



**HAL**  
open science

## Un modèle de poutre à section fortement déformable. Application au pliage at au déploiement de mètres rubans.

François Guinot, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, Christian Hochard,  
Laurent Blanchard

### ► To cite this version:

François Guinot, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, Christian Hochard, Laurent Blanchard. Un modèle de poutre à section fortement déformable. Application au pliage at au déploiement de mètres rubans.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592867

**HAL Id: hal-00592867**

**<https://hal.science/hal-00592867>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Un modèle de poutre à section fortement déformable. Application au pliage et au déploiement de mètres rubans.

F. Guinot<sup>1</sup>, S. Bourgeois<sup>1,2</sup>, B. Cochelin<sup>1,2</sup>,  
C. Hochard<sup>1</sup>, L. Blanchard<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMA, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille, France, {guinot,hochard}@lma.cnrs-mrs.fr

<sup>2</sup> Ecole Centrale Marseille, France, {stephane.bourgeois,bruno.cochelin}@centrale-marseille.fr

<sup>3</sup> Thales Alenia Space, Cannes La Bocca, France, laurent.blanchard@thalesaleniaspace.com

**Résumé** — On s'intéresse à la modélisation de poutres élastiques à parois minces type mètres rubans qui développent des pliages localisés dus à un aplatissement de la section. Partant d'un modèle de coque, on établit un modèle de poutre à section fortement déformable, en grands déplacements et en dynamique, en introduisant une cinématique originale pour décrire les changements de forme de la section. Ce modèle est capable de rendre compte de l'apparition de pliages localisés qui peuvent migrer le long du ruban, se dupliquer, disparaître, permettant ainsi de simuler des scénarios complexes de pliages et de déploiements.

**Mots clés** — poutre, mètres rubans, pliage, dynamique.

### 1 Introduction

Un défi majeur des concepteurs de satellites est de réaliser des systèmes qui soient compacts lors de la phase de transport et capables de se déployer de façon autonome lors la mise en service. Parce qu'elles offrent une meilleure compacité (pliage, enroulement...), les structures souples déployables sont une alternative intéressante aux structures rigides articulées par des charnières et bloquées par des verrous. Dans ce contexte, Thales Alenia Space réfléchit à de nouveaux concepts à base de structures type mètres rubans.

Dans sa configuration relâchée, un mètre ruban peut être assimilé à une poutre droite à paroi mince dont la section ouverte a une forme circulaire. Lorsqu'on sollicite cette structure en flexion ou en compression (voir Figure 1), son comportement est d'abord analogue à celui d'une poutre classique puis on constate l'apparition brutale de pliages localisés, indiquant la présence de bifurcations [9]. Ces zones de pliages sont dus à un aplatissement de la section qui diminue fortement le moment d'inertie quadratique et concentre la déformation de flexion. On remarquera qu'en dehors des zones de pliage, le ruban retrouve sa forme non déformée. En manipulant le mètre ruban, on constate facilement que la zone de pliage peut migrer le long du ruban, se dupliquer, disparaître...

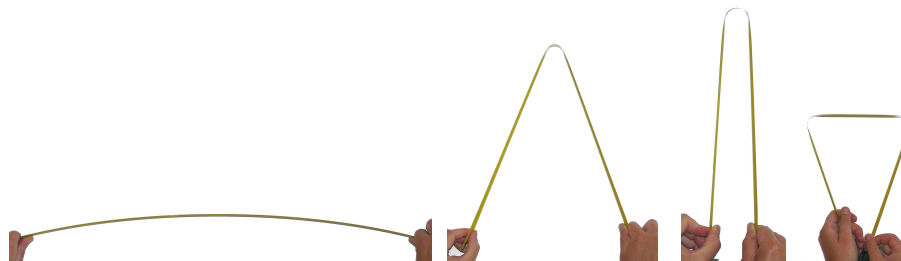


FIGURE 1 – Pliage d'un mètre ruban.

Dans la littérature, on recense principalement deux approches pour modéliser la dynamique du pliage et du déploiement des mètres rubans. La première consiste à résoudre le problème non-linéaire de coque par éléments finis ([10], [13], [6]), sans tenir compte des spécificités géométriques d'un mètre ruban. Elle permet d'obtenir des résultats précis mais conduit à des modèles lourds et des calculs souvent difficiles à piloter. La deuxième approche consiste à modéliser le ruban par un système de barres reliées par des

ressorts spiraux en tenant compte des modes de déformations spécifiques aux mètres rubans [9] : les ressorts spiraux, de raideur non-linéaire, modélisent les zones de pliage et les barres, de longueur variable, rendent compte des parties qui restent droites. Ce modèle simplifié permet de simuler des scénarios de déploiement, de déroulement ou de migration d'une zone de pliage avec très peu de degrés de libertés mais requiert l'introduction *ab initio* des zones de pliages. Ainsi, par exemple, il ne permet pas de rendre compte de la séparation d'une zone de pliage en deux.

