



**HAL**  
open science

## Eléments finis espace-temps 4D

Franck Jourdan, Serge Dumont

► **To cite this version:**

Franck Jourdan, Serge Dumont. Eléments finis espace-temps 4D. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592876

**HAL Id: hal-00592876**

**<https://hal.science/hal-00592876v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Eléments finis espace-temps 4D

F. Jourdan<sup>1</sup>, S. Dumont<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMGC, CNRS UMR 5508, Université Montpellier 2, France, franck.jourdan@univ-montp2.fr

<sup>2</sup> LAMFA, CNRS UMR 6140, Université de Picardie Jules Verne, France, serge.dumont@u-picardie.fr

**Résumé** — Nous proposons dans cet article une réflexion sur la résolution de problèmes mécaniques comprenant trois dimensions dans l'espace et une dans le temps, en utilisant la Méthode des Eléments finis Espace-Temps. Nous proposons une technique de génération de maillages 4D adaptée au remaillage. Il s'agit d'une approche originale, que nous avons testée sur un problème d'élastodynamique en HPP. Cette technique ne nécessite pas de reprojexion du maillage grossier sur le maillage fin et permet de conserver des systèmes à résoudre de taille identiques aux méthodes classiques.

**Mots clés** — Eléments finis, espace-temps, 4D, élasto-dynamique.

## 1 Introduction

La STFEM (Space Time Finite Element Method) n'est pas une méthode très répandue. Elle peut être considérée comme une extension de la méthode des éléments finis "classique", dans le sens où elle s'applique à un problème aux limites issu d'un problème d'évolution. Actuellement, plusieurs approches existent. On peut citer par exemple la méthode à grands incréments de temps (LATIN [15]), la méthode de "Galerkin Discontinue" [9, 10, 14], et la notre que l'on nommera "méthode de Galerkin Semi-Discontinue". Dans la plupart des publications sur la méthode de Galerkin Discontinue [4], les fonctions d'interpolation sont considérées comme étant le produit de fonctions d'espace et de temps. Nous verrons dans ce papier qu'une attention particulière sera portée à la non séparation des variables espace et temps. La raison de ce choix n'est pas motivée par des questions de précisions de résultats, mais plutôt par ce qui constitue le fond de notre étude à savoir le remaillage. Nous verrons que ce type d'interpolation est adapté au remaillage. Le remaillage espace-temps que nous avons développé est basé sur une méthode de génération de maillages espace-temps non structurés. La construction d'un maillage 4D se heurte aux limites de représentation. Pour contourner cette difficulté, nous proposons une méthode de construction automatique inspirée de ce qui se fait en 2D et 3D. Notre technique de remaillage a été appliquée à un problème de charge mobile modélisant des actions de contact. Notre approche permet de construire un maillage évolutif capable de suivre la zone de contact.

Notons qu'un des inconvénients de la STFEM telle qu'elle est définie dans les travaux de [3] et [11] est la taille des systèmes à résoudre. Utiliser un maillage stratifié tel que nous le faisons permet de ne pas assembler la matrice totale du problème, mais seulement des sous-matrices. Ceci permet de réduire considérablement la taille des systèmes à résoudre. La taille de ces systèmes linéaires est exactement la même que celle obtenue dans le cas des approches couplant les méthodes incrémentales de type différences finies en temps à la méthode d'éléments finis en espace.

## 2 Principes de la méthode

L'objectif de cette étude étant d'appliquer une méthode d'éléments finis, le problème d'évolution est à considérer comme un problème aux limites sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ . Dans ce problème aux limites, la condition sur la vitesse initiale (à  $t = 0$ ) et une éventuelle condition sur la vitesse finale (à  $t = T$ ), par exemple si le système est arrêté brutalement, sont considérées comme des conditions aux limites. Ces conditions peuvent mener à des discontinuités de vitesse où du point de vue dual à des impulsions. De la même manière que dans la méthode de Galerkin discontinue [8, 9, 13] et que dans la méthode à grands incréments de temps (LATIN) [15], [12], la formulation variationnelle est établie sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ .

