



HAL
open science

**Problèmes non-locaux en mécanique du solide:
modélisation variationnelle de matériaux de type Texsol
par homogénéisation stochastique.**

Azdine Nait- Ali, Gérard Michaille, Stéphane Pagano

► **To cite this version:**

Azdine Nait- Ali, Gérard Michaille, Stéphane Pagano. Problèmes non-locaux en mécanique du solide: modélisation variationnelle de matériaux de type Texsol par homogénéisation stochastique.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592874

HAL Id: hal-00592874

<https://hal.science/hal-00592874v1>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Problèmes non-locaux en mécanique du solide: modélisation variationnelle de matériaux de type Texsol par homogénéisation stochastique.

A. Nait-ali¹, G. Michaille², S. Pagano¹

¹ LMGC, Université Montpellier 2, France, {anaitali,stephane.pagano}@univ-montp2.fr

² I3M, Université Montpellier 2, France, micha@math.univ-montp2.fr

Résumé —

En combinant convergence variationnelle et théorie ergodique des processus sous-additifs, nous décrivons le comportement macroscopique d'un matériau aléatoirement fibré. Les sections transversales des fibres sont aléatoirement distribuées suivant un processus ponctuel stationnaire, leur taille est d'ordre ε et la rigidité du matériau dans la matrice est d'ordre ε^p . La limite variationnelle de l'énergie quand ε tend vers 0 est déterministe et non locale.

1 Introduction.

On s'intéresse au comportement macroscopique d'une structure aléatoirement fibrée dont la configuration de référence est le sous-ensemble ouvert $O := \widehat{O} \times (0, h)$ de \mathbb{R}^3 , de base $\widehat{O} := (0, l_1) \times (0, l_2) \subset \mathbb{R}^2$. Plus précisément, on considère la réunion des fibres $T_\varepsilon(\omega) := \varepsilon D(\omega) \times \mathbb{R}$ où $D(\omega) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D(\omega_i)$ et $D(\omega_i)$ sont des disques distribués aléatoirement dans \mathbb{R}^2 selon un processus stochastique ponctuel $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^2 associé à l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

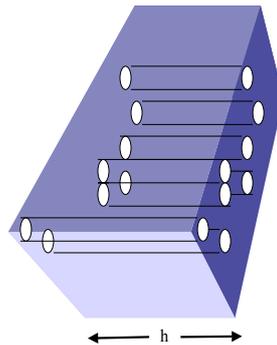


FIGURE 1 – Structure (S) aléatoirement fibrée

Pour obtenir le comportement limite de la structure complète (S), on commence par étudier séparément le comportement dans la matrice $O \setminus T_\varepsilon$ et dans les fibres T_ε en décrivant la limite variationnelle déterministe de chacune des fonctionnelles énergies F_ε^v et G_ε de $\Omega \times L^p(O, \mathbb{R}^3)$ à valeur dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

définies par

$$F_\varepsilon^v(\omega, u) = \begin{cases} \varepsilon^p \int_{O \setminus T_\varepsilon} f(\nabla u) dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(O, \mathbb{R}^3), u = v \text{ sur } O \cap T_\varepsilon \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$G_\varepsilon(\omega, u) = \begin{cases} \int_{O \cap T_\varepsilon} g(\nabla u) dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(T_\varepsilon \cap O, \mathbb{R}^3), u = 0 \text{ dans } O \setminus T_\varepsilon \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

La fonctionnelle G_ε modélise l'énergie mécanique interne de la structure, constituée de l'union T_ε , représentant les fibres cylindriques parallèles fixées sur \widehat{O} . Nous avons seulement une connaissance statistique de leurs répartition, dans le sens où leurs positions sont statistiquement homogènes. D'un point de vue mathématique, cela signifie que les sections transversales sont placées au hasard à partir d'un processus ponctuel stationnaire.

La fonctionnelle F_ε^v modélise l'énergie interne dans la matrice $O \setminus T_\varepsilon$, avec un déplacement prescrit le long de la frontière aléatoire $\partial T_\varepsilon \cap O$, la rigidité du matériau mou et élastique qui occupe $O \setminus T_\varepsilon$ est d'ordre ε^p . Nous supposons de grandes déformations dans la matrice et les fibres (voir par exemple [6]) de sorte que les matériaux solides soient hyper-élastiques. Si on suppose alors que les deux corps sont parfaitement collés et soumis à un chargement L , nous obtenons le problème $(\mathcal{P}_{H_\varepsilon})$

