



HAL
open science

Recherche de Forme d'un Réflecteur Parabolique ” Géotensoid ”

Sébastien Morterolle, Bernard Maurin, Jérôme Quirant

► **To cite this version:**

Sébastien Morterolle, Bernard Maurin, Jérôme Quirant. Recherche de Forme d'un Réflecteur Parabolique ” Géotensoid ”. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592871

HAL Id: hal-00592871

<https://hal.science/hal-00592871>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Recherche de Forme d'un Réflecteur Parabolique « Géotensoïd »

S. Morterolle¹, B. Maurin¹, J. Quirant¹

¹ LMGC, Université Montpellier 2, France, {sebastien.morterolle, bernard.maurin, jerome.quirant}@univ-montp2.fr

Résumé — Une nouvelle méthode pour la recherche de forme de réseaux de câbles utilisés par les réflecteurs paraboliques spatiaux est présentée. Elle permet d'assurer une configuration mécanique optimale ainsi qu'un contrôle du positionnement des nœuds sur la surface voulue. Les réseaux ainsi générés sont dits « géotensoïd » car ils sont basés sur une tension uniforme et suivent les lignes géodésiques de la surface. La méthode est ensuite testée sur différentes typologies et topologies de réseaux dans le cas de diverses surfaces paraboliques (centrées ou bien avec une distance « offset »).

Mots clefs — Réflecteur parabolique, réseau de câbles, recherche de forme.

1 Introduction

Deux types de réflecteurs spatiaux peuvent être identifiés : ceux dits à « surface solide » (surface réfléchissante continue) et ceux dits « maillés » (surface réalisée par un tissage de fins fils conducteurs), mieux adaptés pour les transmissions à faibles radiofréquences (RF). Les réflecteurs maillés offrent de plus une meilleure directivité du signal, surtout pour de grands diamètres (supérieurs à 6 mètres), mais demandent en retour une précision de forme élevée de la surface réfléchissante. Dans la plupart des cas, la zone RF est maintenue par des baleines (à l'image d'un parapluie) ou bien des câbles radiaux attachés à un anneau extérieur déployable. La précision réclamant un nombre élevé d'éléments radiaux, K. Miura [1] a proposé de former le réflecteur avec un réseau de câbles tendus. La surface parabolique est ainsi divisée en facettes triangulaires et le réseau est maintenu en tension grâce à des forces additionnelles appliquées en tout nœud (forces verticales ou normales à la surface, Figure 1).

Ce principe a été utilisé dans des réalisations comme le radiotélescope « Halca » ou le réflecteur « AstroMesh ». G. Tibert [2] l'a aussi repris pour la conception d'une antenne de tenségrité.

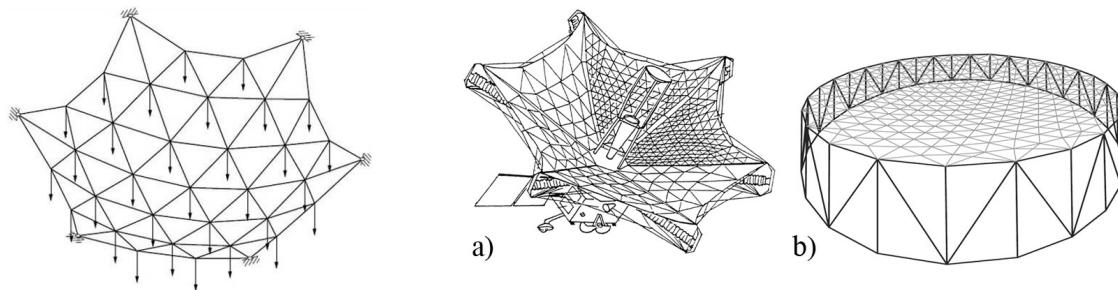


FIG. 1 – Réseau de câbles tendus ; antennes Halca (a) et AstroMesh (b)

1.1 Géométrie d'un réflecteur parabolique

Une antenne réflecteur est constituée d'une surface réfléchissante parabolique et d'un récepteur / émetteur placé au point focal. Les rayons incidents parallèles à l'axe du réflecteur convergent vers cette focale après avoir été réfléchis (l'inverse pour un émetteur). Dans le cas d'une antenne « centrée », la surface est un parabololoïde de révolution (Figure 2) et, dans un repère global $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ où \vec{Z} désigne l'axe de révolution, son équation est $Z = (X^2 + Y^2)/(4F)$, F désignant la longueur focale. La hauteur H_a d'un réflecteur de diamètre D_a est alors $H_a = D_a^2/(16F)$.

