

Eléments finis espace-temps 4D

F. Jourdan¹, S. Dumont²

¹ LMGC, CNRS UMR 5508, Université Montpellier 2, France, franck.jourdan@univ-montp2.fr

² LAMFA, CNRS UMR 6140, Université de Picardie Jules Verne, France, serge.dumont@u-picardie.fr

1 Résumé

Nous proposons dans cet article une réflexion sur la résolution de problèmes mécaniques comprenant trois dimensions dans l'espace et une dans le temps, en utilisant la Méthode des Eléments finis Espace-Temps (STFEM). Cette méthode se distingue des autres par l'utilisation d'une interpolation de même nature sur l'espace et sur le temps. La STFEM n'est pas une méthode très répandue. Elle peut être considérée comme une extension de la méthode des éléments finis "classique", dans le sens où elle s'applique, à un problème aux limites issu d'un problème d'évolution. Actuellement, plusieurs approches existent, on peut citer, la méthode à grands incréments de temps (LATIN [6]), la méthode de "Galerkin Discontinue", et la notre que l'on nommera "méthode de Galerkin Semi-Discontinue". Dans la plupart des publications sur la méthode de Galerkin Discontinue [4], les fonctions d'interpolation sont considérées comme étant le produit de fonctions d'espace et de temps. Nous verrons dans ce papier qu'une attention particulière sera portée à la non séparation des variables espace et temps. La raison de ce choix n'est pas motivée par des questions de précisions de résultats, mais plutôt par ce qui constitue le fond de notre étude à savoir le remaillage. Nous montrerons, en effet, que ce type d'interpolation est adapté au remaillage. Le remaillage espace-temps que nous avons développé est basé sur une méthode de construction de maillages espace-temps non structurés couplée à une méthode de résolution frontale. Ce remaillage a été appliqué à différents problèmes mécaniques et notamment de contact avec frottement [1]. Lors de problèmes de contact, il est nécessaire d'avoir un maillage fin autour de la zone de contact. Le plus souvent, cette zone de contact est évolutive. Ainsi pour gagner du temps de calcul, il apparaît intéressant de construire un maillage évolutif qui suit la zone de contact.

Notons qu'un des inconvénients de la STFEM telle qu'elle est définie dans les travaux de [5] et [3] est la taille des systèmes à résoudre. Utiliser un maillage stratifié couplé à une méthode de résolution frontale, tel que nous le faisons, permet de ne pas assembler la matrice totale du problème, mais seulement des sous-matrices. Ceci réduit considérablement la taille des systèmes à résoudre. La taille de ces systèmes linéaires est exactement la même que celle obtenue dans le cas des approches couplant les méthodes incrémentales de type différences finies en temps à la méthode d'éléments finis en espace.

Construire un élément fini 4D ne pose pas de réels problèmes, si ce n'est des problèmes de représentation (voir figure 1). Par contre, construire un maillage 4D, même le plus élémentaire, est loin d'être trivial, excepté dans le cas de maillages réguliers formés d'éléments finis de type multiplex (fonctions d'interpolations obtenues comme le produits de fonctions d'espace par des fonctions du temps). Dans les autres cas, le maillage reste une difficulté. Pourtant, pour montrer que la méthode STFEM est efficace, il faut aller beaucoup plus loin et proposer une technique de remaillage 4D par méthode frontale. C'est à dire proposer une généralisation de celle présenté dans les articles [1] et [2]. Pour montrer toute la difficulté de l'étude, en voici quelques développements.

Dans la figure 1 sont représentées des parties élémentaires de maillages 2D, 3D et 4D avec les numéros des noeuds. On note n_0 le nombre total de noeuds à l'instant $t = 0$ du maillage espace entier, et l'on suppose qu'à l'instant $t = h$ le nombre de noeuds reste le même. Pour le maillage 2D, les connectivités sont

$$\begin{aligned} & i, j, n_0 + i \\ & j, n_0 + i, n_0 + j. \end{aligned}$$

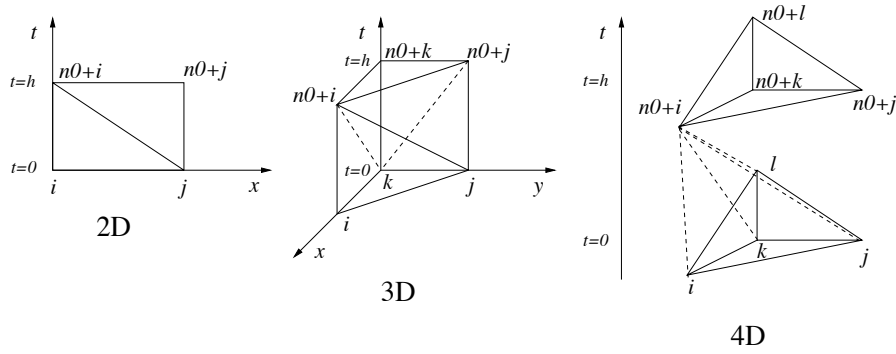


FIGURE 1 – Maillages espace-temps 2D, 3D et 4D

Pour le maillage 3D, les connectivités sont

$$\begin{aligned} & i, j, k, n_0 + i \\ & j, k, n_0 + i, n_0 + j \\ & k, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k. \end{aligned}$$

En s'inspirant de ce qui précède, on propose la généralisation suivante des connectivités pour le maillage 4D

$$\begin{aligned} & i, j, k, l, n_0 + i \\ & j, k, l, n_0 + i, n_0 + j \\ & k, l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k \\ & l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k, n_0 + l. \end{aligned}$$

A partir du maillage 4D ci-dessus, qui précisons le ne comporte qu'un seul élément dans l'espace, nous devons vérifier que l'intégralité du volume espace-temps est occupé par l'ensemble des éléments finis 4D du maillage. Nous devons vérifier aussi que les hyperfaces communes aux éléments sont coïncidentes. Ensuite se pose la question de savoir comment construire un maillage comportant plus d'éléments. Ces réflexions constituent un point de départ qui sera développé dans l'article.

Finalement pour compléter notre étude, un exemple élémentaire d'élastodynamique sera présenté pour illustrer la faisabilité de la méthode en dimension 4.

Références

- [1] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, *Frictional contact solver and mesh adaptation in Space-Time Finite Element Method*, European Journal of Mechanics A/solids, vol. 22, 633-647, 2003
- [2] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, *Méthode des éléments finis espace-temps et remaillage*, Revue Européenne des éléments finis, Vol. 12 - n°4, pp 427-459, 2003
- [3] M. Anderson, J.-H. Kimn, *A numerical approach to space-time finite elements for the wave equation*, Journal of Computational Physics, Volume 226, Issue 1, Pages 466-476, 2007
- [4] C. C. Chien, C. S. Yang, J. H. Tang, *Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous Galerkin finite element method*, Finite Elements in Analysis and Design, Volume 39, Issue 7, Pages 561-580, 2003
- [5] A. V. Idesman, *Solution of linear elastodynamics problems with space-time finite elements on structured and unstructured meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 196, Issues 9-12, Pages 1787-1815, 2007
- [6] P. Ladevèze, *Non linear computational structural mechanics, new approaches and non incremental methods of calculation*, Springer Verlag, 1999.