t \vartheta - k \Delta \vartheta = f, \quad (1)$$

où ρ , C , k représentent respectivement la masse volumique, la capacité thermique spécifique et la conductivité thermique. Le terme source f de (1) se décompose de la manière suivante [5] :

$$f = d_i + \rho \vartheta \partial_{\vartheta \alpha_j} \Psi \cdot \alpha_j \quad (2)$$

où d_i représente la dissipation intrinsèque (causée par exemple par la plasticité) tandis que le potentiel d'énergie libre $\Psi_{,\vartheta \alpha_j}$ et les variables internes α_j sont associés aux couplages thermo-mécaniques (par exemple, la thermoélasticité).

L'évaluation de la source donne d'importantes informations sur le comportement thermomécanique du matériau étudié. Le champ de température en surface d'un échantillon peut être mesuré par thermographie infrarouge, ce qui permet d'accéder à des informations sur la source thermique par inversion de l'équation de la chaleur. Ce travail porte sur la résolution numérique de ce problème d'inversion.

Problème inverse. L'identification de source dans l'équation de la chaleur à partir de mesures surfaciques est un problème difficile [2, 8]. On trouve dans la littérature de nombreuses méthodes itératives pouvant être utilisées pour traiter ce problème [6, 4, 7]. Toutefois elles ont comme défauts commun d'être sensibles à leur point d'initialisation et coûteuses en temps de calcul (nombreuses évaluations du problème direct). Dans la présente contribution on s'intéressera à l'étude d'un algorithme de résolution non-itératif basé sur la méthode de l'écart à la réciprocité. Cet algorithme pourra être considéré soit comme une méthode d'inversion à part entière lorsque la qualité de la solution obtenue est suffisante, ou bien comme un préconditionneur associé à une méthode itérative et donnant un "bonne" estimation du point d'initialisation de l'algorithme.

Notations. On note Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^p ($p = 2, 3$: dimension de l'espace physique) dont la frontière $\partial\Omega$ admet presque partout une normale unitaire n . Le problème d'évolution thermique

est défini dans le cylindre espace-temps $Q = \Omega \times [0, T]$ de frontière latérale $\Sigma = \partial\Omega \times [0, T]$ (fig.1). Pour éviter toute confusion dans les paramètres temporels, nous adopterons la convention suivante :

- t représente la variable temps ;
- les grandeurs notées avec un petit t représentent des occurrences temporelles ;
- les grandeurs notées avec un grand T représentent des durées.

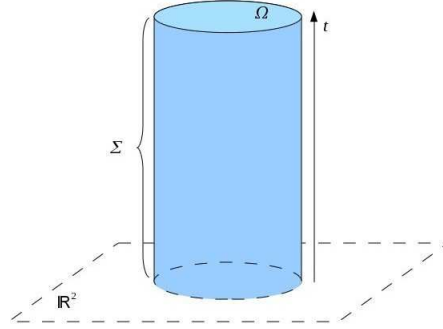


FIGURE 1 – Cylindre espace-temps

Équation adimensionnalisée. On complète l'équation (1) avec la condition aux limites mixte suivante

$$\alpha\vartheta(x, t) + k\partial_n\vartheta(x, t) = \alpha\vartheta_{\text{ext}} + g(x, t) \quad (3)$$

qui traduit les transferts thermiques du matériau avec son environnement (ϑ_{ext} est le champ de température extérieure supposé uniforme et constant, et α est le coefficient de transfert thermique), ainsi que la condition initiale

$$\vartheta(x, 0) = \vartheta_{\text{ext}}. \quad (4)$$

Le changement de variable $\theta = \vartheta - \vartheta_{\text{ext}}$ permet de simplifier la formulation du problème direct, qui devient

$$\begin{cases} (\partial_t - k\Delta)\theta = f & \text{dans } Q, \\ (k\partial_n + \alpha)\theta = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \theta(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Posant alors

$$\tilde{x} = x/\bar{x}, \quad \tilde{t} = t/\bar{t}, \quad \tilde{\theta} = \theta/\bar{\theta}, \quad \tilde{f} = f/\bar{f}$$

où $\bar{\theta}$ est une température de référence non-nulle et $\bar{x}, \bar{t}, \bar{f}$ des grandeurs caractéristiques définies par

$$\bar{x} = k/\alpha, \quad \bar{t} = k^3/(\rho C \alpha^2), \quad \bar{f} = k^3/(\rho C \alpha^2 \bar{\theta})$$

le système d'équation (5) prend la forme adimensionnelle

$$(\partial_{\tilde{t}} - k\tilde{\Delta})\tilde{\theta} = \tilde{f} \quad \text{dans } \tilde{Q} \quad (6a)$$

$$(\partial_{\tilde{n}} + 1)\tilde{\theta} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Sigma} \quad (6b)$$

$$\tilde{\theta}(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}, \quad (6c)$$

Dans la suite, on utilise cette forme adimensionnelle, en omettant les tildes pour alléger les notations.

