



HAL
open science

Modèle micromécanique d'endommagement basé sur des approches cohésives

Nawfal Blal, Loïc Daridon, Yann Monerie, Stéphane Pagano

► To cite this version:

Nawfal Blal, Loïc Daridon, Yann Monerie, Stéphane Pagano. Modèle micromécanique d'endommagement basé sur des approches cohésives. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592873

HAL Id: hal-00592873

<https://hal.science/hal-00592873>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle micromécanique d'endommagement basé sur des approches cohésives

N. Blal^{1,2,3}, L. Daridon^{1,3}, Y. Monerie^{2,3}, S. Pagano^{1,3}

¹ Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université Montpellier 2, CNRS, {nawfal.blal,loic.daridon,stephane.pagano}@univ-montp2.fr

² Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire (IRSN), Cadarache, yann.monerie@irsn.fr

³ Laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures (IRSN, CNRS, Université Montpellier 2)

Résumé — Un modèle micromécanique d'endommagement basé sur une approche cohésive est présenté. Il est obtenu par homogénéisation du comportement d'un milieu élastique isotrope contenant des inclusions circulaires distribuées et orientées aléatoirement et dont le comportement est régi par un modèle de zone cohésive. A l'aide d'une version asymptotique de la méthode variationnelle de Ponte Castaneda (1991), un comportement équivalent est obtenu à tout taux de triaxialité. Ce modèle permet notamment un calibrage rigoureux des paramètres locaux des modèles cohésifs avec le type et la taille du maillage.

Mots clés — Endommagement, Modèles de zone cohésive, Homogénéisation.

1 Introduction

Les modèles de zones cohésives (MZO) offrent un cadre efficace et simple pour l'étude numérique de la mécanique d'endommagement et de rupture des matériaux. Au travers d'une loi surfacique reliant l'effort de résistance à la séparation des lèvres d'une fissure en train de se créer au saut de déplacement (l'ouverture de cette fissure), ces modèles permettent de suivre les mécanismes d'endommagement de l'amorçage des microfissures jusqu'à la rupture du matériau. L'utilisation de ces outils repose ici sur une décomposition multicorps séparant le comportement local du matériau en une partie *volumique durcissante* (loi de comportement volumique sans endommagement) et une partie *surfactive adoucissante* (partie intégrant tout le processus d'endommagement). Le comportement apparent du matériau est celui du comportement volumique auquel s'ajoute la loi de cohésion surfacique. Le problème étudié dans cette communication se limite à un milieu élastique isotrope contenant des inclusions "cohésives" distribuées aléatoirement en espace et en orientation. D'un point de vue numérique, cette situation correspond à une approche aux éléments finis cohésifs-volumiques : chaque maille d'une discrétisation est un élément fini standard relié à ses voisins par des conditions aux limites mixtes traduisant le modèle cohésif (FIGURE 1). La détermination du comportement homogène équivalent issu de cette décomposition est recherchée.

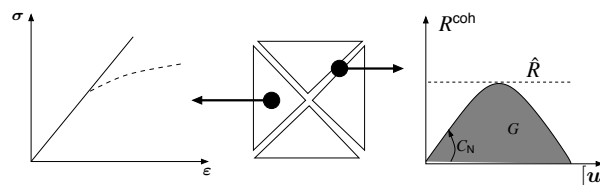


FIGURE 1 – Approche cohésive-volumique. Au centre : éléments finis triangulaires reliés par des conditions aux limites mixtes traduisant le modèle de zone cohésive. A gauche : comportement volumique durcissant intégré aux points de Gauss des éléments finis. A droite : modèle de zone cohésive résumant l'ensemble des processus adoucissants intégré aux frontières des éléments.

2 Modèle micromécanique d'endommagement

2.1 Hypothèse de modélisation

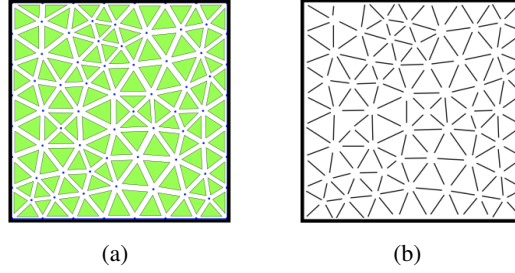


FIGURE 2 – Principe de l'approche : une discrétisation cohésive-volumique (a) est remplacée par un milieu homogène de même comportement que le comportement “volumique”, i.e. des éléments finis, et contenant des inclusions lenticulaires distribuées et orientées aléatoirement de même comportement que le comportement “cohésif”, i.e. des modèles de zone cohésive (b).