$$(\mathcal{P}_{H_\varepsilon}) \quad \inf \left\{ H_\varepsilon(\omega, u) - \int_O L \cdot u dx : u \in L^p(O, \mathbb{R}^3) \right\}$$

où $L \in L^q(O, \mathbb{R}^3)$, $q = \frac{p}{p-1}$ et

$$H_\varepsilon(\omega, u) = \begin{cases} \varepsilon^p \int_{O \setminus T_\varepsilon} f(\nabla u) dx + \int_{O \cap T_\varepsilon} g(\nabla u) dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(O, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque ε tend vers 0 nous obtenons un modèle simplifié (la configuration de référence à une géométrie simple) et déterministe du comportement d'un matériau de type TexSol^{TM} ([4, 5, 6]). Nous montrons que la Γ -limite de la fonctionnelle H_ε est non locale, elle est plus précisément la somme épigraphique (ou inf-convolution) des Γ -limites de chacune des énergies associées aux deux structures précédentes.

2 Étude probabiliste

Dans notre problème, l'aléatoire intervient seulement par la position des centres de chaque fibres dans \mathbb{R}^2 , les fibres étant supposées verticales. Pour cela on définit l'ensemble Ω des centres des fibres par

$$\Omega = \{ (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i \in \mathbb{R}^2, |\omega_i - \omega_j| \geq d \text{ for } i \neq j \},$$

où $0 < d < 1$. On définit les bases des fibres de la façon suivante : $D(\omega_i) := \omega_i + D_{d/2}(0)$ où $D_{d/2}(0)$ est le disque de \mathbb{R}^2 centré en O et de rayon $d/2$ (voir Figure [2]). Par conséquent $\omega \mapsto T(\omega) = D(\omega) \times \mathbb{R}$ est un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^3 , union de cylindres aléatoires, dont la base est l'union des disques disjoints $D(\omega_i)$ de \mathbb{R}^2 centré en ω_i .

En outre, nous supposons qu'il existe une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) , vérifiant le système des trois axiomes suivants :

$$(A_1) \text{ Distribution "riche" : } \mathbf{P} \left(\{ \omega \in \Omega : |\hat{Y} \cap D(\omega)| > 0 \} \right) = 1 ;$$

$$(A_2) \text{ Stationarité : } \forall z \in \mathbf{Z}^2, \tau_z \# \mathbf{P} = \mathbf{P} \text{ où } \tau_z \# \mathbf{P} \text{ est la probabilité image de } \mathbf{P} \text{ par } \tau_z ;$$

$$(A_3) \text{ Indépendance asymptotique : pour tout ensembles } E \text{ et } F \text{ de } \mathcal{A}, \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\tau_z E \cap F) = \mathbf{P}(E)\mathbf{P}(F).$$

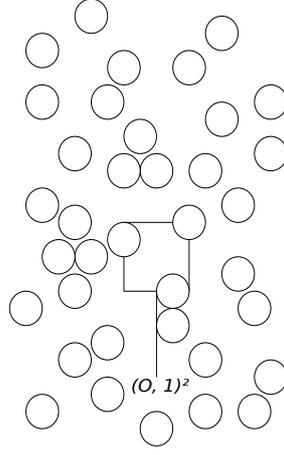


FIGURE 2 – Distribution des sections à l'échelle $\varepsilon = 1$

2.1 Densité d'énergie associée au milieu mou

La densité f est supposée non convexe et vérifie les conditions de croissance et de continuité d'ordre $p > 1$ standards. On définit la fonction $f^{\infty,p}$ de la manière suivante : on suppose qu'il existe $\beta' > 0$, $0 < \gamma < p$ et une fonction homogène p -positive $f^{\infty,p}$ (la fonction de récession d'ordre p de f) tels que pour tout $M \in \mathbf{M}^{3 \times 3}$

$$|f(M) - f^{\infty,p}(M)| \leq \beta'(1 + |M|^{p-\gamma}). \quad (1)$$

De (1) on déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(tM)}{t^p} = f^{\infty,p}(M)$ et que $f^{\infty,p}$ vérifie également les conditions de croissance et de continuité standard. Plus précisément : pour tout $M \in \mathbf{M}^{3 \times 3}$

$$\alpha|M|^p \leq f^{\infty,p}(M) \leq \beta|M|^p. \quad (2)$$

et

$$|f^{\infty,p}(M) - f^{\infty,p}(M')| \leq L|M - M'|(|M|^{p-1} + |M'|^{p-1}) \quad (3)$$

pour tout $(M, M') \in \mathbf{M}^{3 \times 3} \times \mathbf{M}^{3 \times 3}$.

