

Problèmes non-locaux en mécanique du solide: modélisation variationnelle de matériaux de type Texsol par homogénéisation stochastique.

A. Nait-ali¹, G. Michaille², S. Pagano¹

¹ LMGC, Université Montpellier 2, France, {anaitali,stephane.pagano}@univ-montp2.fr

² I3M, Université Montpellier 2, France, micha@math.univ-montp2.fr

Résumé — En utilisant la convergence variationnelle combinée avec la théorie ergodique des processus sous-additifs, nous décrivons le comportement macroscopique d'un matériau aléatoirement fibré. Les sections transversales des fibres sont aléatoirement distribuées suivant un processus ponctuel stationnaire, leur taille est d'ordre ε et la rigidité du matériau dans la matrice est d'ordre ε^p . La limite variationnelle de l'énergie quand ε tend vers 0 est déterministe et non locale.

1 Introduction.

On s'intéresse à la détermination du comportement macroscopique d'une structure aléatoirement fibrée dont la configuration de référence est le sous-ensemble ouvert $O := \widehat{O} \times (0, h)$ de \mathbb{R}^3 , de base $\widehat{O} := (0, l_1) \times (0, l_2) \subset \mathbb{R}^2$. Plus précisément, on considère la réunion des fibres $T_\varepsilon(\omega) := \varepsilon D(\omega) \times \mathbb{R}$ où $D(\omega) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D(\omega_i)$ et $D(\omega_i)$ sont des disques distribués aléatoirement dans \mathbb{R}^2 selon un processus stochastique $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^2 associé à l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

2 Étude probabiliste

Dans notre problème, l'aléatoire intervient sous deux aspects. Tout d'abord par la position des sections des fibres dans \mathbb{R}^2 , les fibres étant supposées verticales. Ensuite par la forme des sections (forme elliptique). La répartition aléatoire des fibres est modélisée par une loi de probabilité de type Poisson "modifiée" pour (entre autre) ne pas autoriser le chevauchement des fibres.

2.1 Densité d'énergie associée au milieu mou

Nous allons définir la densité d'énergie limite associée à la fonctionnelle énergie élastique du milieu mou F_ε^v de densité f afin d'appliquer un Théorème ergodique de type Ackoglu-Krengel à un processus sous-additif approprié défini dans l'espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ respectant les axiomes décrivant l'aléatoire :

$$\mathcal{S}_A(\omega, a) := \inf \left\{ \int_{\overset{\circ}{A} \setminus T(\omega)} f^{\infty, p}(\nabla w) d\hat{x} : w \in \text{Adm}_A(\omega, a) \right\},$$

$$\text{Adm}_A(\omega, a) := \left\{ w \in W_0^{1, p}(\overset{\circ}{A} \setminus T(\omega), \mathbb{R}^3) : \int_{\overset{\circ}{A}} w d\hat{x} = a \right\}.$$

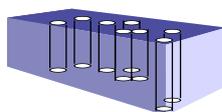


FIGURE 1 – Structure (S) fibrée aléatoirement

La densité d'énergie liée au problème limite de $(\mathcal{P}_{F_\varepsilon^v})$ est maintenant définie pour tout $a \in \mathbb{R}^3$ par

$$f_0^{**} = \left[\inf_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ \mathbf{E} \frac{\mathcal{S}_{[0,m]^3}(\cdot, a)}{m^3} \right\} \right]^{**}$$

3 Limite varitionelle de la structure (S)

L'obtention de cette limite se fait en trois étapes (voir [3]). Notons que le comportement du matériau (matrice + fibres) est supposé hyper-élastique (voir [4]).

3.1 Limite varitionelle du milieu mou

En premier lieu, on cherche le comportement macroscopique du milieu mou seul, en supposant qu'il y ait du vide à la place des fibres. La fonctionnelle F_ε^v modélise l'énergie interne du matériau étudié sur $O \setminus T_\varepsilon$, avec un déplacement prescrit v sur les bords de $\partial T_\varepsilon \cap O$ (qui sont donc aléatoire), la rigidité du matériau élastique du milieu mou $O \setminus T_\varepsilon$ étant de l'ordre de ε^p . Nous obtenons une énergie limite F_0 .

3.2 Limite variationnelle des fibres seules

La fonctionnelle G_ε modélise l'énergie interne du matériau constitué de l'union T_ε de cylindres parallèles représentant les fibres fixées sur la base \widehat{O} . Notons que nous avons seulement une connaissance statistique de leurs sections transversales de taille ε dans le sens où leurs positions sont statistiquement homogènes. D'un point de vue mathématique, ceci signifie que les sections transversales sont placées aléatoirement selon un processus de point défini dans la première partie. Nous obtenons une énergie limite G_0 .

3.3 Limite varitionelle de la structure totale

Pour le comportement de la structure totale, on réexamine le travail fait dans [1, 2, 3] dans un contexte aléatoire. On établit la convergence presque sûre de $(\mathcal{P}_{H_\varepsilon})$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers un problème déterministe et homogène :

$$(\mathcal{P}_H) \quad \min \left\{ H(u) - \int_O \mathcal{L}.u \, dx : v \in L^p(O, \mathbb{R}^3) \right\}$$

où \mathcal{L} correspond aux efforts intérieurs .

Notons ici que l'énergie H est non-locale. Plus précisément on établit Γ -convergence presque sûre de la suite $(H_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ vers un infimum $F_0 \nabla G_0$ défini pour tout $u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)$ par

$$F_0 \nabla G_0 (u) := \inf_{v \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} \left(F_0(u - v) + G_0(\mathbb{E}v) \right)$$

où F_0 et G_0 sont les fonctionnelles d'énergies limites calculées précédemment.

Références

- [1] M. Bellieud, G. Bouchitté. *Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Nonlocal effect.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **26** (1998), no 3, 407-436.
- [2] M. Bellieud, G. Bouchitté. *Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers.* Asymptot. Anal. **32**, no 2 (2002), 153-183.
- [3] C. Licht, G. Michaille. *A nonlocal energy functional in pseudo-plasticity.* Asymptotic Analysis, **45**, (2005), 313-339.
- [4] R. Laniel, P. Alart, S. Pagano. *Discrete element investigations of wire-reinforced geomaterial in a three-dimensional modeling.* Computational Mechanics, vol(42), **1** (2008) 67-76.