



**HAL**  
open science

## Le comportement linéarisé d'un élastomère pré-chargé en régime harmonique

Thien An Nguyen Van, Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Dominique  
Eyheramendy

► **To cite this version:**

Thien An Nguyen Van, Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Dominique Eyheramendy. Le comportement linéarisé d'un élastomère pré-chargé en régime harmonique. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592870

**HAL Id: hal-00592870**

**<https://hal.science/hal-00592870>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Linéarisation de comportements viscoélastiques autour d'un état pré-chargé

T.A. NGuyen Van<sup>1</sup>, S. Lejeunes<sup>1</sup>, A. Boukamel<sup>2</sup>, D. Eyheramendy<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMA, CNRS UPR7051, France, {thienan,lejeunes}@lma.cnrs-mrs.fr

<sup>2</sup> EHTP, Casablanca, Maroc, boukamel@ehp.ac.ma

<sup>3</sup> ECM, LMA CNRS UPR7051, France, dominique.eyheramendy@centrale-marseille.fr

**Résumé** — Dans cette communication, on présente un formalisme adapté à la linéarisation de comportements autour d'un état pré-chargé et en grandes transformations. Ce formalisme générique est appliqué dans le cas d'un élastomère viscoélastique soumis à de petites vibrations avec pré-chargement statique. Par rapport aux approches existantes il permet de prendre automatiquement en compte des rotations de la configuration linéarisée par rapport à la configuration pré-chargée. Ainsi, on peut montrer que cette approche permet d'étendre le domaine de validité des modèles linéarisés existants.

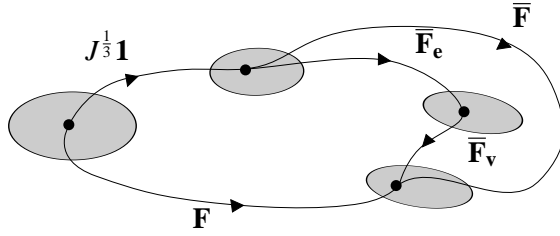
**Mots clés** — Linéarisation, pré-chargement, viscoélasticité.

## 1 Introduction

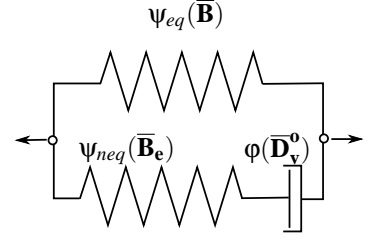
Le comportement dynamique des élastomères chargés a été étudié intensivement ces 30 dernières années et de nombreux modèles en grandes déformations ont été proposés. Pour autant, un certain nombre d'applications industrielles sont concernés par des petites vibrations autour d'un état de pré-chargement statique. C'est le cas de la plupart des pièces utilisées comme isolants anti-vibratoires que ce soit dans l'aéronautique ou l'automobile. Le matériau constitutif de ces pièces amortissantes est formé d'une base élastomérique (caoutchouc naturel ou synthétique) renforcée par des charges de noir de carbone ou de silice. Ce type de matériau dissipatif exhibe une dépendance fortement non-linéaire aux paramètres de chargement, on peut citer entre autre : l'effet Mullins, l'effet Payne, et l'effet Fletcher-Gent (voir par exemple [13, 4, 1]). Dans le cas qui nous intéresse, on peut constater expérimentalement que la réponse dynamique est fortement dépendante de la fréquence des vibrations et de l'amplitude du pré-chargement statique.

La linéarisation de comportements non-linéaires (viscoélastiques ou hyperélastiques) autour d'un état pré-déformé quelconque a été abordé par un certain nombre d'auteurs depuis les années 50, mais Lianis (voir [10]) est l'un des premiers à dériver de manière générique un modèle de petites transformations viscoélastiques superposées à un état de grandes transformations statiques. Ces travaux, théoriques, ont été ensuite repris ou étendus par d'autres auteurs et des implémentations numériques (éléments-finis) ont été proposées (voir [12, 6, 7, 5, 11]). Dans tous ces modèles, la linéarisation se base sur deux hypothèses principales : la contrainte peut être décomposée de manière additive en une partie statique et une partie dynamique, et la configuration dynamique est supposée confondue avec la configuration statique. En particulier, une rotation (grande ou petite) de la configuration dynamique, par rapport à la configuration statique, n'est pas autorisée par ces modèles.