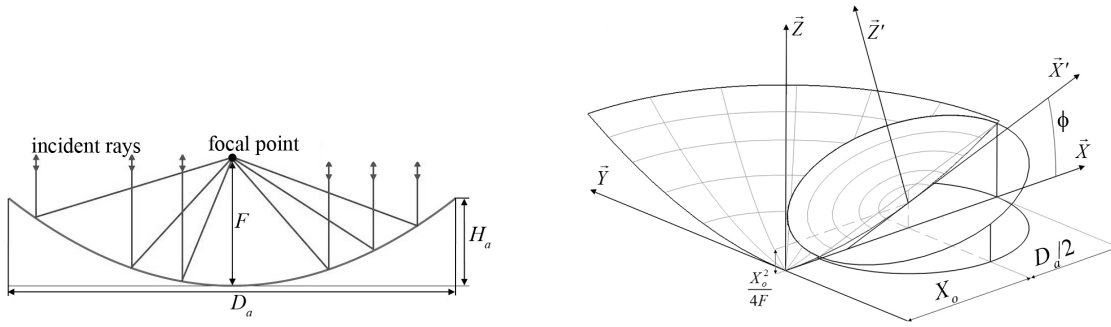


FIG. 2 – Réflecteur parabolique (centré et offset)

L'inconvénient majeur de cette solution est la zone d'ombre générée par le récepteur et son support. Afin d'y remédier et améliorer le niveau de performance, des antennes « offset » sont généralement utilisées. Dans ce cas, la surface réfléchissante est définie par l'intersection du parabolôïde de révolution avec un cylindre vertical éloigné de la distance offset X_o de l'axe \vec{Z} . Le diamètre du parabolôïde « parent » est égal à $D_o = X_o + D_a/2$. De plus, dans un repère local $(\vec{X}', \vec{Y}', \vec{Z}')$, l'équation de cette surface parabolique est alors de la forme $Z' = f(X', Y')$ avec :

$$Z' = (a - \sqrt{b}) / \sin^2 \phi \quad (1)$$

où $\tan \phi = X_o / (2F)$, $a = 2F \cos \phi + \sin \phi (X_o + \cos \phi X')$, $b = 4F \sin \phi X' - \sin^2 \phi Y'^2 + (2F \sin \phi + \cos \phi X_o)^2$. Cette surface est seulement symétrique par rapport au plan (\vec{X}, \vec{Z}) et son contour est une ellipse parallèle au plan (\vec{X}', \vec{Y}') .

1.2 Géométrie d'un réflecteur parabolique

La surface définie par l'équation (1) reste cependant théorique car elle doit être réalisée par la forme facettée d'un réseau de câbles. La typologie du réseau est en général associée à des facettes planes et triangulaires (Figure 3) mais cette surface discrétisée ne correspond plus à celle théorique. On désigne alors par « best-fit » parabolôïde celui qui est le mieux approximé par la forme facettée. Il est caractérisé par une variation de la longueur focale et par une translation axiale selon l'axe \vec{Z}' . L'écart entre le best-fit parabolôïde et la forme facettée est quantifié par la déviation « rms », paramètre essentiel de précision du réflecteur.