Dans cette approche, l'inconnue principale est le déplacement  $u$  et les déformations sont supposées petites. On note  $\varepsilon$  le tenseur des déformations et  $a$  le tenseur de Hooke. La formulation variationnelle en déplacements peut s'écrire :

Trouver le déplacement  $u \in U_{ad}$  tel que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\rho \ddot{u}v + a\varepsilon(u) : \varepsilon(v) - f_{dv}) dxdt = \int_0^T \int_{\partial_1\Omega} F_d v dsdt, \quad (1)$$

$$\forall v \in U_{ad}^0$$

où  $U_{ad}$  est l'ensemble des déplacements suffisamment réguliers, qui satisfont les conditions cinématiques et initiales,  $v$  est le déplacement virtuel et  $U_{ad}^0$  est l'ensemble des déplacements suffisamment réguliers, qui satisfont les conditions cinématiques et initiales nulles.

Afin de tenir compte, dans la formulation variationnelle, de la condition sur la vitesse initiale, le travail virtuel des quantités d'accélération est intégré par parties par rapport au temps. Ce qui donne,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{u}v dxdt = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \dot{u}v dxdt + \int_{\Omega} [\rho \dot{u}_T(x)v(x,T) - \rho \dot{u}_0(x)v(x,0)] dx \quad (2)$$

où  $\dot{u}_T(x)$  est la vitesse au temps  $t = T$ . L'approximation proposée dans cette étude est de type Galerkin en temps et en espace. L'interpolation espace-temps est construite à partir de polynômes de Lagrange. Les éléments finis sont isoparamétriques.

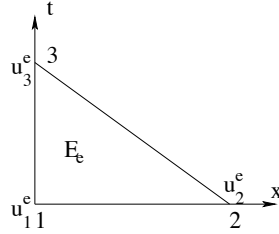


FIGURE 1 – Élément fini de référence en 2D espace-temps de type simplexe

Sur un élément fini espace-temps  $E_e$  (figure 1), le déplacement vérifie :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{n_e} \varphi_i^e(x,t) u_i^e \quad (3)$$

où  $n_e$  est le nombre de nœuds de l'élément  $E_e$ ,  $\varphi_i^e$  sont les fonctions d'interpolation et  $u_i^e$  les déplacements nodaux. La même interpolation est utilisée pour les déplacements virtuels  $v$ . La discrétisation espace-temps de la précédente formulation variationnelle mène au système linéaire suivant :

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = \{F_u\} + \{\Lambda\} \quad (4)$$

où  $[\widetilde{M}_u]$  est la matrice relative aux efforts d'inertie,  $[\widetilde{K}_u]$  la matrice relative aux efforts intérieurs,  $\{F_u\}$  le vecteur nodal relatif aux efforts extérieurs,  $\{\Lambda\}$  le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses et  $\{U\}$  le vecteur nodal des déplacements.

Considérons un maillage espace-temps construit par couches successives d'éléments dans le temps. On pourra parler de maillage "stratifié". Si de plus, les numéros des nœuds qui ont les mêmes coordonnées temporelles sont proches les uns des autres (figure 2), alors le membre de gauche du système (4) se met sous la forme

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = [T]\{U\} =$$

$$\begin{pmatrix} [T_{11}] & [T_{12}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [T_{21}] & [T_{22}] & [T_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{32}] & [T_{33}] & [T_{34}] & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & [T_{n/n-1}] & [T_{n/n}] & [T_{n/n+1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [T_{n+1/n}] & [T_{n+1/n+1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{U_0\} \\ \{U_1\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{U_n\} \end{pmatrix}$$