Dans ce papier, nous proposons un formalisme général pouvant prendre en compte de grandes rotations de la configurations dynamique. Ce formalisme repose sur la notation d'états intermédiaires (voir [14]) et sur la décomposition polaire du gradient de la transformation. En particulier, nous montrons que dans le cas général la décomposition additive des contraintes (en une partie dynamique et une partie statique) n'est plus vrai. Ce formalisme est appliqué au modèle viscoélastique de Zener. Ce papier se compose des parties suivantes : la première présente un rappel du modèle de Zener. Dans une seconde partie, le choix d'une configuration appropriée pour la linéarisation est ensuite discutée puis cette dernière est détaillée dans le cas du modèle de Zener. Enfin, dans la dernière partie, quelques exemples sont proposés afin d'illustrer les avantages du formalisme adopté.



(a) Décomposition du gradient de la transformation



(b) Représentation rhéologique

FIGURE 1 – Modèle de Zener

## 2 Rappels sur le modèle viscoélastique de Zener (en transformations-fines)

Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversible, les équations constitutives doivent satisfaire l'inégalité de Clausius-Duhem (second principe), qui prend la forme eulérienne, isotherme suivante :

$$\mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - J^{-1} \rho_0 \dot{\psi} \geq 0$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est la contrainte de Cauchy,  $\mathbf{D}$  est le taux de déformation eulérien,  $J = \det \mathbf{F}$  est la variation de volume (et  $\mathbf{F}$  est le gradient de la déformation),  $\rho_0$  est la masse volumique dans la configuration initiale,  $\mathcal{D}_{int}$  est la dissipation intrinsèque et  $\psi$  est l'énergie libre spécifique. Afin de tenir compte de la faible compressibilité du matériau, nous choisissons de décomposer le gradient de la transformation en parties volumique et isochorique (voir [2]). Cette dernière partie est ensuite décomposée en parties élastique et inélastique (voir figure 1(a)) :

$$\mathbf{F} = \left( J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1} \right) \cdot \bar{\mathbf{F}} = \left( J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1} \right) \cdot \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_v$$

Ces choix impliquent que les processus dissipatifs seront purement isochores et que toutes les variations de volumes sont réversibles.

Le modèle de Zener se compose d'un élément viscoélastique de Maxwell mis en parallèle avec un élément ressort (voir figure 1(b)). On peut ensuite écrire l'énergie libre comme la contribution de trois parties :

$$\psi = \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{neq}(\bar{\mathbf{B}}_e) + \psi_{vol}(J)$$

avec  $\bar{\mathbf{B}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_e$  les tenseurs de Cauchy-Green gauches, respectivement basés sur les transformations  $\bar{\mathbf{F}}$  et  $\bar{\mathbf{F}}_e$ . Nous obtenons ainsi l'écriture suivante de la dissipation intrinsèque :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} = & \left( \boldsymbol{\sigma} - \rho_0 J^{-1} \left( 2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D - \rho_0 J^{-1} \left( 2\bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right)^D - \rho_0 \left( \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \right) \right) : \mathbf{D} \\ & + \left( 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right) : \bar{\mathbf{D}}_v^0 \geq 0 \end{aligned}$$

où  $^D$  est un opérateur déviatorique,  $\bar{\mathbf{V}}_e$  est la déformation élastique pure provenant de la décomposition polaire  $\bar{\mathbf{F}}_e = \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \mathbf{R}_e$  et  $\bar{\mathbf{D}}_v^0$  est un taux de déformation anélastique, objectif, défini par  $\bar{\mathbf{D}}_v^0 = \mathbf{R}_e \cdot \bar{\mathbf{D}}_v \mathbf{R}_e^T$  ou  $\bar{\mathbf{D}}_v$  est le taux eulérien de déformation anélastique incompressible. Au final, le comportement du modèle de Zener est défini par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \overbrace{\left( 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D}^{\boldsymbol{\sigma}_{eq}} + \overbrace{\left( 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right)^D}^{\boldsymbol{\sigma}_{neq}} + \overbrace{\rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1}}^{\boldsymbol{\sigma}_{vol}} \quad (1)$$

En se restreignant au cas des comportements isotropes, en introduisant un pseudo-potential de dissipation  $\phi$ , fonction de  $\bar{\mathbf{D}}_v^0$ , conjointement avec l'hypothèse de normalité force/flux, on peut obtenir la loi d'évolution suivante :

$$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} (\mathbf{1} : \mathbf{L}) \bar{\mathbf{B}}_e - \frac{2}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_{neq} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \quad (2)$$