Les antennes maillées mettent généralement en œuvre deux réseaux de câbles : un en face avant (surface réfléchissante) connecté à un second, symétrique et en face arrière, par l'intermédiaire de tendeurs « verticaux » qui assurent les équilibres respectifs des réseaux tendus. La matière réfléchissante sur les facettes est constituée d'un tissage de filaments composites (molybdène recouvert d'or). Il est important de noter qu'une tension uniforme dans le réseau et, ainsi, dans le tissage, offre une meilleure conductivité et améliore le rendement de l'antenne [3]. Par ailleurs, cette propriété est intéressante du point de vue géométrique et mécanique. Un câble uniformément tendu sur une surface courbe suit en effet ses lignes géodésiques, donnant des chemins de longueur minimale et donc un poids minimal. Cette position, qui correspond également à la plus stable, est aussi associée à un minimum d'énergie potentielle : un élément de câble recouvrera aisément sa position en cas de perturbation. Un réseau de câbles uniformément tendus selon les lignes géodésiques est ainsi généralement recherché (réseau qualifié de « géotensoid »).

Toutefois, la plupart des méthodes employées génèrent un tel réseau en projetant un motif plan sur

la surface (pseudo géodésique), souvent approximée par une portion de sphère. Cette approche de nature géométrique ne peut garantir l'uniformité de tension. L'objectif du travail présenté dans cet article est ainsi de proposer une méthode innovante pour créer des configurations géotensoid tout en maîtrisant l'erreur rms résultante.

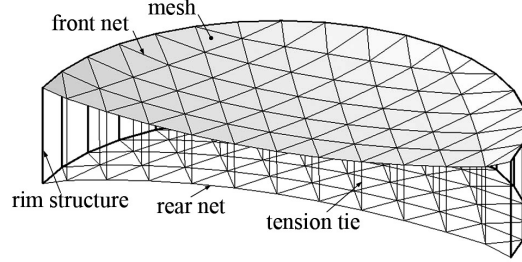


FIG. 3 – Réseaux de câbles avant et arrière avec tendeurs verticaux

2 Méthode itérative des densités de forces

La méthode des densités de forces a été proposée par K. Linkwitz [4] pour concevoir le réseau de câbles tendus du stade olympique de Munich (Figure 4a). Le principe est de linéariser les équations d'équilibre de chaque nœud : si l'on isole un nœud i connecté à c_i éléments de câble de longueur ℓ_j et de tension T_j sans force extérieure, son équilibre sur la direction \vec{X} implique que

$$\sum_{j=1}^{c_i} T_j (X_j - X_i) / \ell_j = 0 \text{ (l'écriture selon } \vec{Y} \text{ et } \vec{Z} \text{ s'en déduisant, Figure 4b).}$$

Ces relations peuvent être linéarisées en introduisant un coefficient de « densité de force » q_j pour chaque élément (égal au rapport entre sa tension et sa longueur) ; on obtient alors $\sum_{j=1}^{c_i} q_j (X_j - X_i) = 0$,

$$\text{ce qui permet d'en déduire la position } X_i = \left(\sum_{j=1}^{c_i} q_j X_j \right) / \left(\sum_{j=1}^{c_i} q_j \right).$$

Appliquée nœud après nœud jusqu'à l'obtention de l'équilibre global du réseau, cette approche permet de calculer les positions des éléments et leurs tensions ($T_j = q_j \ell_j$) en fonction du jeu de coefficients choisis (Figure 4c). Elle a été par la suite modifiée afin de pouvoir déterminer de façon itérative des configurations de tension uniforme T_u [5] : si au pas p on a une tension T_j^p dans l'élément j , un nouveau coefficient $q_j^{p+1} = q_j^p T_u / T_j^p$ est utilisé au pas suivant pour cet élément. La différence entre un réseau de mêmes coefficients q_j et celui de tension uniforme est présentée sur la Figure 4 (d et e).

On observe toutefois que ces formes sont à double courbure négative et que, dans le cas d'une antenne parabolique à courbure positive, des forces « externes » doivent être ajoutées sur la direction \vec{Z}' . Ces forces, dues aux tendeurs verticaux, doivent toutefois être choisies telles que (1) soit vérifiée.