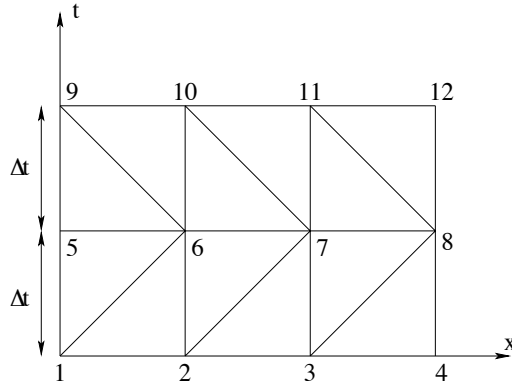


FIGURE 2 – Exemple d'un maillage 2D espace-temps

Par exemple, pour le maillage espace-temps de la figure 2, on a

$$\{U_0\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \{U_1\} = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} \text{ et } \{U_2\} = \begin{pmatrix} u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$$

En utilisant ce type de numérotation, la matrice totale  $[T]$  et les sous-matrices  $[T_{ij}]$  sont de type bande.

REMARQUES . — Le fait de choisir une interpolation de Lagrange pour les déplacements implique que les déplacements sont continus mais que les vitesses sont discontinues. Par conséquent l'intégration par parties (2) n'est pas exacte, il faut plutôt utiliser la formulation de la méthode de Galerkin discontinue, ce qui revient à écrire la dérivée de la vitesse au sens des distributions. Dans la suite nous conserverons la formulation (2), sachant que l'erreur commise est du même ordre que dans le cas d'éléments finis en espace classiques. En effet, avec une interpolation de Lagrange, le déplacement est continue alors que la déformation est discontinue. De plus, on peut montrer, dans le cas d'une interpolation linéaire, que la méthode de Galerkin discontinue et celle développée dans cet article donnent les mêmes résultats.

— Utiliser un maillage stratifié tel que nous l'avons défini, permet de ne pas assembler la matrice totale  $[T]$ , mais seulement les sous-matrices  $[T_{ij}]$ . Ceci réduit considérablement la taille des systèmes à résoudre. En fait, la taille de ces systèmes linéaires est exactement la même que celle obtenue dans le cas des approches couplant les méthodes incrémentales de type différences finies en temps à la méthode d'éléments finis en espace.

— Ensuite, il convient de préciser que le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses  $\{\Lambda\}$  est de la forme

$$\{\Lambda\} = (\{\Lambda_0\}, 0, \dots, 0, \{\Lambda_n\})^T$$

et que  $\{\Lambda_0\}$  est donné à partir des conditions sur la vitesse initiale, alors que  $\{\Lambda_n\}$  est inconnu. Par conséquent, la résolution du système (4) est effectuée de la manière suivante :

le premier système d'équations,

$$[T_{11}]\{U_0\} + [T_{12}]\{U_1\} = \{F_0\} + \{\Lambda_0\} \quad (5)$$

donne  $\{U_1\}$ , les systèmes d'équations,

$$[T_{i/i-1}]\{U_{i-2}\} + [T_{i/i}]\{U_{i-1}\} + [T_{i/i+1}]\{U_i\} = \{F_{i-1}\} \quad 2 \leq i \leq n, \quad (6)$$

donnent les déplacements  $\{U_i\}$  et le dernier système d'équations,

$$[T_{n+1/n}]\{U_{n-1}\} + [T_{n+1/n+1}]\{U_n\} = \{F_n\} + \{\Lambda_n\}, \quad (7)$$

donne  $\{\Lambda_n\}$ .

Insistons sur le fait que si l'on se réfère à la procédure classique adoptée dans la méthode des éléments finis, puisque l'on connaît  $\{U_0\}$  le premier système d'équations (5) ne doit pas servir à déterminer  $\{U_1\}$ . C'est le deuxième (6) qu'il faudrait utiliser. Et pourtant, ce n'est pas le cas. Cela vient du fait que l'on résout un problème d'évolution.

— Notons enfin que les matrices de résolution  $[T_{i/i+1}]$  sont généralement non symétriques, alors que la matrice totale  $[T]$  est symétrique. Ainsi, pour l'algorithme présenté ci-dessus, il faut utiliser un solveur non symétrique.