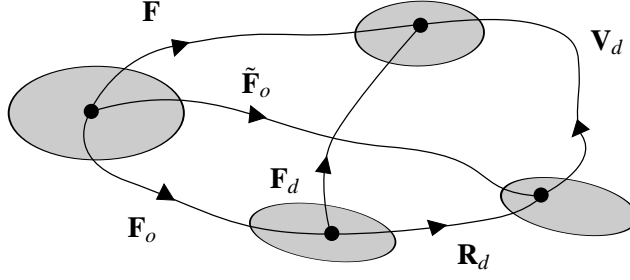


FIGURE 2 – Etats intermédiaires

### 3 Linéarisation autour d'un état pré-chargé

#### 3.1 Remarques sur le choix d'une configuration

Pour obtenir une formulation variationnelle cohérente avec les équations d'équilibre, on peut utiliser trois formes différentes de la puissance des efforts intérieurs en fonction la configuration considérée. On a typiquement :

$$\mathcal{P}_{int} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} = \int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi} : \delta \mathbf{F} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D}$$

où  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{S}$  sont le premier et second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff,  $\Omega_0$  et  $\Omega$  représentent le domaine considéré dans la configuration de référence ou actuelle. Les variations des grandeurs cinématiques :  $\mathbf{E}$  (tenseur de Cauchy-Green),  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{D}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \delta u + \nabla_{\mathbf{x}}^T \delta u + \nabla_{\mathbf{x}}^T \delta u \nabla_{\mathbf{x}} \delta u) \\ \delta \mathbf{F} &= \nabla_{\mathbf{x}} \delta u \\ \delta \mathbf{D} &= (\nabla_{\mathbf{x}} \delta u)_{sym} \end{aligned}$$

avec  $\nabla_{\mathbf{x}}$  et  $\nabla_{\mathbf{x}}$  les opérateurs gradient par rapport à la configuration de référence et à la configuration déformée,  $\delta u$  est le champ cinématique virtuel. L'écriture et l'implémentation numérique d'un comportement linéarisé doit faire intervenir un élément de puissance interne qui soit quadratique en terme de gradient cinématique, il est donc clair que le choix de la configuration mixte  $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{F})$  est particulièrement intéressant car il fait intervenir seulement une linéarisation de la contrainte. Pour les autres configurations, il faut également linéariser la déformation. Par ailleurs, toutes les configurations une fois linéarisées ne sont pas équivalentes si l'on traite séparément la linéarisation des contraintes et des déformations. Dans la suite, on choisira donc de travailler en configuration mixte, les équations eulériennes seront donc transportées avant linéarisation.

#### 3.2 Hypothèses sur la transformation

En premier lieu, nous considérons une décomposition du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  en une partie statique  $\mathbf{F}_o$  (qui ne dépend pas du temps) et une partie dynamique  $\mathbf{F}_d$  (qui dépend du temps) :

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_d(t) \cdot \mathbf{F}_o$$

L'état dynamique est ensuite décomposé en une partie rotation et une partie déformation pure (ce processus est schématisé dans la figure 2) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}_d \cdot \mathbf{R}_d \cdot \mathbf{F}_o = \mathbf{V}_d \cdot \tilde{\mathbf{F}}_o$$

Ainsi, la transformation  $\tilde{\mathbf{F}}_o$  peut être considérée comme une rotation dynamique avec pré-charge. Il faut noter que la variation totale de volume vient à la fois de la partie statique et de la partie dynamique :  $J = J_o J_d$ . Le gradient total de la déformation est donc :

$$\mathbf{F} = \left( J_d^{\frac{1}{3}} \mathbf{V}_d \right) \cdot \left( J_o^{\frac{1}{3}} \tilde{\mathbf{F}}_o \right)$$

Le tenseur, isochore, de Cauchy-Green gauche s'écrit :

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{V}}_d \cdot \tilde{\mathbf{F}}_o \cdot \tilde{\mathbf{F}}_o^T \cdot \bar{\mathbf{V}}_d = \bar{\mathbf{V}}_d \cdot \tilde{\mathbf{B}}_o \cdot \bar{\mathbf{V}}_d$$

Enfin, la déformation pure dynamique  $\bar{\mathbf{V}}_d$  se décompose en une partie élastique et une partie visqueuse :

$$\bar{\mathbf{V}}_d = \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{V}}_v \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{B}}_e = \bar{\mathbf{V}}_e^2$$

### 3.3 Linéarisation des quantités cinématiques

La décomposition de la déformation dynamique en déformation pure et rotation permet de considérer le cas :

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{1} + \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est un tenseur petites déformations, c.à.d. que les termes  $\varepsilon^2$  sont négligés. La variation volumique linéarisée est donc :

$$J = J_o J_d = J_o \det(\mathbf{1} + \varepsilon) \approx J_o (1 + \text{tr}\varepsilon)$$

La déformation pure dynamique s'écrit :

$$\bar{\mathbf{V}}_d = J_d^{-\frac{1}{3}} \mathbf{V}_d \approx \mathbf{1} + \varepsilon^D$$