Le problème inverse auquel nous nous intéressons consiste à identifier la distribution de sources f à partir de la connaissance des températures $\theta_m(x, t)$ sur la frontière spatio-temporelle Σ :

$$\theta(x, t)|_{\Sigma} = \theta_m(x, t) \quad (7)$$

De plus, via l'utilisation de la condition aux limites (6b), connaissant $\theta_m(x, t)$ on connaît le flux en tout point de Σ

$$\partial_n\theta(x, t)|_{\Sigma} = -\theta_m(x, t). \quad (8)$$

Dans ce travail on fait l'hypothèse que θ_m est connu sur l'ensemble de la frontière.

Modélisation du terme source. Comme il est noté dans la littérature [8, 2], la première difficulté est qu'un terme source générique n'est pas identifiable. Pour résoudre ce problème des hypothèses doivent être introduites de manière à restreindre l'espace des solutions. Dans cet article, on fera l'hypothèse

d'une distribution de sources ponctuelles dont les variations temporelles sont décrites par des fonctions portes (la source est soit allumée, soit éteinte). Le terme source recherché est donc de la forme

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^N p_j \delta(x - s_j) \Pi\left(\frac{t - t_j}{\ell_j}\right) \quad (9)$$

où $\Pi(\cdot)$ est la fonction porte unitaire définie à partir de la fonction de Heaviside $H(\cdot)$ par

$$\Pi(t) = H\left(t + \frac{1}{2}\right) - H\left(t - \frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

La distribution de source (9) est décrite par la position spatiale s_j et temporelle t_j des sources élémentaires, leur intensité p_j ainsi que le temps d'allumage ℓ_j ; de plus, le nombre total de sources élémentaires est inconnu et doit donc être déterminé. On fera les hypothèses supplémentaires suivantes, les sources élémentaires sont spatialement distinctes (i.e. $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$) et sont inactives après un temps t^* (i.e. $t_j + \ell_j \leq t^*$, $1 \leq j \leq N$). Un seuil p_{thr} sur l'intensité des sources est également défini. Sous l'ensemble de ces hypothèses, le théorème 2.1 énoncé dans [3] s'applique, i.e. les sources sont identifiables de manière unique à partir de la connaissance en tout point et à tout instant de la température et du flux. Dans le cadre de la modélisation retenue, la méthode de l'écart à la réciprocité [1] est bien adaptée à la reconstruction des informations manquantes.

2 Méthode d'écart à la réciprocité

Pour reconstruire les informations manquantes il est nécessaire d'avoir des données surabondantes. Dans notre cas, on suppose connu en tout point de la frontière et à tout instant le champ de température ainsi que le flux (via la condition aux limites), i.e.

$$\begin{cases} \bar{\theta}(x, t) = \theta(x, t) \\ \bar{\phi}(x, t) = \partial_n \theta(x, t) \end{cases} \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \quad (11)$$

La fonctionnelle d'écart à la réciprocité (FER) est obtenue par convolution du problème direct avec un champ adjoint ψ vérifiant l'équation de la chaleur rétrograde :

$$(\partial_t + \Delta)\psi(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in Q \quad (12)$$

En appliquant la troisième identité de Green à (6a) et (12), en intégrant le résultat sur $\tau \in [0, t]$, et en utilisant la condition au limite (6b) ainsi que les observations (7), on obtient :

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega} (\partial_n \psi + \psi) \theta_m ds d\tau + \int_{\Omega} (\theta_t \psi_t - \theta_0 \psi_0) dv = \int_0^t \int_{\Omega} (f \psi - \theta g) dv d\tau \quad (13)$$