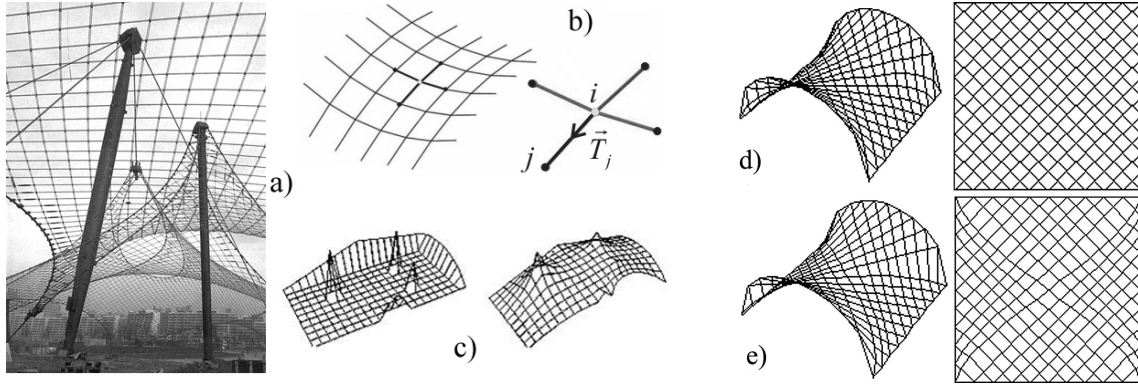


FIG. 4 – Méthode des densités de forces (a à c) ; réseaux avec $q_j = cste$ (d) et $T_j = T_u$ (e)

La méthode que nous proposons de développer est ainsi la suivante : partant de coefficients identiques, on détermine la position d'équilibre de chaque nœud libre sur \vec{X}' et \vec{Y}' tout en imposant celle sur \vec{Z}' avec (1) et en calculant les forces nécessaires pour cela pour tout nœud i , selon la relation $F_{Z_i} = \sum_{j=1}^{c_i} q_j (Z_j - Z_i)$. La condition de tension uniforme est ensuite vérifiée et, si elle n'est pas respectée, les coefficients q_j sont modifiés comme expliqué auparavant.

Le schéma de cette approche est présenté sur la Figure 5. Si la convergence est obtenue, elle permet de déterminer un réseau de câbles en tension uniforme dont chaque nœud est exactement situé sur une surface parabolique.

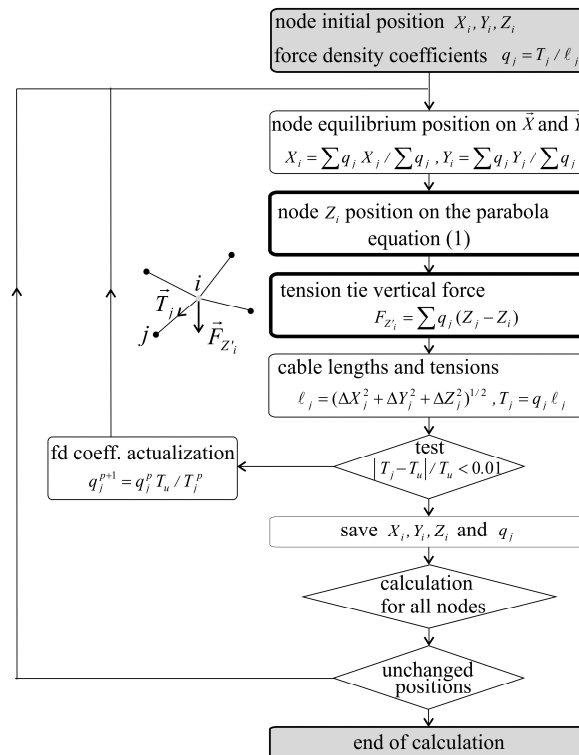


FIG. 5 – Algorithme de génération d'un réseau géotensoid

3 Applications

Plusieurs études ont été menées à partir de configurations initiales planes inscrites dans un cercle représentant l'anneau externe de l'antenne. Le réseau dit « diamatique » s'est avéré être le plus pertinent ; un exemple 6 x 6 (6 secteurs de disque dont chaque bord est divisé en 6) est montré sur la Figure 6a.