Le principe de la modélisation proposée est illustré sur la FIGURE 2 : une discrétisation cohésive-volumique est considérée comme un milieu continu homogène contenant une distribution d'inclusions ; le milieu homogène possède le comportement durcissant “volumique”, les inclusions possèdent le comportement adoucissant du modèle “cohésif”. On considère ainsi le cas d'un milieu élastique isotrope caractérisé par un tenseur de raideur du quatrième ordre :

$$\mathbb{C}^M = 3k^M \mathbb{J} + 2\mu^M \mathbb{K} \quad (1)$$

où k^M et μ^M sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice, les tenseurs du quatrième ordre \mathbb{J} et \mathbb{K} sont donnés par : $\mathbb{J} = (1/3)\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$, $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$, où \mathbf{i} (resp. \mathbb{I}) est le tenseur identité du deuxième ordre (resp. du quatrième ordre). L'idée consiste à décrire le comportement “volumique” des inclusions en associant aux zones cohésives une épaisseur *fictive* e destinée à tendre vers zéro (comportement surfacique asymptotique). La loi de cohésion surfacique est prise sous la forme :

$$\mathbf{R}^{\text{coh}} = \beta \times \left(C_N \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + C_T \frac{\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{u}_T}{\mathbf{u}_T \cdot \mathbf{u}_T} \right) \cdot [\mathbf{u}] \quad (2)$$

où \mathbf{R}^{coh} est l'effort cohésif, C_N et C_T sont les raideurs initiales du modèle cohésif (modèle intrinsèque), et $[\mathbf{u}] = u_N \mathbf{n} + \mathbf{u}_T$ est le vecteur saut de déplacement de normale \mathbf{n} . On suppose que le paramètre d'endommagement surfacique évolue en fonction de la norme du saut de déplacement $\beta(\|[\mathbf{u}]\|)$: sa valeur décroît de 1 (matériau localement sain) pour atteindre 0 (matériau localement totalement endommagé). En approchant la déformation au niveau de l'inclusion par [1] :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes [\mathbf{u}]}{2e} \quad (3)$$

on peut ainsi décrire le comportement de l'inclusion cohésive par un tenseur de rigidité de la forme [2, 3] :

$$\mathbb{C}^{\text{coh}} = e\beta(\|[\mathbf{u}]\|) (C_N \mathbb{E}_I + C_T \mathbb{K}_I) \quad (4)$$

avec les tenseurs du quatrième ordre \mathbb{E}_I et \mathbb{K}_I (voir [4]) constituent deux composantes de la base des tenseurs du quatrième ordre symétriques isotropes transverses. La fraction volumique des inclusions est mise sous la forme : $f = eZ$ où Z est un paramètre de densité de maillage inversement proportionnel à la taille de maille L_{mesh} (par exemple, pour un maillage régulier constitué de carrés coupés en quatre triangles : $Z = 2(1 + \sqrt{2})L_{\text{mesh}}^{-1}$).

2.2 Étude élastique : quantification de la raideur cohésive en fonction du maillage

L'utilisation d'un modèle cohésif intrinsèque (raideur initiale finie) introduit une souplesse additionnelle au matériau volumique. On doit aux auteurs [2] les premiers résultats rigoureux permettant de calibrer la raideur cohésive en fonction du maillage. En se restreignant au cas purement élastique linéaire (variable d'endommagement $\beta = 1$), ces auteurs ont pu montrer qu'il est possible de borner a priori la souplesse induite par le modèle cohésif pour le cas d'un maillage régulier. La démarche consiste à calculer la borne inférieure de l'estimation de Hashin-Shtrickman [5] avec moyenne sur les orientations équiprobables. Pour le cas linéaire, le module cohésif linéaire de l'inclusion se réduit à :