Cette identité relie les informations situées dans le cylindre spatio-temporel Q tronqué au temps t aux observations sur sa frontière. Ceci peut se récrire symboliquement

$$\mathcal{R}(\psi, t) = \mathcal{S}(\psi, t) \quad \forall \psi \text{ solution de (12), } \forall t \in [0, T] \quad (14)$$

où la fonctionnelle source \mathcal{S} est définie par

$$\mathcal{S}(\psi, t) := \int_0^t \int_{\Omega} (f \psi - \theta g) dv d\tau \quad (15)$$

et \mathcal{R} est la fonctionnelle d'écart à la réciprocité (FER) définie par

$$\mathcal{R}(\psi, t) := \mathcal{R}_L(\psi, t) + \mathcal{R}_B(\psi, t) \quad (16)$$

La FER se décompose en une partie "latérale" \mathcal{R}_L regroupant les mesures sur $\partial\Omega \times [0, t]$ et une partie "base" \mathcal{R}_B collectant les informations aux instants initial et final :

$$\mathcal{R}_L(\psi, t) := \int_0^t \int_{\partial\Omega} (\partial_n \psi + \psi) \theta_m ds d\tau, \quad \mathcal{R}_B(\psi, t) := \int_{\Omega} (\theta_t \psi_t - \theta_0 \psi_0) dv \quad (17)$$

Dans le cadre de nos hypothèses, pour $t > t^*$ toutes les sources sont éteintes et le système évolue vers une position d'équilibre thermique. De manière plus précise, on peut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(x, t) = 0 \quad (18)$$

ce qui conduit à

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{R}_B(\psi, t) = 0 \quad (19)$$

pour tout champ adjoint restant borné quand $t \rightarrow +\infty$. De fait, pour un temps d'observation infini, on obtient :

$$\mathcal{R}_L(\psi, \infty) = \mathcal{S}(\psi, t^*) \quad (20)$$

3 Problème elliptique limite

L'utilisation numérique de l'équation de chaleur rétrograde comme équation adjointe est délicate. On peut lui substituer une équation de Laplace en intégrant temporellement l'équation de la chaleur. On définit les quantités suivantes :

$$\Theta(x) = \int_0^\infty \theta(x, \tau) d\tau \quad ; \quad F(x) = \int_0^\infty f(x, \tau) d\tau \quad (21)$$

Comme, par hypothèses, pour tout temps $t \geq t^*$ les sources sont inactives ces intégrales sont bien définies et satisfont l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta \Theta = F \quad \text{dans } \Omega \quad (22a)$$

$$(\partial_n + 1)\Theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (22b)$$

De fait, pour tout champ harmonique adjoint Ψ , l'utilisation de l'identité de Green conduit à la relation d'écart à la réciprocité (RER) suivante :

$$\int_{\partial\Omega} \Theta_m (\partial_n \Psi + \Psi) ds = - \int_{\Omega} F \Psi dv \quad (23)$$

dans laquelle Θ_m est l'intégrale sur le temps de θ_m . En injectant le terme source postulé (9), on obtient

$$\int_{\Omega} F \Psi dv = \mathcal{H}(\Psi, \infty) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Psi(s_j) \quad (24)$$

avec $\lambda_j = p_j \ell_j$. La procédure d'intégration temporelle ayant réduit l'équation de la chaleur à une équation de Poisson, la méthode proposée par [2] pour exploiter la FER dans le cas elliptique peut être utilisée.

4 Identification

Choix des champs adjoints. On se place dans le plan complexe en associant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} via $z = (x_1 + ix_2)$, et on utilise des polynômes complexes comme champs adjoints. Ces fonctions étant holomorphes elles sont harmoniques en leurs parties réelle et imaginaire. On définit donc la famille suivante de champs adjoints :

$$\Psi_k(x) = z^k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (25)$$

Pour cette famille de champs adjoints la FER s'écrit (avec $n_z = n_x + in_y$)

$$\alpha_k := \mathcal{R}(\Psi_k, \infty) = \int_{\partial\Omega} \Theta_m (kn_z + z) z^{k-1} ds \quad (26)$$

et, en notant S_j l'affixe de la j -ème source, la RER (23) devient :

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j S_j^k = \alpha_k \quad (27)$$

Processus de reconstruction. On va résumer la procédure de reconstruction proposée dans [2] pour l'identification de sources dans un problème elliptique. On fait tout d'abord une hypothèse sur la borne supérieure $M \geq N$ sur le nombre de sources N . On assemble ensuite les valeurs de la FER α_k (qui synthétisent les informations dont on dispose) dans des matrices dites d'observation $H_{m,n}^0$ et $H_{m,n}^1$ de taille $m \times n$ définies par

$$H_{m,n}^0 = [\mathcal{R}(\Psi_{i+j-2}, \infty)]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \quad (28a)$$

$$H_{m,n}^1 = [\mathcal{R}(\Psi_{i+j-1}, \infty)]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad (28b)$$