3.1 Antenne centrée

Le premier cas est celui d'un réflecteur axisymétrique. Après convergence du calcul (Figure 6b), on observe que la force résultante dans les tendeurs verticaux dépend de leur position ; leur distribution est présentée sur la Figure 6c (pour une tension de 100 N dans le réseau). Si le rapport F/D_a vaut 0.4 (0.6) alors la tension moyenne est de 32.17 N (22.36 N) avec un écart-type de 2.60 N (0.89 N). Lorsque la courbure s'accroît ces tensions augmentent en parallèle.

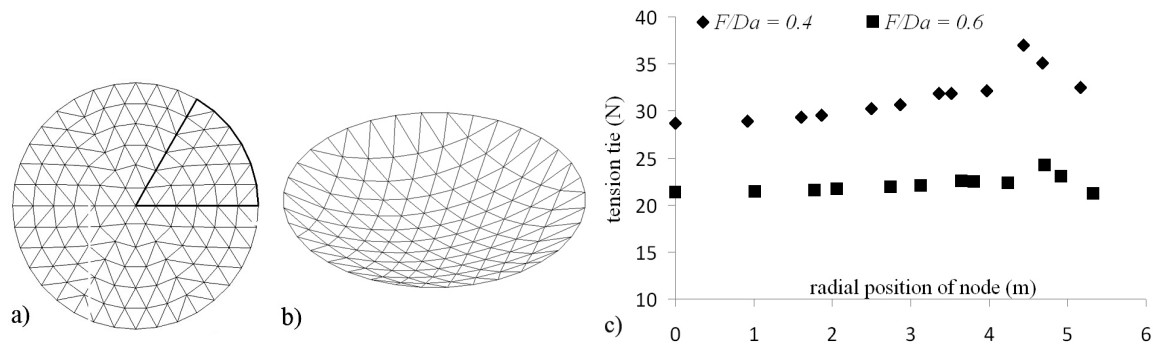


FIG. 6 – Antenne axisymétrique : calcul d'un réseau diamatique (a et b) et distribution des tensions dans les tendeurs verticaux (c)

3.2 Antenne offset

Le second cas est celui d'un réflecteur offset. Pour ce type d'antenne, les nœuds d'attache sont sur une ellipse (centrée en $X' = H_o \tan \phi$ et $Y' = 0$) située sur un plan parallèle à (\vec{X}', \vec{Y}') et à l'altitude $Z' = H_o = H_a \cos \phi$. Le fait que l'anneau externe soit en général un cercle positionne ces nœuds sur un tube dont l'axe est selon \vec{Z}' , passant par le centre de l'ellipse et de diamètre égal à celui du plus grand diamètre de l'ellipse. Toutefois, l'intersection du tube avec la parabole conduit à des nœuds d'attache sur des altitudes différentes (Figure 7). Les trois principaux paramètres d'un réflecteur offset sont ainsi son diamètre D_a , sa longueur focale F et sa distance offset X_o . Le rapport F/D_o ne peut toutefois être trop grand pour des raisons structurelles mais X_o doit l'être suffisamment pour minimiser l'obstruction du signal.

Nous allons nous concentrer dans cet article sur une configuration « standard » avec $D_a = 12$ m, $F/D_o = 0.45$, $X_o = 8.3$ m (valeurs de l'AstroMesh) et une topologie diamatique 6 x 10. Afin d'inclure la totalité de l'ellipse, le diamètre du maillage est égal à celui du grand diamètre de l'ellipse ($D_a \cos \phi$) et les nœuds périphériques sont à la même altitude $Z' = H_o$. Cela peut néanmoins conduire à des incongruités comme certains efforts dans les tendeurs de mauvais sens, cela étant dû au fait que des câbles connectés à l'anneau sont en position quasi horizontale (les points sur l'anneau étant à l'altitude imposée H_o au lieu d'être sur la parabole). Un tel cas de figure est bien entendu inacceptable et peut être évité « géométriquement » en augmentant le rapport F/D_o ou bien