### 3 Maillage 4D et remaillage

Avant même de pouvoir bâtir une technique de remaillage, il faut être capable de construire un maillage 4D. Construire un élément fini 4D ne pose pas de réels problèmes, si ce n'est des problèmes de représentation (voir figure 3). Par contre, construire un maillage 4D, même le plus élémentaire, est loin d'être trivial, excepté dans le cas de maillages réguliers formés d'éléments finis de type multiplex (fonctions d'interpolations obtenues comme le produits de fonctions d'espace par des fonctions du temps). Dans les autres cas, et c'est principalement ceux qui nous intéressent pour le remaillage, le maillage reste une difficulté. Cependant, cette technique ne nécessite pas de reprojektion et permet de conserver des systèmes de taille identiques sur chaque intervalle de temps.

#### 3.1 Génération de maillage 4D

Dans la figure 3 sont représentées des parties élémentaires de maillages 2D, 3D et 4D avec la numération des nœuds. On note  $n_0$  le nombre total de nœuds à l'instant  $t = 0$  du maillage espace entier, et l'on suppose qu'à l'instant  $t = h$  le nombre de nœuds reste le même. Pour le maillage 2D, les connectivités

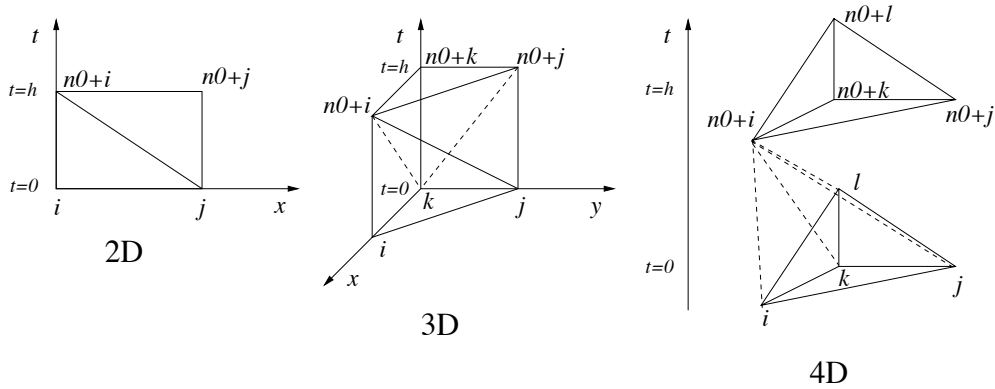


FIGURE 3 – Maillages espace-temps 2D, 3D et 4D

sont

$$\begin{aligned} & i, j, n_0 + i \\ & j, n_0 + i, n_0 + j. \end{aligned}$$

Pour le maillage 3D, les connectivités sont

$$\begin{aligned} & i, j, k, n_0 + i \\ & j, k, n_0 + i, n_0 + j \\ & k, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k. \end{aligned}$$

En s'inspirant de ce qui précède, on propose la généralisation suivante des connectivités pour le maillage 4D.

$$\begin{aligned} & i, j, k, l, n_0 + i \\ & j, k, l, n_0 + i, n_0 + j \\ & k, l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k \\ & l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k, n_0 + l. \end{aligned}$$

Nous proposons de construire les maillages 4D, issu de maillage 3D quelconques, en appliquant la technique de construction, développée ci-dessus, à chaque élément du maillage 3D. Mais dans ce cas, il faut s'assurer que l'intégralité du volume espace-temps est occupé par l'ensemble des éléments finis 4D du maillage. Pour se faire, nous avons calculé la somme des volumes des hypertétraèdres du maillage 4D et l'avons comparée au volume total engendré par l'objet 3D sur l'intervalle de temps.