$$\mathbb{C}_{Lin}^{coh} = e (C_N \mathbb{E}_I + C_T \mathbb{K}_I) \quad (5)$$

Le module homogénéisé est estimé par la borne inférieure de l'estimation Hashin-Shtrickman \mathbb{C}^{HS-} :

$$\mathbb{C}^{hom} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{HS-} (\mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{Lin}^{coh}) = \lim_{e \rightarrow 0} \left[eZ \langle \mathbb{C}_{Lin}^{coh} : \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{C}^M \right] : [eZ \langle \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{I}]^{-1} \quad (6)$$

où $\langle \bullet \rangle_{\circ}$ désigne la moyenne sur toutes les orientations de l'espace et le tenseur \mathbb{T} est donné par : $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}_{Lin}^{coh})^{-1} : (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^M)$ avec \mathbb{C}^* le tenseur d'influence de Hill dépendant de la forme des inclusions et du milieu de référence (inclusions dans ce cas). Le passage à la limite $e \rightarrow 0$ permet de déterminer le comportement macroscopique équivalent qu'on notera encore \mathbb{C}^{HS-} . Ainsi on peut évaluer par exemple une perte de raideur apparente comme le rapport du module de Young apparent E^{HS-} sur celui de la matrice sans zone cohésive E^M :

$$R = \frac{E^{HS-}}{E^M} = \frac{\xi}{1 + \xi} \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{5}{1 + (4/3)(C_N/C_T)} \frac{C_N}{E^M Z} \quad (7)$$

L'équation (7) permet de calibrer le choix de la raideur cohésive C_N en fonction de la densité linéique de maillage Z et de la perte de raideur R tolérée : une valeur minimale fixée pour la perte de raideur apparente R correspond à une valeur minimale pour la quantité ξ , ce qui borne le ratio $C_N/(E^M Z)$ selon le rapport choisi entre raideur cohésive normale et tangentielle C_N/C_T . On note qu'en l'absence de raideur cohésive tangentielle ($C_T \rightarrow 0$), la perte de raideur apparente est totale ($R \rightarrow 0$) quels que soient le maillage et la raideur normale retenue. Une façon de contrôler ce rapport C_N/C_T est d'imposer une restriction sur le coefficient de Poisson apparent ν^{HS-} . En supposant ainsi que ce ratio reste inchangé par introduction de zones cohésives pour la phase élastique ($\nu^M = \nu^{HS-}$), on obtient :

$$\frac{C_N}{C_T} = \frac{1 + 3\nu^M}{2(1 - 2\nu^M)} \quad (8)$$

Remarques et résultats :

1. La condition (8) assure une même perte de raideur pour les modules de cisaillement μ^M et de compressibilité k^M :

$$\frac{\mu^{HS-}}{\mu^M} = \frac{k^{HS-}}{k^M} \quad (9)$$

2. Notons que les auteurs [6] proposent dans leurs travaux un modèle micromécanique d'endommagement basé sur une répartition aléatoire d'inclusions cohésives limité au cas particulier des chargements purement hydrostatiques. En imposant comme condition de fermeture la condition (9), ces auteurs obtiennent un coefficient de Poisson apparent identique à celui de la matrice, résultat identique à celui obtenu ici pour tout cas de chargement.
3. La combinaison des équations (7) et (9) permet d'obtenir la même perte de raideur pour les différents paramètres élastiques :

$$R = \frac{E^{HS-}}{E^M} = \frac{\mu^{HS-}}{\mu^M} = \frac{k^{HS-}}{k^M} = \frac{\xi}{\xi + 1} \quad (10)$$

4. En combinant la borne (7) et le critère (8), on peut borner la raideur cohésive initiale par valeur inférieure en fonction des propriétés élastiques de la matrice et de la perte apparente de raideur R tolérée, on a :

$$C_N \geq k^M Z \frac{R}{1-R}. \quad (11)$$

A titre d'illustration, pour une perte de raideur apparente tolérée de 5% ($R = 0.95$), on doit avoir pour un maillage triangulaire régulier : $C_N \geq 92k^M/L_{mesh}$.