Le tenseur linéarisé de Cauchy-Green gauche devient :

$$\bar{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}}_o + \varepsilon^D \cdot \tilde{\mathbf{B}}_o + \tilde{\mathbf{B}}_o \cdot \varepsilon^D$$

En supposant que  $\bar{\mathbf{V}}_e = \mathbf{1} + \varepsilon_e^D$  et  $\bar{\mathbf{V}}_v = \mathbf{1} + \varepsilon_v^D$ , on retrouve la définition classique :  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$ , et le tenseur élastique linéarisé de Cauchy-Green gauche est :

$$\bar{\mathbf{B}}_e \approx \mathbf{1} + 2\varepsilon_e^D$$

Le tenseur vitesse de déformation s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{L} \approx \dot{\varepsilon} + \tilde{\mathbf{L}}_o + \varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{L}}_o - \tilde{\mathbf{L}}_o \cdot \varepsilon$$

où  $\dot{\tilde{\mathbf{F}}}_o = \dot{\mathbf{R}}_d \cdot \mathbf{F}_o$ . Comme  $\mathbf{F}_o$  ne dépend pas du temps, si l'on considère le cas d'une déformation dynamique de rotation nulle ou constante, le tenseur vitesse de déformation linéarisé devient dans ce cas :  $\mathbf{L} \approx \dot{\varepsilon}$ . En considérant uniquement les comportements isotropes, il nous reste à définir les invariants de la transformation. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} I_1(\bar{\mathbf{B}}) &= \mathbf{1} : \bar{\mathbf{B}} \approx I_1(\tilde{\mathbf{B}}_o) + 2(\varepsilon^D : \tilde{\mathbf{B}}_o) \\ I_2(\bar{\mathbf{B}}) &= \frac{1}{2}(I_1(\bar{\mathbf{B}})^2 - \mathbf{1} : \bar{\mathbf{B}}^2) \approx I_2(\tilde{\mathbf{B}}_o) + (\varepsilon^D : \tilde{\mathbf{B}}_o) - 2(\varepsilon^D : \tilde{\mathbf{B}}_o^2) \end{aligned}$$

Par ailleurs, il faut remarquer que de part les propriétés du tenseur rotation, on a :

$$I_1(\tilde{\mathbf{B}}_o) = I_1(\bar{\mathbf{B}}_o) \quad \text{and} \quad I_2(\tilde{\mathbf{B}}_o) = I_2(\bar{\mathbf{B}}_o)$$

### 3.4 Linéarisation des contraintes

En partant de l'équation (1), il nous faut transporter les contraintes de Cauchy dans la configuration mixte, puis effectuer la linéarisation de chacun des termes. Ainsi, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff provenant de  $\sigma_{eq}$  devient :

$$\Pi_{eq} = J \sigma_{eq} \mathbf{F}^{-T} = 2\rho_0 \left[ \bar{\mathbf{B}} \left( \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial I_1} - I_1 \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial I_2} \right) - \bar{\mathbf{B}}^2 \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial I_2} \right]^D \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Les notations suivantes sont adoptées :  $\psi_{eq,1}^o$  et  $\psi_{eq,1}^\varepsilon$  dénotent la dérivée partielle de  $\psi_{eq}$  par rapport à  $I_1$  dépendant respectivement de  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{eq} \approx & \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o \cdot \mathbf{F}_o^{-T} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_o^{-T} + 2\rho_0 \left[ (\boldsymbol{\varepsilon}^D \cdot \tilde{\mathbf{B}}_o + \tilde{\mathbf{B}}_o \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D) (\psi_{eq,1}^o - I_1(\bar{\mathbf{B}}_o)\psi_{eq,2}^o) \right. \\ & \left. - 2(\boldsymbol{\varepsilon}^D : \tilde{\mathbf{B}}_o)\psi_{eq,2}^o \tilde{\mathbf{B}}_o - (\boldsymbol{\varepsilon}^D \cdot \tilde{\mathbf{B}}_o^2 + \tilde{\mathbf{B}}_o^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D + 2\tilde{\mathbf{B}}_o \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D \cdot \tilde{\mathbf{B}}_o)\psi_{eq,2}^o \right]^D \cdot \tilde{\mathbf{F}}_o^{-T} \\ & + 2\rho_0 \left[ \tilde{\mathbf{B}}_o (\psi_{eq,1}^\varepsilon - I_1(\bar{\mathbf{B}}_o)\psi_{eq,2}^\varepsilon) - \tilde{\mathbf{B}}_o^2 \psi_{eq,2}^\varepsilon \right]^D \cdot \tilde{\mathbf{F}}_o^{-T} \end{aligned}$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_o$  est définie par :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_o = 2\rho_0 \left[ \tilde{\mathbf{B}}_o (\psi_{eq,1}^o - I_1(\bar{\mathbf{B}}_o)\psi_{eq,2}^o) - \tilde{\mathbf{B}}_o^2 \psi_{eq,2}^o \right]^D = \mathbf{R}_d \cdot \boldsymbol{\tau}_o \cdot \mathbf{R}_d^{-T}$$