Pour un maillage 3D constitué de tétraèdres, les interfaces entre les éléments sont des triangles. En 4D, ces interfaces sont des tétraèdres (voir schéma de droite de la figure 4). Nous devons donc vérifier que pour notre technique de génération de maillage, tous les éléments finis 4D mitoyens possèdent des tétraèdres communs. Comme nous utilisons une technique de construction à base de permutations circulaires, il faut respecter un ordre de rangement particulier des nœuds dans chaque élément fini 3D. Une façon de faire est de ranger les nœuds de chaque élément 3D dans l'ordre croissant. Le tableau 1 donne un exemple de table de connectivités pour un maillage 4D élémentaire, issu du maillage 3D représenté par le schéma de gauche de la figure 4. Notons que ce maillage 4D contient 8 éléments finis, contre 2 pour le maillage 3D source et que  $n_0 = 5$ . On observe que les connectivités sont rangées par ordre croissant. Dans ce cas, on vérifie bien que les tétraèdres remplissant l'interface espace-temps (schéma de droite de la figure 4) sont communs aux éléments mitoyens. En effet, les éléments 1 et 5 contiennent le tétraèdre (1 ; 2 ; 4 ; 6), les éléments 2 et 6 contiennent le tétraèdre (2 ; 4 ; 6 ; 7). Enfin, les éléments 4 et 7 contiennent le tétraèdre (4 ; 6 ; 7 ; 9).

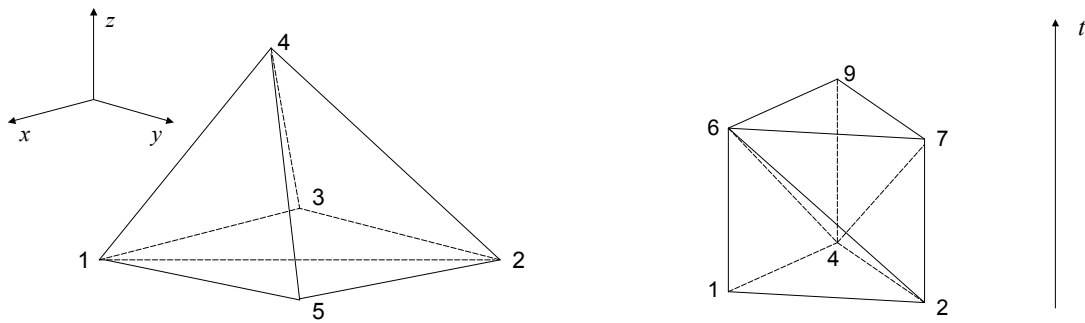


FIGURE 4 – Maillages 3D initial (schéma de gauche) ; Maillage 4D de la face (1 ; 2 ; 4) commune aux deux éléments finis du maillage 3D (schéma de droite)

TABLE 1 – Tableau des connectivités du maillage 4D issu du maillage élémentaire 3D de la figure 4

Numéro d'élément	nœud 1	nœud 2	nœud 3	nœud 4	nœud 5
1	1	2	3	4	6
2	2	3	4	6	7
3	3	4	6	7	8
4	4	6	7	8	9
5	1	2	4	5	6
6	2	4	5	6	7
7	4	5	6	7	9
8	5	6	7	9	10

### 3.2 Techniques de remaillage

Dans ce paragraphe nous présentons les techniques de remaillage espace-temps que nous avons développées. Dans la littérature, on trouve de nombreux articles sur le remaillage, [5], [6], .... Parmi ces

papiers, un bon nombre traite de remaillage espace-temps. Ces derniers utilisent la méthode de Galerkin discontinue, comme dans les travaux de Feng [7]. Dans la plupart, l’approche est incrémentale [16]. C’est à dire que le remaillage s’effectue à des pas de temps donnés. Le plus souvent, les valeurs des inconnues du nouveau maillage sont obtenues par approximation ou interpolation de celles de l’ancien maillage, ce que nous appellerons reprojection. De plus, l’interpolation utilisée est de type multiplex. La fonction d’interpolation est définie par le produit d’une fonction d’espace par une fonction du temps. Dans l’article [2], nous présentons une technique d’adaptation de maillage incrémentale qui ne nécessite pas de reprojections. Elle a été couplée à des problèmes de contact frottant (voir [1]). Par ailleurs, nous avons développé une technique de remaillage non incrémentale, basée sur des maillages espace-temps non structurés.