2.3 Étude endommageable

2.3.1 Formulation du problème

Dans l'optique de parvenir à un comportement macroscopique décrivant la phase d'endommagement, on suppose que les trajets de chargements sont monotones et radiaux dans l'espace des déformations macroscopiques \mathbf{E} , et on cherche l'état de contrainte macroscopique associé $\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E}$. Le comportement homogène de la partie non linéaire est obtenu par extension des résultats d'homogénéisation obtenus dans la partie élastique au cas non linéaire par la méthode sécante modifiée de Suquet [7], équivalente à la méthode variationnelle de Ponte Castañeda [8]. Le comportement des inclusions est décrit par son module sécant :

$$\mathbb{C}_{sct}^{coh} = \beta \mathbb{C}_{Lin}^{coh}, \quad (12)$$

L'approximation de la déformation par l'expression (3) permet de relier la norme du saut de déplacement $[\mathbf{u}]$ à la quantité $\mathfrak{e} = (1/2)\varepsilon \otimes \varepsilon$ par la relation :

$$\|[\mathbf{u}]\|^2 = 2e^2(-\mathbb{J} + 2\mathbb{K}) :: \mathfrak{e} \quad (13)$$

D'autre part le résultat général sur les composites (voir [9]) permet de relier le second moment de la déformation dans la phase inclusionnelle $\langle \mathfrak{e} \rangle_I$ à l'expression macroscopique de l'énergie élastique :

$$\langle \mathfrak{e} \rangle_I = \frac{1}{2eZ} \frac{\partial(\mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{sct}^{coh}) : \mathbf{E})}{\partial \mathbb{C}_{sct}^{coh}} \quad (14)$$

En combinant les relations (13) et (14), on obtient l'expression de la moyenne quadratique du déplacement dans les zones cohésives :

$$\sqrt{\langle \|[\mathbf{u}]\|^2 \rangle_I} = \sqrt{\frac{e}{Z}(-\mathbb{J} + 2\mathbb{K}) :: \frac{\partial(\mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{sct}^{coh}) : \mathbf{E})}{\partial \mathbb{C}_{sct}^{coh}}} \quad (15)$$

Finalement, le module sécant de l'inclusion est obtenu en combinant les équations (12) et (15) :

$$\mathbb{C}_{sct}^{coh} = \beta \left(\sqrt{\frac{e}{Z}(-\mathbb{J} + 2\mathbb{K}) :: \frac{\partial(\mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{sct}^{coh}) : \mathbf{E})}{\partial \mathbb{C}_{sct}^{coh}}} \right) \mathbb{C}_{Lin}^{coh} \quad (16)$$

où le module homogénéisé \mathbb{C}^{hom} est obtenu par l'estimation \mathbb{C}^{HS} déjà introduite dans la partie élastique. Le problème non linéaire à résoudre devient alors :

Étant données une déformation macroscopique \mathbf{E} et une fonction d'endommagement β , la contrainte macroscopique associée au milieu élastique contenant des zones cohésives distribuées et orientées aléatoirement s'écrit $\Sigma = \mathbb{C}^{HS}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{sct}^{coh}) : \mathbf{E}$ où le module sécant cohésif \mathbb{C}_{sct}^{coh} est solution du problème non linéaire (16).

Le modèle proposé définit un modèle micromécanique d'endommagement valable à tous taux de triaxialité. En vue de relier explicitement les comportements locaux (comportement volumique élastique isotrope et comportement surfacique cohésif) au comportement global élasto-endommageable, on s'intéresse dans la section suivante à l'application du modèle à une loi cohésive linéaire.