La détermination de la contrainte visqueuse est plus simple (même raisonnement pour la partie volumique) :

$$\mathbf{\Pi}_{neq} \approx 4\rho_0 \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_e^D (\psi_{eq,1}^o - 5\psi_{eq,2}^o) \right] \cdot \tilde{\mathbf{F}}_o^{-T}$$

Par conséquent, on obtient une formulation dans laquelle la contrainte totale n'est pas définie comme une somme de sa partie statique et de sa partie dynamique (hormis si les rotations dynamiques sont négligées). L'équation d'évolution (2), peut également être linéarisée en utilisant les expressions établies dans la section précédente :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^D \approx \boldsymbol{\varepsilon}^D + \tilde{\mathbf{D}}_o^D + (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{W}}_o - \tilde{\mathbf{W}}_o \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + (\boldsymbol{\varepsilon}_e^D \cdot \tilde{\mathbf{L}}_o + \tilde{\mathbf{L}}_o \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e^D) - \frac{2}{3}(\tilde{\mathbf{L}}_o : \mathbf{1})\boldsymbol{\varepsilon}_e^D - \frac{1}{\eta}\boldsymbol{\sigma}_{neq} \quad (3)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_{neq}$  est définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{neq} \approx 4\rho_0 J_o^{-1} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_e^D (\psi_{eq,1}^o - 5\psi_{eq,2}^o) \right]$$

$\tilde{\mathbf{D}}_o, \tilde{\mathbf{W}}_o$  sont les parties symétriques et anti-symétriques du tenseur  $\tilde{\mathbf{L}}_o^{-1}$

### 3.5 Implémentation numérique

Ce modèle de comportement linéarisé a été implémenté dans le logiciel ZéBuLoN, développé par les Mines de Paris, l'Onéra et Northwest Numerics [3]. La faible compressibilité du matériau est traitée via une formulation mixte  $\{\mathbf{u}, p\}$  en lagrangien perturbé, pour laquelle une transformation de Legendre a été utilisée afin d'introduire la pression hydrostatique  $p$ , variable duale de  $J$ . La loi d'évolution (eq. 3) est intégrée localement (au niveau du point de Gauss) par un schéma d'Euler implicite. Pour plus de détails, notamment sur le calcul de l'opérateur tangent on peut se référer à [9]. Enfin, pour valider le modèle linéarisé, des comparaisons avec le modèle de Zener en grandes transformations sont proposées dans la suite, nous nous référons à [8] pour ce qui concerne son implémentation.

## 4 Quelques exemples

### 4.1 Torsion et traction sur un bloc en caoutchouc

On considère un bloc rectangulaire en caoutchouc, soumis sur sa surface supérieure à une torsion dynamique, superposée à un état de torsion statique ou bien à une traction dynamique (imposée en déplacement), superposée à une traction statique. La surface inférieure est encastrée et les surfaces latérales sont libres de contraintes. Le bloc rectangulaire a pour dimension 30x30 mm de section et 150 mm de longueur. Pour l'essai de torsion, l'angle de torsion est imposé par un point de référence qui contrôle le mouvement rigide de la surface supérieure, les déplacements latéraux et les autres degrés de liberté de rotation de ce point sont fixes, la translation verticale est libre. Pour l'essai de traction, la surface supérieure est soumise à un déplacement vertical imposé sans déplacements latéraux. Pour les deux

---


$$1. \tilde{\mathbf{D}}_o = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}}_o + \tilde{\mathbf{L}}_o^T) \quad \tilde{\mathbf{W}}_o = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}}_o - \tilde{\mathbf{L}}_o^T)$$