Certaines équipes se sont déjà penchées sur ce problème. On peut citer les travaux de Hugues et Hulbert [9, 10], Tezduyar [17, 18] et Idesman [11]. Ils utilisent la méthode de Galerkin discontinue. Dans ces approches, le calcul s’effectue sur tout le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ . Ainsi, pour un domaine  $\Omega$  de dimension  $d$  et un nombre total  $N$  de nœuds du maillage espace-temps, la dimension du problème linéaire à résoudre est  $d \times N$ , ce qui devient vite grand lorsque  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Une solution pour diminuer le temps de résolution est d’utiliser le calcul parallèle. C’est l’option choisie dans [11] et [3].

Dans l’article [2] nous avons proposé une solution non incrémentale, qui substitue à la notion de pas de temps, celle de “front espace-temps”. L’idée est de réduire la taille du problème, par l’emploi d’une résolution frontale originale. L’avantage de cette approche est de diminuer la taille des systèmes linéaires à résoudre. Faute d’automatisation de cette méthode frontale, nous ne pourrions pas aller plus loin dans cette direction.

Par contre, nous proposons une technique de remaillage particulière, bien adaptée à la STFEM. Il s’agit d’une approche incrémentale basée sur la construction de maillages espace-temps capables de suivre une zone de charge évolutive. Cette technique de génération de maillage 4D permet de conserver les matrices  $T_{i/i-1}, T_{i/i}, T_{i/i+1}$  identiques quelque soit  $i$ , ce qui entraîne une réduction du temps de calcul. La figure 5 en présente une illustration.

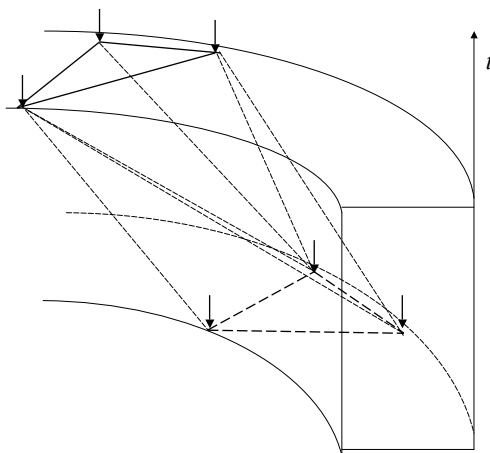


FIGURE 5 – Génération du maillage espace-temps, par rotation, de la surface chargée

Cet technique a pour ambition d’être appliquée à des problèmes d’usure en calcul des structures. Le principe est de conserver le même nombre de noeuds, mais en les disposant de telle manière qu’ils soient suffisamment nombreux sous la zone chargée. Un exemple d’application est fourni dans le paragraphe suivant.

## 4 Résultats numériques

Notre méthode de calcul par éléments finis espace-temps 4D a été programmée à l’aide du logiciel MATLAB et validée sur un exemple élémentaire du type de la figure 4. Nous avons constaté que notre méthode de génération de maillage 4D nécessitait d’avoir un découpage en temps très fin, du même ordre

que pour des méthodes d'intégration explicites. C'est déjà ce que nous avons constaté en 2D et 3D dans [2] lorsque l'interpolation était linéaire.

Par ailleurs, pour illustrer notre technique de remaillage, nous considérons l'exemple d'un disque de frein soumis au serrage d'une plaquette sur une de ses faces (voir modèle source figure 6) et bloqué sur la face opposée. Le disque est en acier de module de Young égal à 210.000 MPa, de coefficient de poisson égal à 0,3 et de masse volumique égale à 7800 kg/m<sup>3</sup>. Le maillage 3D contient 634 nœuds et 1752 éléments.