Une méthode intermédiaire consiste à essayer de modéliser le mètre ruban par une poutre à section fortement déformable. Dans la littérature, les modèles de poutre à section déformable reposent principalement sur l'introduction de degrés de libertés supplémentaires attachés à des modes de déformations de la section dans son plan et hors de son plan. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, on peut citer les travaux fondateurs de Vlassov [12]. Dans le cadre non-linéaire, des démarches similaires ont été utilisées pour généraliser la théorie des poutres de Reissner-Simo ([8],[11]) aux cas des poutres à sections déformables ([3],[7]). Le choix des modes est souvent guidé par les champs de déplacements, de déformations et de contraintes régnant dans la section sous des sollicitations simples et des géométries de section idéalisées. Une autre approche consiste à introduire une discrétisation par éléments finis dans la section [14].

Le modèle proposé, développé dans le cadre de la thèse de François Guinot [5], s'inscrit dans cette logique. Partant d'un modèle de coque en grands déplacements, grandes rotations et en dynamique, on établit le modèle de poutre en introduisant des hypothèses cinématiques et sthéniques sur le comportement dans la section. Outre les hypothèses classiques de poutres minces (sections qui restent droites et perpendiculaires à ligne moyenne), l'originalité du modèle repose sur l'introduction d'une cinématique de type "elastica" pour décrire avec peu de paramètres le caractère fortement variable de la forme de la section : on suppose que la "courbe section" est inextensible. D'autre part, on fait l'hypothèse, comme pour une théorie classique de poutre, que les contraintes axiales sont prépondérantes devant les autres composantes. Ces hypothèses sont introduites dans les énergies potentielle et cinétique du modèle de coque et on obtient le modèle de poutre par une intégration analytique dans la section. Le modèle est implémenté dans COMSOL [1] qui permet d'exploiter directement les expressions des énergies en formulant le problème à l'aide du principe d'Hamilton. Quelques exemples de résultats sont présentés.

## 2 Description cinématique et hypothèses

On considère un mètre ruban décrit par une poutre dont la ligne centrale (appelée ligne moyenne dans la suite) est initialement droite et la section initialement circulaire (Figure 2). Le repère fixe  $(O, e_1, e_2, e_3)$  est défini tel que l'axe  $(O, e_1)$  contienne la ligne moyenne et que le plan  $(O, e_1, e_3)$  soit le plan de symétrie.

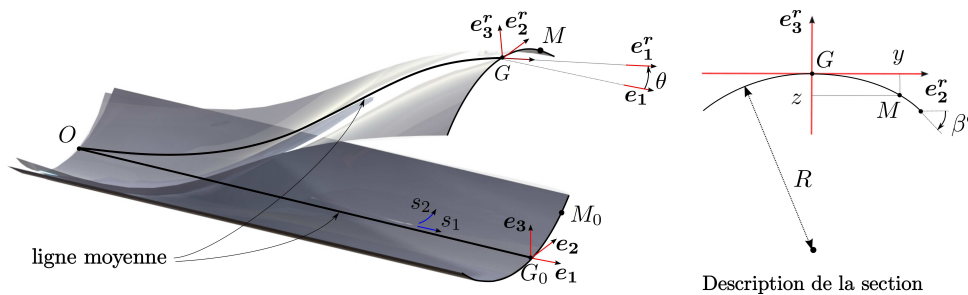


FIGURE 2 – Description du mètre ruban.

Soit  $M$  un point matériel attaché à la coque. Dans la configuration initiale, sa position est donnée par le vecteur  $OM_0$  qui peut se décomposer en deux parties :

$$OM_0 = OG_0 + G_0M_0, \quad (1)$$

où  $G_0$  est le point d'intersection de la ligne de référence et de la section contenant le point  $M$ . Pour décrire la géométrie du mètre ruban, on introduit le système de coordonnées curvilignes  $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [-a/2, a/2]$  où  $L$  est la longueur initiale du ruban et  $a$  la longueur de l'arc de cercle décrivant la section.

On définit les coordonnées locales  $y_0(s_2)$  et  $z_0(s_2)$  du point  $M_0$  dans le plan de la section non déformée  $(G_0, e_2, e_3)$  de telle sorte à ce que l'on ait :

$$\begin{aligned} OG_0 &= s_1 e_1, \\ G_0M_0 &= y_0(s_2) e_2 + z_0(s_2) e_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Dans la configuration déformée, la position du point matériel est donné par le vecteur  $OM$  tel que :

$$OM = OG + GM, \quad (3)$$

où  $G$  est l'image de  $G_0$ . On se restreint dans la suite à l'étude des mouvements plans : la ligne moyenne se déforme dans le plan  $(O, e_1, e_3)$  et la section reste symétrique par rapport à ce plan. En introduisant les translations  $u_1(s_1, t)$  et  $u_3(s_1, t)$  nous obtenons :

$$OG = (s_1 + u_1) e_1 + u_3 e_3. \quad (4)$$

En ce qui concerne la section, la description de la cinématique repose sur les hypothèses suivantes :

- (i) la section est contenue dans un plan après déformation,
- (ii) la section reste orthogonale au vecteur tangent à la déformée de la ligne moyenne,
- (iii) la "courbe section" est considérée inextensible.