« topologiquement » en supprimant les tendeurs concernés. L'inconvénient est alors que le nombre de nœuds non situés sur la parabole augmente et, par voie de conséquence, l'erreur de forme. Une troisième possibilité consiste à positionner les nœuds d'attache sur la forme théorique à des altitudes différentes : cela entraîne un écart proche de 7 cm dans la configuration de référence étudiée. On peut enfin choisir une structure avec un diamètre supérieur à celui du grand diamètre de l'ellipse, la surface du réflecteur étant alors inscrite dans une partie du réseau et non sa totalité. De notre point de vue, le meilleur compromis réside toutefois dans le choix d'un anneau elliptique (tous les nœuds sont sur la parabole et la surface entière est utilisable).

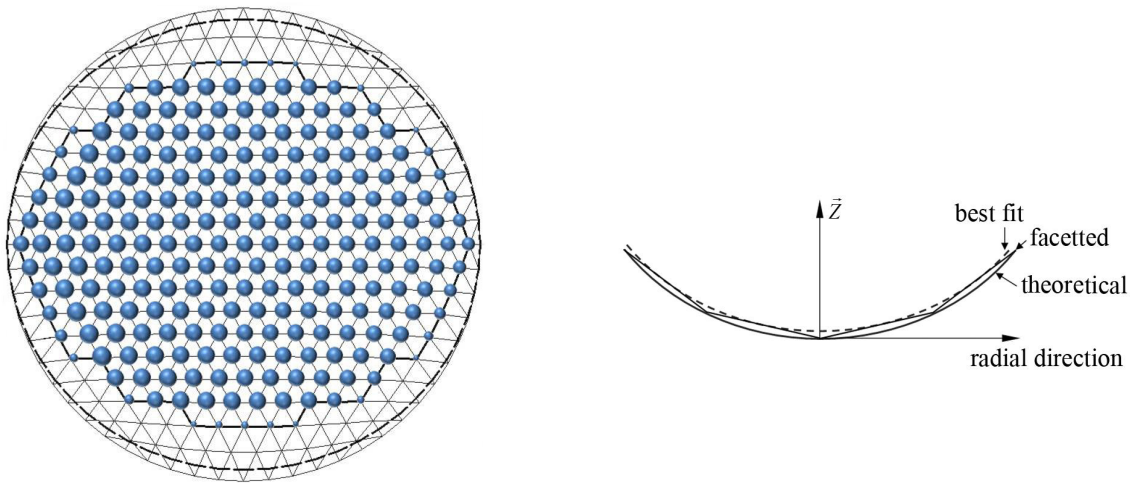


FIG. 7 – Antenne offset (forme et efforts dans les tendeurs) ; parabole “best-fit”

La méthode de recherche de forme proposée en Figure 5 donne des résultats probants dans le cas d'un réflecteur offset et permet de déterminer un réseau de tension uniforme pour différentes conditions aux limites. Il est néanmoins intéressant de noter que la distribution des forces obtenue dans les tendeurs verticaux est plus homogène quand tous les points sont sur la parabole que lorsque les nœuds d'accroche n'y appartiennent pas (Figure 7 où l'intensité de l'effort est proportionnelle au diamètre des billes en bleu). Dans le premier cas (anneau elliptique ou circulaire mais avec des variations de hauteur), la force moyenne dans les tendeurs est voisine de 7.20 N (pour un écart-type de 0.53 N, valeurs correspondant à une tension uniforme de 100 N dans le réseau). Dans le second cas, elle est située entre 0.00 et 8.30 N avec une moyenne 5.80 N (écart-type de 2.70 N).

4 Erreur de facettisation

Les antennes demandent une très faible erreur de forme pour leur surface réfléchissante. L'écart avec la parabole « best-fit » est limité en fonction de la plus courte longueur d'onde à transmettre (une précision de surface d'environ 1 mm est commune). Les antennes maillées divisent la zone réfléchissante en facettes plates plutôt qu'en fuseaux comme celles de type « parapluie ». On montre par ailleurs que les facettes hexagonales offrent un niveau de rayonnement légèrement supérieur que pour celles triangulaires, tandis que les facettes carrées ont un rendement de rayonnement inférieur. Bien que les facettes hexagonales donnent de meilleurs résultats, celles triangulaires sont structurellement plus avantageuses tout en nécessitant un plus petit nombre d'éléments pour obtenir une tolérance de surface souhaitée.