2.3.2 Application : calibration des paramètres cohésifs en fonction du comportement global attendu

Par souci de simplification et sans perte de généralité, on suppose que la loi locale cohésive est normale ($C_T \rightarrow +\infty$) et que le coefficient de Poisson du matériau est nul ($\nu^M = 0$). La résolution du problème non linéaire (16) permet d'obtenir la variable d'endommagement β en fonction du chargement macroscopique (partie hydrostatique $E_m = (1/3)\text{tr}(\mathbf{E})$ et partie déviatorique $E_{eq} = \sqrt{(2/3)\mathbf{E}_d : \mathbf{E}_d}$ où \mathbf{E}_d la déformation équivalente : $\mathbf{E}_d = \mathbf{E} - E_m \mathbf{i}$) :

$$\beta = \frac{\hat{R} \left(3(23E_{eq}^2 + 40E_m^2)^{1/2} - \sqrt{10}Z\delta_c \right)}{\sqrt{10}Z\xi\hat{R}\delta_c + 3(23E_{eq}^2 + 40E_m^2)^{1/2}(\hat{R} - C_N\delta_c)} \quad (17)$$

où on a noté par δ_c l'ouverture maximale de la fissure (atteinte à la rupture du modèle cohésif) et par \hat{R} la contrainte cohésive maximale supportée par le modèle local. La variable d'endommagement dépend des propriétés élastiques du matériau par l'intermédiaire du réel ξ donné par la formule (7), ici $\xi = 5C_N/(ZE^M)$. En introduisant la déformation équivalente à rupture pour un chargement purement déviatorique $E_{eq}^0 \simeq 0.2 Z\delta_c$, on peut décrire les surfaces de chargement à l'amorçage et à la rupture suivant les deux critères elliptiques :

$$\begin{cases} \text{amorçage} : \left(\frac{E_{eq}}{E_{eq}^0} \right)^2 + \frac{40}{23} \left(\frac{E_m}{E_{eq}^0} \right)^2 - \left(\frac{\hat{R}}{C_N\delta_c}(\xi + 1) \right)^2 = 0 \\ \text{rupture} : \left(\frac{E_{eq}}{E_{eq}^0} \right)^2 + \frac{40}{23} \left(\frac{E_m}{E_{eq}^0} \right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Les surfaces de chargement à l'amorçage et à la rupture sont représentées sur la FIGURE 3. On constate que la triaxialité a un léger effet sur l'amorçage et sur la rupture ; le rapport entre un chargement purement hydrostatique et un chargement purement déviatorique est d'environ 1.3. De plus, on remarque qu'une loi cohésive locale linéaire n'engendre pas nécessairement un adoucissement macroscopique linéaire (cf. FIGURE 4). Le choix de la raideur initiale des zones cohésives C_N influence la réponse globale du milieu. Le paramètre R mesurant la perte de raideur induite par l'utilisation des MZC est linéairement lié à la raideur initiale C_N , ainsi une diminution de cette raideur engendre une perte de raideur plus importante et rend le milieu plus souple. Cette situation avance la phase d'endommagement comme on peut le remarquer sur la FIGURE 5.

Dans le cas d'un état de chargement macroscopique purement déviatorique ($E_m = 0$), et sous les hypothèses déjà retenues, la contrainte cohésive maximale \hat{R} est reliée à la contrainte maximale supportée par le matériau τ_c (τ_c est une propriété macroscopique) par la relation suivante :

$$\hat{R} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{69}{10}} (2 + R) \tau_c \quad (19)$$

Lorsqu'on cherche à faire disparaître la perte de raideur apparente, i.e quand $R \rightarrow 1$, on a le résultat :

$$\hat{R} \simeq \frac{3}{2} \tau_c \quad (20)$$

Dans ce cas, le facteur "apparent" de concentration de contrainte du modèle cohésif est d'environ 1.5. Cela définit une règle d'usage du modèle pour tout matériau. Si, par exemple, la contrainte macroscopique supportée par le matériau lors d'un chargement de cisaillement est de l'ordre de 400 MPa, la

contrainte cohésive maximale que la loi locale peut supporter est de l'ordre de 600 MPa . Le calcul de l'énergie de fissuration permet d'établir le lien entre l'ouverture maximale δ_c et l'énergie de fissuration G (aire sous la courbe de la loi locale). En supposant que la perte de raideur est négligeable, on obtient :

$$\frac{G}{\delta_c} \simeq \frac{3}{4} \tau_c \quad (21)$$

Or le modèle proposé ne doit pas prédire une rupture qui intervient avant l'amorçage (la zone cohésive ne peut pas rompre avant d'avoir commencé à s'amorcer). Les critères (18) ne vérifient cette condition que si la restriction suivante sur l'ouverture critique δ_c est imposée :