Nous allons définir la densité d'énergie limite associée à la fonctionnelle énergie élastique du milieu mou F_ε^v de densité f à l'aide d'un Théorème ergodique de type Ackoglu-Krengel appliqué au processus sous-additif défini dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ par : soit A est un ouvert de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A(\omega, a) &:= \inf \left\{ \int_{\overset{\circ}{A} \setminus T(\omega)} f^{\infty,p}(\nabla w) \, d\hat{x} : w \in \text{Adm}_A(\omega, a) \right\}, \\ \text{Adm}_A(\omega, a) &:= \left\{ w \in W_0^{1,p}(\overset{\circ}{A} \setminus T(\omega), \mathbb{R}^3) : \int_{\overset{\circ}{A}} w \, d\hat{x} = a \right\} \end{aligned}$$

La densité d'énergie associée au problème limite de $(\mathcal{P}_{F_\varepsilon^v})$ est alors définie pour tout $a \in \mathbb{R}^3$ par

$$f_0^{**}(a) = \left[\inf_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ \mathbf{E} \frac{\mathcal{S}_{[0,m]^3}(\cdot, a)}{m^3} \right\} \right]^{**}.$$

où \mathbf{E} est l'espérance mathématique.

3 Limite varitionnelle de l'énergie associée à la structure (S)

La limite s'obtient en trois étapes (voir [3]). Notons que le comportement du matériau (matrice + fibres) est supposé hyper-élastique (voir [6]).

3.1 Limite variationnelle de l'énergie associée au milieu mou

En premier lieu, on cherche le comportement macroscopique du milieu mou seul. Pour cela, on a besoin du résultat de compacité suivant.

Lemma 1 (compacité). *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite telle que $\sup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon^v(\omega, u_\varepsilon) < +\infty$ pour \mathbf{P} presque partout $\omega \in \Omega$. Alors pour \mathbf{P} p.p. $\omega \in \Omega$, il existe une sous suite pouvant dépendre de ω , et $u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)$ pouvant aussi dépendre de ω tel que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^p(O, \mathbb{R}^3)$.*

La fonctionnelle F_ε^v modélise l'énergie interne du matériau étudié sur $O \setminus T_\varepsilon$, avec un déplacement prescrit v sur les bords de $\partial T_\varepsilon \cap O$ (qui sont donc aléatoires), la rigidité du matériau élastique du milieu mou $O \setminus T_\varepsilon$ étant de l'ordre de ε^p . Dans la partie qui suit, on montre que F_ε^v Γ -converge vers une énergie limite F_0^v défini de la façon suivante,

$$F_0^v : L^p(O, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$F_0^v(u) = \int_O f_0^{**}(u - v) dx.$$

Theorem 1. *La suite aléatoire de fonctionnelle $(F_\varepsilon^v)_{\varepsilon>0}$ Γ -converges presque sûrement vers la fonctionnelle déterministe F_0^v quand $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ est muni de la topologie faible suggérée par le Lemma 1.*

Pour démontrer le théorème précédent, on procède en deux étapes : on établit la Γ -limite-sup puis la Γ -limite-inf.

3.1.1 Estimation de la borne supérieure de la Γ -limite-sup

Proposition 1. *Pour tout $u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)$ et tout $\omega \in \Omega'$ il existe une suite aléatoire $(u_\varepsilon(\omega, \cdot))_{\varepsilon>0}$ de $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ vérifiant presque sûrement en ω*

$$u_\varepsilon(\omega, \cdot) \rightharpoonup u \text{ dans } L^p(O, \mathbb{R}^3)$$

$$F_0^v(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon^v(\omega, u_\varepsilon(\omega)).$$

3.1.2 Estimation de la borne inférieure de la Γ -limite-inf

Proposition 2. *Pour tout u_ε convergeant faiblement vers u dans $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ on a presque sûrement en ω*

$$F_0^v(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon^v(\omega, u_\varepsilon).$$

3.2 Limite variationnelle des fibres seules

La densité g est également supposée non convexe et vérifie les conditions de croissance et de continuité d'ordre $p > 1$ standards. La fonctionnelle G_ε modélise l'énergie interne du matériau constitué de l'union T_ε de cylindres parallèles représentant les fibres fixées sur la base \widehat{O} . Rappelons que nous avons seulement une connaissance statistique de leurs sections transversales de taille ε dans le sens où leurs positions sont statistiquement homogènes. D'un point de vue mathématique, ceci signifie que les sections transversales sont placées aléatoirement selon un processus ponctuel défini dans la première partie. Nous obtenons une énergie limite G_0 .