La facettisation de la surface est la deuxième principale source d'erreur après celle de fabrication

(cas de l’AstroMesh [2]). Les autres sources d’erreur sont les distorsions thermiques, l’effet de coussin « mesh saddling » et la répétabilité de déploiement. L’erreur systématique de facettisation est généralement limitée à un tiers de l’erreur totale : par exemple, sur le réflecteur Astromesh de 12 m, l’erreur rms de facettisation est de 1.10 mm [6].

Agrawal et al. estiment que si le réflecteur est peu profond, il peut être approximé par une sphère de rayon $2F$ [7]. Dans ce cas, l’erreur rms avec des facettes polygonales régulières est évaluée selon la formule $\delta_{rms} \approx L^2 / (FC^2)$; où L est la longueur du côté et C une constante (respectivement égale à 7.872, 6.160 et 4.046 pour des facettes triangulaires, carrées et hexagonales). Cette approximation est souvent utilisée pour déterminer la longueur maximale de maille en fonction d’une erreur donnée. A titre d’exemple, si une erreur de facettisation de 1 mm pour $F = 12.87\text{m}$ est nécessaire, la longueur maximale du côté d’une facette triangulaire sera alors de 0.89 m. Dans la configuration ici étudiée (motif diamétrique 6 x 10), la longueur maximale d’un élément de câble est proche de cette valeur ($\pm 0.01\text{m}$).

De façon plus précise, l’erreur rms est calculée avec la formule :

$$\delta_{rms} = \left(\sum_{t=1}^n A_t (Z_t - Z_{g_t})^2 / \sum_{t=1}^n A_t \right)^{1/2} \quad (2)$$

où Z_{g_t} est l’altitude du centre de gravité de la facette triangulaire repérée t , Z_t son altitude théorique sur la parabole calculée en utilisant les coordonnées (X_{g_t}, Y_{g_t}) et A_t l’aire projetée du triangle sur le plan (\vec{X}, \vec{Y}) . On note ainsi que l’erreur rms est calculée relativement au repère global $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

On montre également qu’il existe un parabolôïde dit “best-fit” qui minimise l’erreur rms de facettisation (Figure 7, à droite). Ce parabolôïde correspond à celui théorique de départ mais après avoir subi une transformation constituée d’une translation ΔZ suivant \vec{Z} et deux rotations autour des axes \vec{X} et \vec{Y} . Cependant, ces rotations sont très faibles et peuvent être considérées comme négligeable dans l’analyse.

L’équation du parabolôïde best-fit est :

$$Z_{bf} = (X^2 + Y^2) / (4F_{bf}) + \Delta Z \quad (3)$$

où la translation axiale est $\Delta Z = \sum_{t=1}^n A_t (Z_t - Z_{g_t}) / \sum_{t=1}^n A_t$.

L’erreur axiale rms de facettisation donnée par (2) est proche de 3 mm pour les configurations où tous les nœuds sont sur la surface théorique. L’erreur par rapport à la parabole best-fit (où Z_{bf} remplace Z_t dans (2)) est 0.34 mm. Cette grande différence entre les deux erreurs peut s’expliquer par le fait que la parabole best-fit est proche des centres de gravité des triangles et non plus des intersections des câbles, à la différence du parabolôïde initial. La translation ΔZ (donnée par (3)) est quasi égale à cette différence. Une approche complémentaire consiste à ajuster la distance focale F_{bf} du parabolôïde best-fit. Optimiser ΔZ et F_{bf} en même temps grâce à un algorithme numérique spécifique permet ainsi de réduire encore l’erreur (voir le comparatif dans le Tableau 1).