$$\delta_c \geq 5 \frac{\hat{R}}{E^M Z} \quad (22)$$

soit alors en utilisant le critère (20) :

$$\delta_c \geq \frac{15}{2} \frac{\tau_c}{E^M Z} \quad (23)$$

Une valeur choisie de δ_c , en respectant la dernière condition (23), permet de relier l'énergie de fissuration G aux paramètres matériaux (E^M, τ_c) et à la densité du maillage Z d'après la relation (21). On constate que G est inversement proportionnel au paramètre Z . Par conséquent, quand la taille du maillage tend vers 0 ($Z \rightarrow \infty$), l'énergie locale de fissuration G doit elle aussi tendre vers 0.

Cette étude définit un modèle cohésif intrinsèque à 3 paramètres : les raideurs initiales, la contrainte cohésive maximale et l'énergie de fissuration ou de manière équivalente l'ouverture critique de la zone cohésive. La contrainte cohésive maximale \hat{R} semble être le paramètre clé de l'endommagement macroscopique associé : il reste constante pour toute taille de maillage.

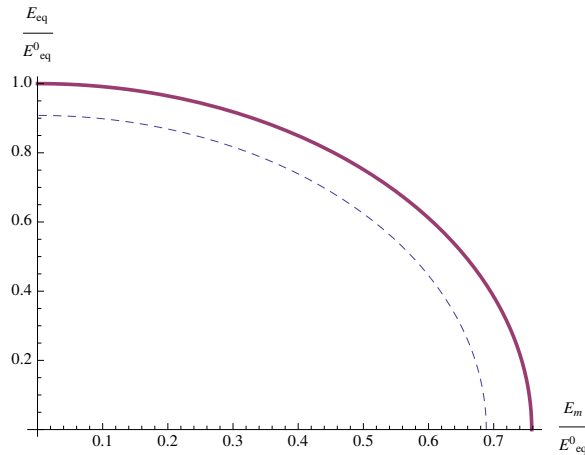


FIGURE 3 – Surface de chargement à l'amorçage (pointillées) et à la rupture (gras). En abscisses la déformation équivalente E_{eq} normée par rapport à la déformation à rupture pour un chargement purement déviatorique E_{eq}^0 . En ordonnées la déformation hydrostatique E_m normée par rapport à E_{eq}^0 . ($R_{max} = 100 \text{ MPa}$, $\delta_c/\delta_a = 5$, $C_N = 4.10^9 \text{ MPa.mm}^{-1}$, $Z = 9,9.10^3 \text{ mm}^{-1}$, $E^M = 25.10^2 \text{ MPa}$)

3 Conclusion

Un modèle micromécanique d'endommagement a été obtenu sur la base d'une approche cohésive intrinsèque. Ce modèle est valable à tout taux de triaxialité. Il étend, notamment pour le cas des comportements élastiques, les résultats antérieurs partiels de la littérature [10, 11]. Au-delà des comportements élastiques, ce modèle lie de manière explicite l'effet des paramètres cohésifs locaux sur la réponse élasto-endommageable macroscopique. Dans l'optique d'une simulation numérique par approche cohésive-volumique, ces relations font intervenir la taille de maille au travers d'un paramètre de densité linéique