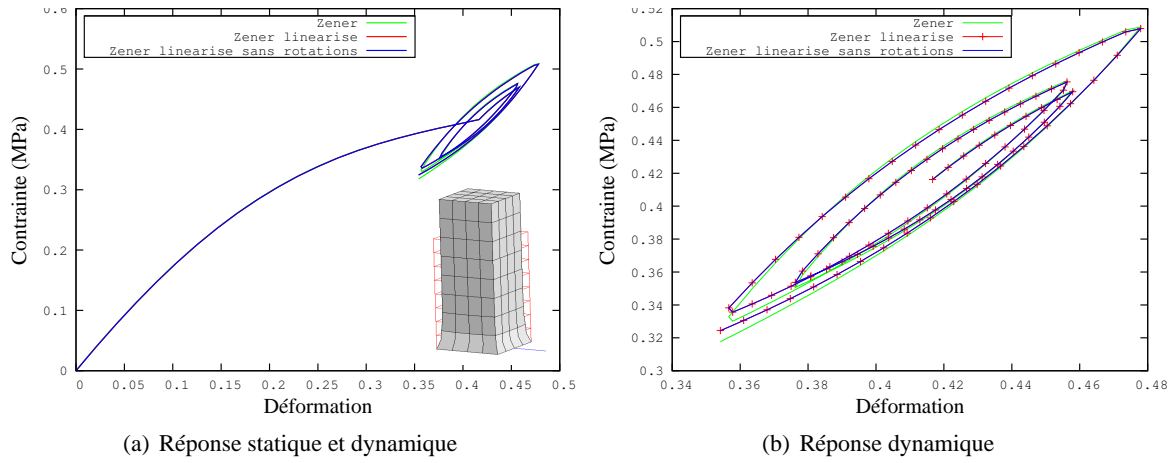


FIGURE 3 – Traction

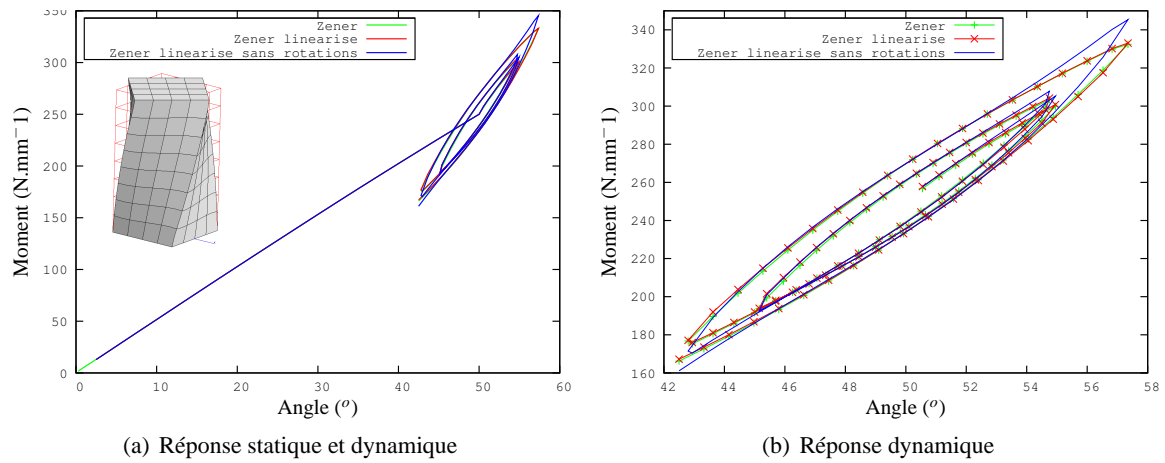


FIGURE 4 – Torsion

tests, le chargement dynamique est appliqué par un signal triangulaire de fréquence 5 Hz. On considère les potentiels hyperélastiques suivants (les paramètres sont donnés dans le tableau 1) :

$$\begin{cases} \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}}) = c_{10}(I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) + c_{01}(I_2(\bar{\mathbf{B}}) - 3) + c_{20}(I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3)^2 + c_{30}(I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3)^3 \\ \psi_{neq}(\bar{\mathbf{B}}_e) = G(I_1(\bar{\mathbf{B}}_e) - 3) \\ \psi_{vol}(J) = \frac{k}{2}(J - 1)^2 \end{cases}$$

	$c_{10}$ (MPa)	$c_{01}$ (MPa)	$c_{20}$ (MPa)	$c_{30}$ (MPa)	$G$ (MPa)	$\eta$ (MPa.s)	$k$ (MPa)
Zener	0,090	-0,014	-0,042	0,019	0,110	0,030	1500

TABLE 1 – Paramètres matériaux

Afin de mettre en lumière l'intérêt d'une formulation linéarisée, qui prend en compte les grandes rotations matérielles, nous proposons de comparer les résultats avec une linéarisation plus simple dans laquelle on considère la décomposition :  $\mathbf{F} = (\mathbf{1} + \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}_o$  avec  $\varepsilon = 1/2(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)$  et on néglige les termes en  $\mathbf{h}^2$  (les équations constitutives obtenues avec ce modèle se trouvent dans [5]). Dans la suite, le modèle proposé est dénommé "Zener linéarisé", le modèle complètement non linéaire est dénommé "Zener" et la linéarisation sans rotations est appelée «Zener linéarisé sans rotation».