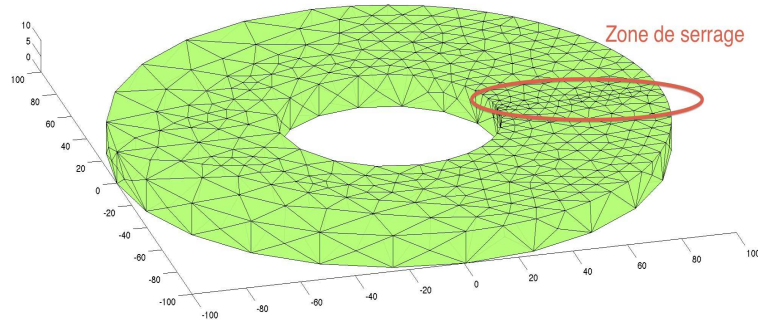


FIGURE 6 – Maillage 3D source : Le maillage est raffiné sous la zone de charge. Les dimensions sont en mm

Le serrage est modélisé par une zone de pression constante de 100 MPa. Cette zone est mobile et parcourt la circonférence du disque avec une vitesse de rotation égale à celle de la propagation d'onde. Nous construisons un maillage 4D incrémental, qui conserve le maillage 3D, mais en lui imposant une rotation axiale lui permettant de garder sa zone la plus raffinée sous la zone de charge, comme schématisé dans la figure 5.

Les résultats des calculs présentés dans la figure 7 sont obtenus pour un découpage en temps de 10<sup>-7</sup>s. Ils montrent que la zone raffinée reste bien sous la zone de serrage. La répartition des déplacements des nœuds, en norme, est similaire pour les deux positions de la charge. Notons que les déplacements des nœuds ne peuvent pas être identiques à cause des effets dynamiques. Il est important de signaler qu'il s'agit de déplacements incrémentaux et non de déplacements totaux.

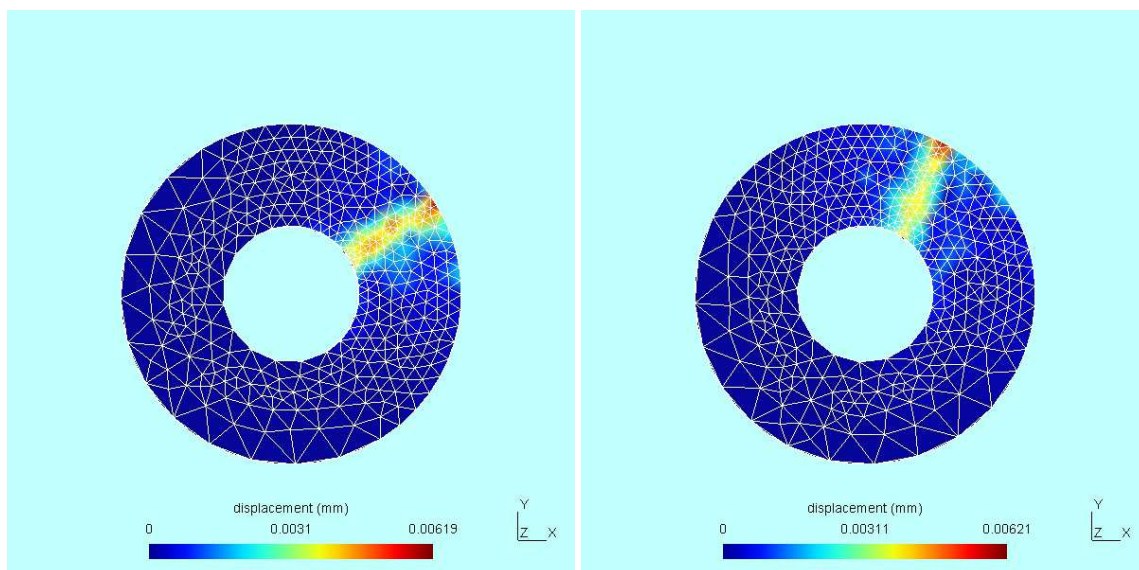


FIGURE 7 – Isovaleurs des normes des déplacements, exprimées en mm, à  $t = 2.10^{-5}$ s (vue de gauche) et à  $t = 4.10^{-5}$ s (vue de droite)