Les grandeurs inconnues N , S_j et λ_j sont ensuite obtenues appliquant la procédure suivante (Théorème 2 de [2]) :

1. Le rang de $H_{M,M}^0$ vaut N , et ses N premières colonnes sont linéairement indépendantes (i.e. H_n^0 est de rang N pour tout $n \geq N$). De fait N est évalué via l'évaluation du rang de $H_{M,n}^0$ pour des valeurs croissantes de n jusqu'à ce qu'une valeur stabilisée soit atteinte, qui est donc N .
2. Une fois que N est connu, les positions S_j des sources élémentaires sont obtenues comme les valeurs propres de $H_{N,N}^1 (H_{N,N}^0)^{-1}$.
3. Et finalement, une fois que l'on connaît N et S_j , l'intégrale temporelle de l'intensité λ_j est obtenue en résolvant l'équation (27), linéaire en λ_j , avec $0 \leq k \leq N-1$.

L'implémentation de cette procédure passe par le calcul préalable des quantités $\alpha_k := \mathcal{R}(\Psi_k, \infty)$ pour $0 \leq k \leq 2M-1$. De plus, il est à noter que la matrice $[S_j^k]$ ($0 \leq k \leq N-1$, $1 \leq j \leq N$) apparaissant dans la dernière étape de la procédure d'identification est de type Vandermonde, de fait l'estimation des λ_j est très sensible aux erreurs de calcul sur les $\{\alpha_k\}$.

5 Étude numérique

On présente maintenant une mise en œuvre numérique de la méthode proposée, dans le cadre d'un problème thermique d'évolution. Le domaine Ω considéré est le disque unité. La donnée θ_m est simulée pour un ensemble de 4 sources dont les caractéristiques sont :

source #	x_j	y_j	t_{mj}	ℓ_j	p_j
S_1	0.25	0,5	0.025	0.05	1
S_2	-0.25	-0.25	0.125	0.05	1
S_3	0.5	0	0.225	0.05	1
S_4	-0.3	0.1	0.425	0.05	1

TABLE 1 – Paramètres des termes sources

Cette simulation a été effectuée au moyen de Comsol, les principaux paramètres de calcul étant : éléments de Lagrange quadratiques, temps d'extinction des sources $T^* \sim 0.5$, durée de mesure $T_{\text{obs}} = 4 \sim 8T^*$, pas de temps $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$. La méthode de reconstruction est ensuite appliquée de la manière suivante : prise en compte de 480 points de mesure sur $\partial\Omega$, évaluation des intégrales avec la méthode des trapèzes et définition d'un seuil (défini ci-après) $\lambda_{thr} = 0.02$.

Estimation du nombre de sources. Dans le cas théorique, on détermine le nombre de sources par le rang de la matrice d'observation. Pour utiliser cette approche à des mesures réelles, on définit un rang numérique N_{est} ne retenant que les sources d'énergie supérieure à un seuil λ_{thr} . Le rang numérique N_{est} est estimé pour des valeurs croissantes de M la borne supérieure sur le nombre de sources. Lorsque les données sont peu bruitées N_{est} croît linéairement avec M avant d'atteindre une valeur plateau qui correspond au nombre de sources estimé. Pour des niveaux de bruit plus conséquents, même si le plateau n'est pas atteint on constate que la valeur moyenne de N_{est} donne une bonne idée du nombre de sources. Pour des niveaux de bruit trop importants, les sources fictives sont d'intensité équivalentes aux réelles et on ne peut plus conclure. Les figures 2 et 3 illustrent cette procédure, respectivement pour des données sans et avec bruit. Pour les 2 situations on peut conclure que 4 sources sont actives.