On note la fonction caractéristique de l'ensemble aléatoire $\varepsilon D(\omega)$ de la manière suivante :

$$1_{\varepsilon D}(\omega)(\hat{x}) = 1_{D(\omega)}\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) := a(\omega, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}) \quad \forall \hat{x} \in \widehat{O}.$$

A l'aide de cette notation, on peut réécrire la fonctionnelle

$$G_\varepsilon(\omega, u) : L^p(O, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

comme suit :

$$G_\varepsilon(\omega, u) = \begin{cases} \int_O a(\omega, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}) g(\nabla u) dx & \text{if } u|_{(O \setminus T_\varepsilon)} = 0, u|_{(O \cap T_\varepsilon)} \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(O \cap T_\varepsilon, \mathbf{R}^3) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'aide d'un résultat de type Birkoff, on obtient la limite suivante,

Proposition 3. *Presque sûrement en ω on a*

$$a(\omega, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \rightharpoonup \mathbf{E} \left(\int_{\hat{Y}} a(\omega, \hat{y}) d\hat{y} \right) := \mathbb{E} \quad \text{pour la topologie } \sigma(L^\infty, L^1).$$

Pour la limite de $G_\varepsilon(\omega, u)$ on a besoin de définir la fonction $g^\perp : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$g^\perp(a) := \inf_{\xi \in \mathbf{M}^{3 \times 2}} g(\xi|a),$$

puis on définit la fonctionnelle déterministe limite $G_0 : L^p(O, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par

$$G_0(u) = \begin{cases} \mathbb{E} \int_O (g^\perp)^{**} \left(\frac{1}{\mathbb{E}} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) dx & \text{si } u \in V_0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } V_0 := \left\{ u \in L^p(O, \mathbb{R}^3) : \frac{\partial u}{\partial x_3} \in L^p(O, \mathbb{R}^3), u(\hat{x}, 0) = 0 \text{ on } \hat{O} \right\}.$$

Dans ce qui suit, on va montrer le théorème suivant,

Theorem 2. *La suite $(G_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle G_0 quand $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ est muni de la topologie faible.*

Le fait que l'on munisse $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ de sa topologie faible résulte du résultat de compacité suivant.

Lemma 2. *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite telle que $\sup_\varepsilon G_\varepsilon(\omega, u_\varepsilon) < +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$ ". Alors pour tout $\omega \in \Omega$ " il existe une sous suite pouvant dépendre de ω et $u \in V_0$ pouvant aussi dépendre de ω tel que*

$$a(\omega, \frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } L^p(O, \mathbb{R}^3) \quad (4)$$

$$a(\omega, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_3} \text{ dans } L^p(O, \mathbb{R}^3). \quad (5)$$

Comme pour le milieu mou, on montre le théorème précédent en deux étapes : en étudiant la Γ -limite-sup puis la Γ -limite-inf.

3.2.1 La borne inférieure

Proposition 4. *Pour tout $u \in V_0$ tel que $a(\omega, \frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon$ converge faiblement vers u dans $L^p(O, \mathbb{R}^3)$, on a presque sûrement en ω*

$$G_0(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(\omega, u_\varepsilon).$$

3.2.2 La borne supérieure

Proposition 5. *Pour tout $u \in V_0$ il existe une suite $(u_\varepsilon(\omega, \cdot))_{\varepsilon>0}$ dans $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ convergeant faiblement vers u dans $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ tel que presque sûrement en ω*

$$G_0(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(\omega, u_\varepsilon(\omega)).$$

3.3 Limite varitionnelle de la structure totale

Pour le comportement de la structure complète, on réexamine dans un cadre aléatoire l'étude faite dans [1, 2, 3]. On établit la convergence presque sûre de $(\mathcal{P}_{H_\varepsilon})$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers un problème déterministe et homogène :

$$(\mathcal{P}_H) \quad \min \left\{ H(u) - \int_O L.u \, dx : u \in L^p(O, \mathbb{R}^3) \right\}$$

où L correspond aux efforts volumiques, et notons $\mathcal{L} := \int_O L.u \, dx$.

Notons ici que l'énergie H est non-locale. Plus précisément on établit la Γ -convergence presque sûre de la suite $(H_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vers l'inf convolution $F_0 \nabla G_0$, où F_0 et G_0 sont les fonctionnelles d'énergies limites calculées précédemment. On démontre le théorème suivant :

Theorem 3. *La suite $(H_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ Γ -converge presque sûrement vers l'inf convolution $F_0 \nabla G_0$ définie pour tout $u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)$ par*

$$F_0 \nabla G_0 (u) := \inf_{v \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} \left(F_0(u - v) + G_0(\mathbb{E}v) \right) = \inf_{v \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} \left(F_0^v(u) + G_0(\mathbb{E}v) \right).$$

Par conséquent, $(H_\varepsilon + \mathcal{L})_{\varepsilon>0}$ Γ -converges presque sûrement vers la fonctionnelle $F_0 \nabla G_0 - \mathcal{L}$.