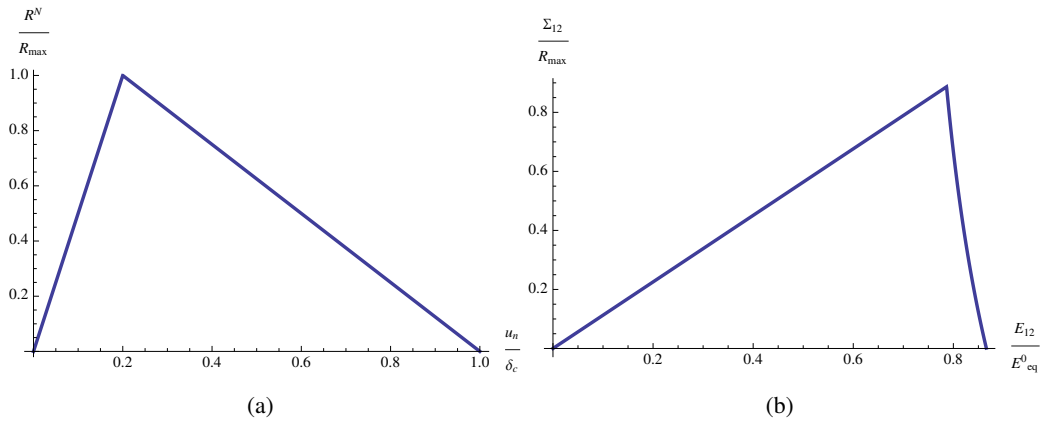


FIGURE 4 – (a) : loi locale cohésive normée, (b) : loi globale normée pour un chargement en cisaillement. (mêmes données que la FIGURE3)

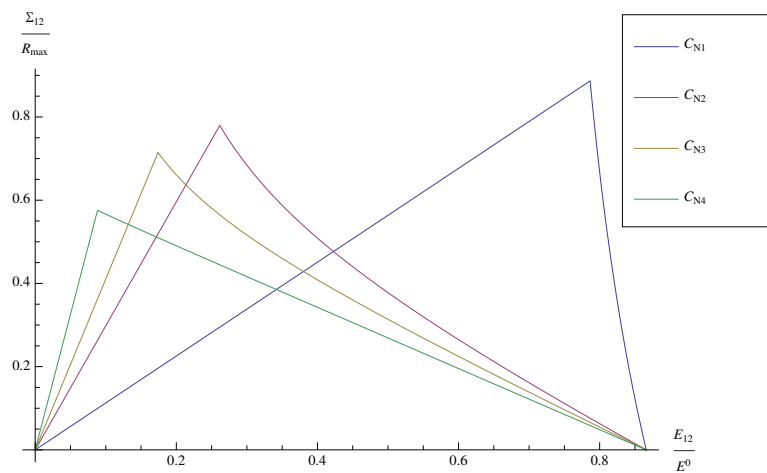


FIGURE 5 – Effet de la raideur initiale C_N sur la réponse globale ($C_{N1} > C_{N2} > C_{N3} > C_{N4}$)

de maillage Z et fournissent ainsi des critères sur les paramètres des modèles cohésifs en fonction : 1/ de la taille de maille, 2/ des propriétés d'endommagement macroscopiques attendues. En particulier, un critère rigoureux est obtenu pour les raideurs normales et tangentés des modèles cohésifs intrinsèques. Ce critère est indépendant de la forme retenue pour le modèle d'adoucissement cohésif. Cette forme intervient dans les relations définissant l'énergie locale cohésive, la contrainte maximale cohésive et l'ouverture critique cohésive en fonction des propriétés macroscopiques recherchées.

Références

- [1] J.-C. Michel, P. Suquet, and F. Thébaud. Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 4 :573–595, 1994.
- [2] V. Acary and Y. Monerie. Nonsmooth fracture dynamics using a cohesive zone approach. Technical Report RR-6032, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2006.
- [3] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, and S. Pagano. Micromechanical damage model based on intrinsic cohesive approach and bounds on cohesive parameters. *Comptes Rendus de Mécanique (en préparation)*.
- [4] M. Bornert, T. Berthau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2 - Comportements non linéaires et problèmes ouverts*. Hermès sciences publications, 2001.

- [5] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :127–140, 1963.
- [6] S. Li and G. Wang. On damage theory of a cohesive medium. *International Journal of Engineering Science*, 42 :861–885, 2004.
- [7] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : Secant moduli theory and its link with pont castaneda’s variational procedure. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences*, 320 :563–571, 1995.
- [8] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites 39, 45-71, (1991). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [9] W. Kreher. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38 :115–128, 1990.
- [10] H. Espinosa and P. Zavattieri. A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials. part i : Theory and numerical implementation. *Mechanics of Materials*, 35(3-6) :333 – 364, 2003.
- [11] V. Tomar, J. Zhai, and M. Zhou. Bounds for element size in a variable stiffness cohesive finite element model. *International journal for numerical methods in engineering*, 61 :1894–1920, 2004.