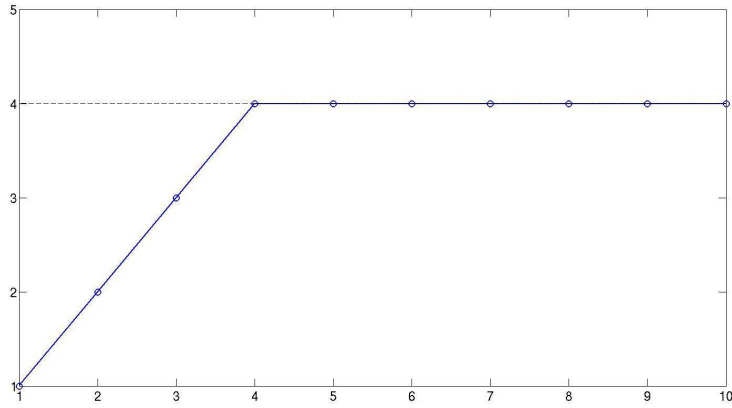


FIGURE 2 – Graphe de $N_{est}(M)$ dans une situation non-bruitée.

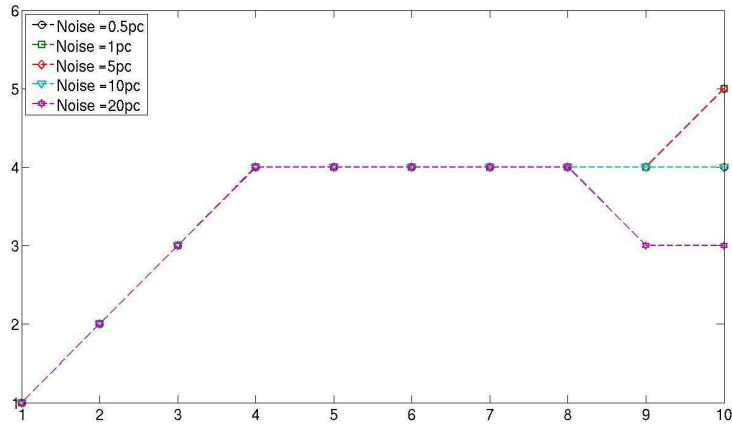


FIGURE 3 – Graphe de $N_{est}(M)$ pour divers niveaux de bruit (480 points de mesures).

Les mesures ont été bruitées avec un bruit blanc gaussien dont le niveau est donné par rapport à l'amplitude maximale du signal d'entrée. Ce niveau de bruit peut être converti en niveau SNR (Signal-to-noise ratio) via la relation :

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right) = -20 \log_{10}(\beta) \quad (29)$$

Reconstruction : Données non-bruitées. En utilisant la procédure présentée en début de section on détermine que $N = 4$. La figure 4 représente l'évolution des valeurs singulières de $\text{SV}(H_{M,\alpha_0}(t))$ pour des temps $t \leq T$ croissants. Les 4 valeurs singulières dominantes se stabilisent pour $t \approx 1$; au temps final σ_5 est environ 100 fois plus petite que σ_4 , ce qui induit une estimation correct du nombre de source en transitoire. Les erreurs de reconstruction en % sont données dans la table 2. L'évaluation des deux quantités est précise dans le cas de données non bruitées.

$\text{err}_{\%}(loc_{rec})$		$\text{err}_{\%}(p_{rec})$	
Moy.	Max.	Moy.	Max.
0.1303	0.2925	0.2925	0.8706

TABLE 2 – Erreurs de reconstruction sur la position des sources et l'intégrale de l'intensité

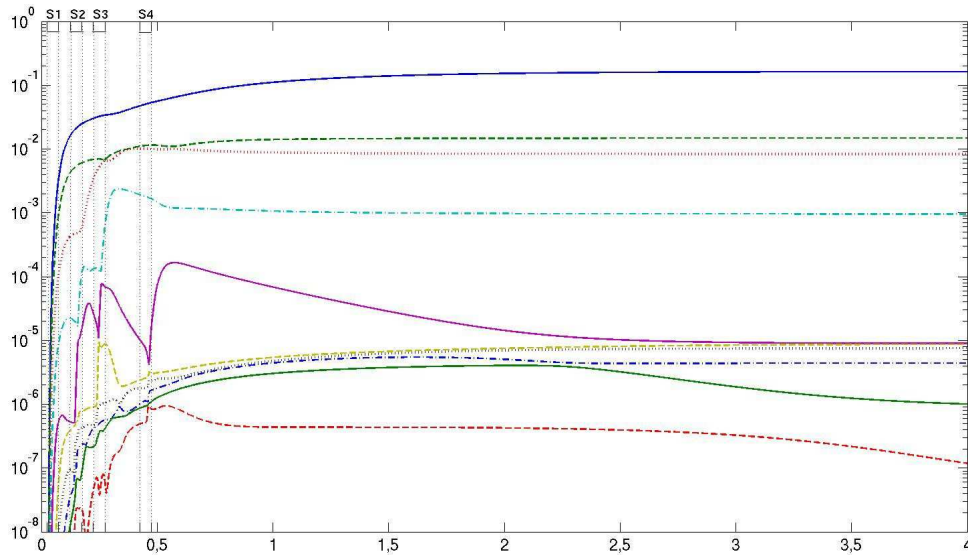


FIGURE 4 – Convergence temporelle des valeurs singulières de $SV(H_{M,\alpha_0}(t))$