La démonstration de ce résultat s'obtient aisément grâce aux limites obtenues pour chacun des deux milieux. La seule difficulté est dans le recollement des deux champs dans la matrice et dans les fibres, i.e., $v_\varepsilon = a(\omega, \cdot)u_\varepsilon$ et $(1 - a(\omega, \cdot))u_\varepsilon$.

En résumé on a :

Theorem 4. *Le problème*

$$(\mathcal{P}_{H_\varepsilon}) \quad \inf \left\{ H_\varepsilon(\omega, u) - \int_O L.u \, dx : v \in L^p(O, \mathbb{R}^3) \right\}$$

converge presque sûrement vers le problème

$$(\mathcal{P}_H) \quad \min \left\{ H(u) - \int_O L.u \, dx : v \in L^p(O, \mathbb{R}^3) \right\}$$

dans le sens où toute suite $(u_\varepsilon(\omega, \cdot))_{\varepsilon>0}$ de ε -minimiseurs de $(\mathcal{P}_{H_\varepsilon})$ converge presque sûrement et faiblement dans $L^p(O, \mathbb{R}^3)$ vers un minimiseur de (\mathcal{P}_H) .

4 Système couplé d'équations associées au problème limite

Si on décide de ne pas éliminer la variable interne v , l'équilibre du système mécanique associé à la structure complète est alors décrit par l'énergie totale suivante définie dans l'espace $L^p(O, \mathbb{R}^3) \times V_0$:

$$E(u, v) := F_0(u - v) + G_0(\mathbb{E}v) - \int_O L.u \, dx.$$

Notons (\bar{u}, \bar{v}) la solution du problème ¹

$$(\mathcal{P}_E) \quad \min \{ E(u, v) : (u, v) \in L^p(O, \mathbb{R}^3) \times V_0 \} = E(\bar{u}, \bar{v})$$

1. Ici, on suppose l'unicité de la solution du problème (\mathcal{P}_E) .

Un calcul standard de l'équation d'Euler du problème (\mathcal{P}_E) dans l'espace $L^p(O, \mathbb{R}^3) \times V_0$ conduit au système couplé suivant vérifié par (\bar{u}, \bar{v})

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{u} - \bar{v}) = \partial f_0^*(L) \quad p.p \text{ dans } O, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} (\partial g^{\perp**}) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3} \right) = L \quad p.p \text{ dans } O, \\ \bar{v} = 0 \quad p.p \text{ dans } \widehat{O} \times \{0\}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3} = \partial (g^{\perp*})(0) \quad p.p \text{ dans } \widehat{O} \times \{h\}. \end{array} \right.$$

Ce système se résoud aisément et nous obtenons les expressions suivantes des champs solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v} = - \int_0^{x_3} \partial (g^{\perp})^* [\bar{L}(\hat{x}, s) - \partial (g^{\perp})^* (\bar{L}(\hat{x}, l))] ds \quad p.p \text{ dans } O, \\ \bar{u} = \bar{v} + \partial (f_0)^*(L) \quad p.p \text{ dans } O. \end{array} \right.$$

où la moyenne des champs de forces est donnée par : $\bar{L}(\hat{x}, s) := \int_0^s L(\hat{x}, t) dt$

Références

- [1] M. Bellieud, G. Bouchitté. *Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Nonlocal effect.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **26** (1998), no 3, 407-436.
- [2] M. Bellieud, G. Bouchitté. *Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers.* Asymptot. Anal. **32**, no 2 (2002), 153-183.
- [3] C. Licht, G. Michaille. *A nonlocal energy functional in pseudo-plasticity.* Asymptotic Analysis, **45**, (2005), 313-339.
- [4] M. Frémond. *Non-Smooth Thermo-mechanics.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [5] R. Laniel, P. Alart, S. Pagano. *Consistent thermodynamic modelling of wire-reinforced geomaterials.* European Journal of Mechanics - A/Solids, vol 26, **5** (2007) 854 - 871.
- [6] R. Laniel, P. Alart, S. Pagano. *Discrete element investigations of wire-reinforced geomaterial in a three-dimensional modeling.* Computational Mechanics, vol(42), **1** (2008) 67-76.