La figure 3(a) montre les réponses statiques et dynamiques du test de traction pour les trois modèles. On peut observer que les deux modèles linéarisés donnent des résultats très similaires, et ils sont très proches du non-linéaire. Plus précisément, la figure 3(b) montre que pour 10% d'amplitude dynamique la réponse est identique pour les trois modèles. A 15%, une légère différence est observée sur la phase de

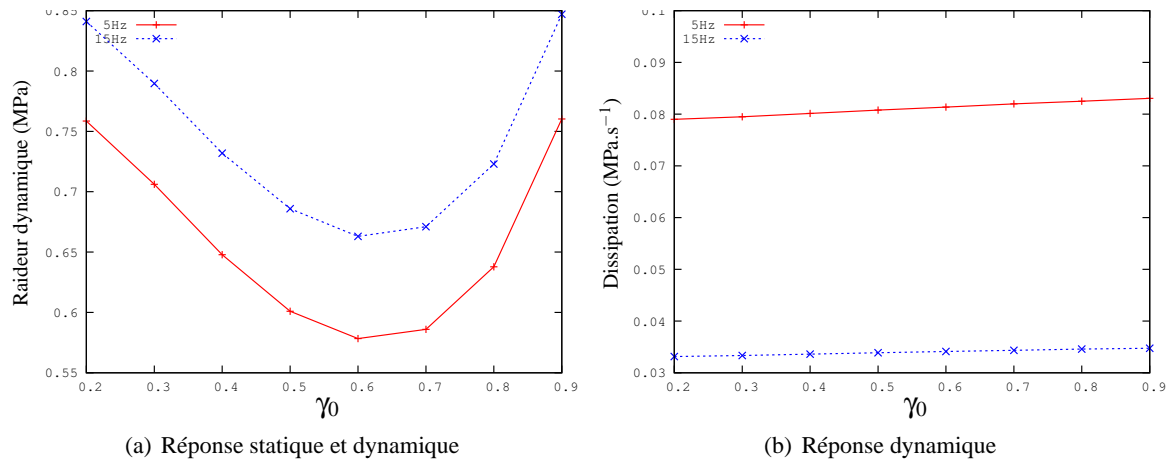


FIGURE 5 – Test de cisaillement ("Zener linéarisé")

déchargement. Pour le test de torsion, les deux modèles linéarisés présentent un comportement différent, dans les figures 4(a) et 4(b) on peut voir que le modèle sans rotation donne une réponse plus rigide que celle complètement non-linéaire.

## 4.2 Cisaillement sur un palier stratifié

Dans cet exemple, on considère un palier stratifié en caoutchouc composé de 4 couches rectangulaires en caoutchouc ( $2,5 \times 25 \text{ mm}^2$ ), intercalés avec 3 couches d'acier ( $1,5 \times 25 \text{ mm}^2$ ). Le stratifié est supposé en déformation plane. Il est fixé sur sa face inférieure alors que la face supérieure est soumise à un déplacement transversal sans déplacement vertical imposé. Les paramètres matériau du caoutchouc sont les mêmes que précédemment, l'acier est supposé élastique, isotrope avec les caractéristiques suivantes :  $E = 200\,000 \text{ Mpa}$  et  $\nu = 0,3$ . On définit l'amplitude  $\gamma_0$  comme la hauteur totale de caoutchouc, divisé par le déplacement transversal appliqué, et l'on fait varier l'amplitude statique afin d'observer l'influence du pré-chargement et de la fréquence de la sollicitation (l'amplitude dynamique est fixée à  $\gamma = 0,05$ ).

La figure (5) montre l'évolution de la raideur dynamique et de la dissipation globale sur un cycle stabilisé pour différents pré-chargements statiques et pour deux fréquences. Cette courbe montre que la méthode de linéarisation proposée peut prendre en compte les effets non-linéaires du pré-chargement dans le comportement dynamique. Les figures (6(a)) et (6(b)) présentent les réponses globales obtenues avec le modèle non linéaire et le modèle linéarisé sans rotation. On peut observer que les réponses sont très proches, même si la forme linéarisée sans rotations semble plus souple que les deux autres.