Reconstruction : Données bruitées. On a appliqué l’algorithme à des données bruitées. Les erreurs de reconstruction en % sont données dans les tableaux 3 (480 points de mesures) et 4 (1920 points de mesures) pour des niveaux de bruit allant jusqu’à 20%. Comme pressenti lors de l’étude théorique, l’estimation de l’intensité est plus sensible au bruitage des données. L’augmentation du nombre de points de mesure augmentent sensiblement la qualité de la reconstruction. On constate que même si la qualité des résultats se détériorent avec l’accroissement du bruit ceux-ci restent acceptables compte tenu de la nature non-iterative du processus.

β	$err_{\%}(loc_{rec})$		$err_{\%}(p_{rec})$	
	Mean	Max.	Mean	Max.
0.5%	0.9572	2.0606	1.9607	3.2913
1%	0.9053	1.9215	1.3112	2.5153
5%	1.9539	3.9277	2.6381	4.5456
10%	8.9252	18.8347	15.6514	28.3021
20%	16.1834	42.5431	29.5745	57.4956

TABLE 3 – Erreurs de reconstruction pour des niveaux de bruit β croissants (480 points de mesures)

β	$err_{\%}(loc_{rec})$		$err_{\%}(p_{rec})$	
	Mean	Max.	Mean	Max.
0.5%	0.4574	1.1853	1.1044	2.5915
1%	1.1057	2.2965	2.7885	5.6152
5%	5.0580	11.6325	11.9349	22.3278
10%	7.9087	14.5239	9.3627	23.7688
20%	8.5736	15.6669	20.62005	40.0952

TABLE 4 – Erreurs de reconstruction pour des niveaux de bruit β croissants (1920 points de mesures)

6 Conclusion

La méthode que l’on vient d’introduire permet d’obtenir en une seule opération des informations "statiques" caractérisant le terme source de l’équation de la chaleur, à savoir (i) le nombre de sources thermiques distinctes, (ii) leur position spatiale, et (iii) leur intensité intégrée dans le temps. Même si ces informations sont incomplètes dans la plupart des situations, cette technique d’inversion est extrêmement rapide et permet d’obtenir de précieuses informations pouvant servir de point de départ à une méthode

itérative. De plus, en dépit de son caractère direct, la méthode possède une relativement bonne stabilité par rapport à l'ajout de bruit. Cette robustesse permet d'envisager son utilisation dans un contexte expérimental. Finalement, l'application de cette méthode à des sources spatialement étendues nous permet d'identifier le centre de ces sources.

Références

- [1] S. Andrieux and A. Ben Abda. *The reciprocity gap : a general concept for f/laws identification problems.*, Mechanics Research Communications, 20, 415–420, 1993.
- [2] A. El Badia, T. Ha Duong. *An inverse problem in potential analysis*, Inverse Problems, 16, 651–663, 2000.
- [3] A. El Badia, T. Ha Duong. *An inverse problem in heat equation and application to pollution problem*, Journal of inverse and ill-posed problems, 10, 585–599, 2002.
- [4] J. Baumeister, A. Leitão. *On Iterative methods for solving ill-posed problems modeled by PDE's*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 9, 13–29, 2001.
- [5] A. Chrysochoos. *La thermographie infrarouge, un outil en puissance pour étudier le comportement des matériaux.*, Mécanique et Industries, 3, 3–14, 2002.
- [6] A. Capatina, R. Stavre. *Algorithms and convergence results for an inverse problem in heat propagation*, International Journal of Engineering Science, 38, 575–578, 2000.
- [7] M. Farah. *Problèmes inverses de sources et liens avec l'Electro-Encéphalo-Graphie*, Thèse de doctorat, UTC Compiègne, 2007.
- [8] V. Isakov. *Inverse source problems*, American Mathematical Society, 1989.