Si les nœuds des bords fixes ne sont pas sur le parabolôïde, l’erreur rms du réseau entier par rapport à la parabole best-fit est égale à 11 mm. Si on ne considère que les nœuds coïncidents avec le parabolôïde, elle chute à 0.77 mm. Dans cette hypothèse, la surface concernée ne représente toutefois plus que 70 % du réseau total en projection. Il apparaît alors que le concepteur aura intérêt à choisir

une configuration où tous les nœuds sont sur le paraboloïde s'il souhaite une surface utile maximale associée à une erreur minimale.

Le Tableau 1 présente des valeurs d'erreurs en fonction de la discrétisation du réseau (nombre de divisions d'un secteur pour un motif diamatique) et du rapport F/D_a . On observe que l'erreur de facettisation augmente si le nombre de facettes diminue ou si la courbure augmente. Il convient aussi de noter que la méthode de recherche de forme proposée du réseau géotensoïd permet d'obtenir une erreur de facettisation très faible (même avec peu de facettes).

TAB. 1 – Erreurs de facettisation

Nombre de divisions	5	6	8	10	10	10
Nombre de facettes triangulaires n	150	216	384	600	600	600
Rapport F/D_a	0.45	0.45	0.45	0.45	0.30	0.60
Erreur de facettisation δ_{rms} (mm)	12.19	8.50	4.80	3.08	5.04	2.24
Erreur δ_{rms} avec une translation ΔZ (mm)	1.05	0.79	0.49	0.34	0.88	0.21
Erreur δ_{rms} avec ΔZ et optimisation F_{bf} (mm)	0.99	0.75	0.48	0.33	0.82	0.21

5 Conclusion

Une nouvelle méthode de calcul d'un réseau de câbles uniformément tendu est présentée. L'approche est basée sur une déclinaison de la méthode des densités de forces : l'idée est d'utiliser les forces nodales dans les tendeurs verticaux pour positionner les nœuds sur la surface ciblée. A l'issue d'un calcul itératif, un réseau de câbles en tension uniforme est obtenu grâce à des itérations sur les coefficients de densités de force. Plusieurs applications sur des surfaces différentes et avec plusieurs typologies de maillage montrent l'efficacité et la fiabilité de la méthode. Les valeurs obtenues pour l'erreur systématique de facettisation confirment que cette approche est en mesure de répondre aux exigences des applications spatiales. On présente aussi une stratégie pour rendre compatible le réseau calculé aux conditions particulières aux limites (structure de bord). Les exemples montrent qu'il peut être intéressant de choisir une conception où tous les nœuds du réseau sont sur la surface souhaitée. Cette approche permet de minimiser l'erreur de facettisation et d'utiliser toute la surface. Elle est présentée sur une application spécifique mais peut être utilisée dans d'autres domaines ou applications.

Références

- [1] K. Miura, Y. Miyazaki. *Concept of the tension truss antenna*, AIAA Journal, Vol. 28, pp. 1098-104, 1990.
- [2] A.G. Tibert. *Deployable tensegrity structures for space applications*, Ph.D. Dissertation, Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, Sweden, 2002.
- [3] J.M. Hedgepeth, M.W. Thomsom, D. Chae. *Design of large lightweight precise mesh reflector structures*, Astro Aerospace Corporation Technical Document, AAC-TN-1164, 1991.
- [4] K. Linkwitz, H.J. Shek. *Einige bemerkungen von vorgespantten seilnetzkonstruktionen*, Ingenieur-Archiv 40, Springer-Verlag, pp. 145-58, 1971.
- [5] B. Maurin, R. Motro. *Investigation of minimal forms with density methods*, Journal of the International Association for Shell and spatial Structures, Vol. 38(3), pp. 143-54, 1997.
- [6] M.W. Thomson. *AstroMesh deployable reflectors for Ku- and Ka-band commercial satellites*, 20th AIAA International Communication Satellite Systems Conference and Exhibit, Canada, pp. 2002-32, 2002.
- [7] P.K. Agrawal, M.S. Anderson, M.F. Card. *Preliminary design of large reflectors with flat facets*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-29(4), pp. 688-94, 1981.