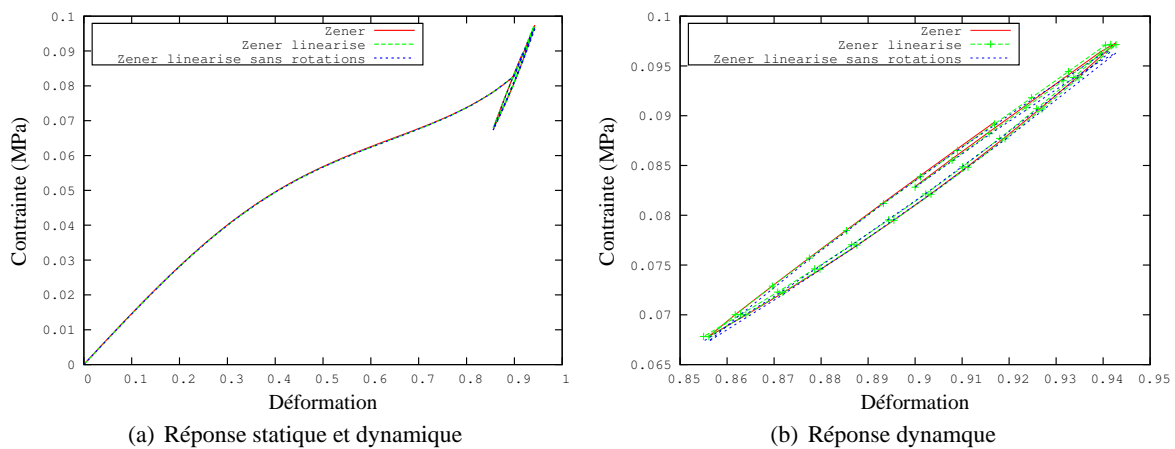


FIGURE 6 – Test de cisaillement ( $\gamma_0 = 0,9, f = 15Hz$ )



## 5 Conclusions

Nous avons proposé un formalisme de linéarisation intégrant de grandes rotations matérielles (ou géométriques) que nous avons appliqué à un modèle viscoélastique de Zener. A travers trois exemples, nous avons montré que ce formalisme permet d'étendre le domaine de validité de formulations linéarisées autour d'un état grandes déformations. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de la torsion pour lequel il est clair que la configuration actuelle ne peut pas être confondue avec la configuration pré-chargée. D'une manière générale, les formulations linéarisées sont intéressantes pour les applications industrielles concernées par de petites vibrations autour d'un état pré-chargé. Le formalisme proposé offre la possibilité d'obtenir un modèle de comportement simplifié, qui pourrait nous permettre (dans le cas de sollicitations harmoniques) d'exprimer directement la raideur dynamique et le module de perte en fonction de la fréquence et de l'amplitude dynamique, une fois déterminée la réponse statique. En cela, ce type d'approche présente un intérêt certain dans le pré-dimensionnement de structures anti-vibratoires.

## Références

- [1] W. Fletcher, A. Gent, *Non-linearity in the dynamic properties of vulcanised rubber compounds*, IRI Transaction, 266-280, 1953.
- [2] R.J. Flory, *Transactions of the Faraday Society*, Thermodynamic relations for highly elastic materials, 829-838, 1961.
- [3] R. Foerch, J. Besson, G. Cailletaud, *Polymorphic constitutive equations in finite element codes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 355-372, 1996.
- [4] J. Harwood, L. Mullins, A. Payne, *Stress softening in rubbers : a review*, Journal of the IRI, 12-27, 1967.
- [5] P. Höfer, A. Lion, *Modelling of frequency and amplitude-dependant material properties of filler-reinforced rubber*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 500-520, 2009.
- [6] B.K. Kim, S.K. Youn, *A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory load superimposed on large static deformation*, Archive of Applied Mechanics, 748-763, 2001.
- [7] B.K. Kim, S.K. Youn, W.S. Lee, *A constitutive model and fea of rubber under small oscillatory load superimposed on large static deformation*, Archive of Applied Mechanics, 781-798, 2004.
- [8] S. Lejeunes, A. Boukamel, S. Méo, *Finite element implementation of nearly-incompressible rheological models based on multiplicative decompositions*, Computers & Structures, 411-421, 2011
- [9] S. Lejeunes, T. Nguyen, A. Boukamel, D. Eyheramendy, *Linearized behavior of a dissipative rubber with large static preloads*, Soumis à Computers & Structures
- [10] G. Lianis, *Small deformations superposed on an initial large deformation in viscoelastic bodies*, Proceedings of the Fourth International Congress on Rheology, 104-119, 1965.
- [11] A. Lion, J. Retka, M. Rendek, *On the calculation of predeformation-dependent dynamic modulus tensors in finite nonlinear viscoelasticity*, Mechanics Research Communications, 653-658, 2009.
- [12] K.N. Morman and J.C. Nagtegaal, *Finite element analysis of sinusoidal small amplitude vibrations in deformed viscoelastic solids. part I : Theoretical development*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1079-1103, 2005.
- [13] L. Mullins, *Effect of stretching on the properties of rubber*, Journal of Rubber Research, 275-289, 1947.
- [14] F. Sidoroff, *Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire*, Journal de Mécanique, 679-713, 1974.