## 5 Conclusion

La méthode de génération de maillage espace-temps 4D que nous avons présentée dans cet article a permis de développer une technique d'adaptation de maillage capable de suivre une zone de charge mobile. Cette technique originale est bâtie pour assurer un coup de calcul minimal et ne nécessite pas de reprojektion du maillage grossier sur le maillage fin. Cependant, pour montrer l'étendue des capacités de cette méthode, il faut aller beaucoup plus loin dans les applications mécaniques et proposer une technique de remaillage 4D par approche frontale telle que présenté dans les articles [1] et [2].

## Références

- [1] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, *Frictional contact solver and mesh adaptation in Space-Time Finite Element Method*, European Journal of Mechanics A/solids, vol. 22, 633-647, 2003
- [2] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, *Méthode des éléments finis espace-temps et remaillage*, Revue Européenne des éléments finis, Vol. 12 - n°4, pp 427-459, 2003
- [3] M. Anderson, J.-H. Kimn, *A numerical approach to space-time finite elements for the wave equation*, Journal of Computational Physics, Volume 226, Issue 1, Pages 466-476, 2007
- [4] C. C. Chien, C. S. Yang, J. H. Tang, *Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous Galerkin finite element method*, Finite Elements in Analysis and Design, Volume 39, Issue 7, Pages 561-580, 2003
- [5] R. Donea, A. Huerta, J. Sarrate, *Arbitrary Lagrangian-Eulerian for fluid-rigid body interaction*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 190, pp. 3171-3188, 2001
- [6] C. Farhat, C. Degand, *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*, Computers and Structures , Vol. 80, pp. 305-316, 2002
- [7] Y. T. Feng, D. Peric , *A time-adaptive space-time finite element method for incompressible Lagrangian flows with free surfaces : computational issues*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 190, pp. 499-518, 2000
- [8] H. Huang, F. Costanzo, *On the use of space-time finite elements in the solution of elasto-dynamic problems with strain discontinuities*,
- [9] T. J. R., Hughes, G. Hulbert , *Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates* , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 66, pp 339-363, 1988
- [10] G. M. Hulbert, T. J. R. Hughes, *Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 84, Issue 3, pp. 327-348, 1990
- [11] A. V. Idesman, *Solution of linear elastodynamics problems with space-time finite elements on structured and unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol. 196, Issues 9-12, pp. 1787-1815, 2007
- [12] F. Jourdan, P. Bussy, *Large time increment method in dynamic regularization : sheet cutting simulations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 190, pp. 1245-1259, 2000
- [13] L. Karaoglan, A. K. Noor, *Space-time finite element methods for sensitivity analysis of contact/impact response of axisymmetric composite structures*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 144, pp. 371-389, 1997
- [14] D.K. Khalmanova, F. Costanzo, *A space-time discontinuous Galerkin finite element method for fully coupled linear thermo-elasto-dynamic problems with strain and heat flux discontinuities*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 197, Issues 13-16, pp. 1323-1342, 2008
- [15] P. Ladevèze, *Non linear computational structural mechanics, new approaches and non incremental methods of calculation*, Springer Verlag, 1999
- [16] R. Mohr, A. Menzel, P. Steinmann, *A consistent time FE-method for large strain elasto-plasto-dynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 197, Issues 33-40, pp. 3024-3044, 2008
- [17] T. E. Tezduyar, S. Sunil, *Enhanced-discretization space-time technique (EDSTT)*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 193, Issues 15-16, pp. 1385-1401, 2004 Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 191, Issue 46, pp. 5315-5343, 2002
- [18] T. E. Tezduyar, S. Sathe, R. Keedy, K. Stein, *Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 195, Issues 17-18, pp. 2002-2027, 2006