Les deux premières hypothèses sont classiques et correspondent à une cinématique d'Euler-Bernoulli. L'hypothèse (i) permet d'introduire un repère tournant  $(G, e_1^r, e_2^r, e_3^r)$ , où  $e_1^r$  est un vecteur unitaire orthogonal au plan de la section dans la configuration déformée,  $e_2^r = e_2$  et  $e_3^r = e_1^r \times e_2^r$ . En notant  $\theta(s_1, t)$  la rotation du plan de la section autour de  $e_2$ , on a :

$$\begin{aligned} e_1^r &= \cos(\theta) e_1 - \sin(\theta) e_3, \\ e_3^r &= \sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_3. \end{aligned} \quad (5)$$

L'hypothèse (ii) implique que le vecteur  $e_1^r$  soit colinéaire au vecteur naturel tangent à la ligne moyenne  $a_1^r$ . En introduisant  $j^r$  la norme de  $a_1^r$ , on obtient :

$$a_1^r = OG_{,1} = j^r e_1^r, \quad (6)$$

où la notation  $X_{,i}$  désigne la dérivée partielle de  $X$  par rapport à  $s_i$ . On déduit des équations (4), (5) et (6) une relation entre la rotation  $\theta$  et les déplacements  $u_1$  et  $u_3$  :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{j^r} (1 + u_{1,1}), \quad \sin(\theta) = -\frac{1}{j^r} (u_{3,1}), \quad (7)$$

avec  $j^r = \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2}$ . Dans le repère local  $(G, e_2^r, e_3^r)$ , les coordonnées du point  $M$  sont notées  $y(s_1, s_2, t)$  et  $z(s_1, s_2, t)$  :

$$GM = y e_2^r + z e_3^r. \quad (8)$$

D'autre part, l'hypothèse d'inextensibilité (iii) conduit à la relation :

$$(GM)_{,2} \cdot (GM)_{,2} - (G_0M_0)_{,2} \cdot (G_0M_0)_{,2} = (y_{,2})^2 + (z_{,2})^2 - 1 = 0. \quad (9)$$

En introduisant l'angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  entre la tangente à la courbe section et le vecteur  $e_2^r$  (voir Figure 2), on a :

$$\begin{cases} y_{,2} = \cos(\beta), \\ z_{,2} = \sin(\beta). \end{cases} \quad (10)$$

Revenons sur l'hypothèse d'inextensibilité. On suppose ici que le phénomène majeur à prendre en compte dans la mécanique du ruban est la variation de l'inertie en flexion de la section : c'est l'aplatissement de la section qui concentre la déformation de flexion et permet de créer un pli localisé. On admet alors que les déformations transversales sont négligeables dans le calcul de cette inertie et que l'hypothèse d'inextensibilité est suffisante pour décrire l'allure générale de la courbe section. Cette hypothèse permet aussi de s'inspirer fortement du modèle *Elastica* ([2],[4]), qui utilise le seul paramètre cinématique  $\beta$  pour décrire le comportement d'une poutre inextensible en grands déplacements et en

grandes rotations. Ici, l'angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  joue aussi un rôle fondamental puisqu'il est le seul paramètre cinématique qui décrit l'allure de la section. Dans la suite, on suppose que les sections restent circulaires avec un rayon dépendant de l'abscisse  $s_1$  et du temps  $t$ . En introduisant  $\beta^e(s_1, t) = \beta(s_1, s_2 = a/2, t)$  (voir Figure 2), on a :

$$\beta(s_1, s_2 = a/2, t) = 2 \frac{s_2}{a} \beta^e(s_1, t) \quad (11)$$

Les relations (10) permettent de calculer les coordonnées locales  $y$  et  $z$  d'un point de la section :

$$\begin{aligned} y(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \cos \beta(s_1, \xi, t) d\xi = \frac{a}{2\beta^e} \sin\left(2\beta^e \frac{s_2}{a}\right), \\ z(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \sin \beta(s_1, \xi, t) d\xi = \frac{a}{2\beta^e} \left(1 - \cos\left(2\beta^e \frac{s_2}{a}\right)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Finalement, la cinématique est entièrement décrite par seulement quatre paramètres cinématiques attachés à la ligne moyenne (dépendant uniquement de l'abscisse  $s_1$  et du temps  $t$ ) : les deux composantes  $u_1$  et  $u_3$  de translations, l'angle de rotation de la section  $\theta$  et l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$ . La démarche est ici présentée pour une forme de section simple et une cinématique de déformation simple. Il est possible de généraliser l'approche à une forme plus complexe et/ou d'enrichir la cinématique en adoptant une discrétisation adaptée (Ritz, éléments finis) de l'angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  dans le sens de la coordonnée transversale  $s_2$ .

### 3 Mesure des déformations et énergie de déformation

#### 3.1 Mesure des déformations

Le ruban étant assimilée à une coque mince, l'énergie de déformation est calculée à partir des déformations de membrane et de flexion. Les déformations de membrane sont exprimées à l'aide du tenseur de Green-Lagrange. Les déformations de flexion sont quant à elles définies par la différence entre le tenseur des courbures actuelles et le tenseur des courbures initiales. Ces déformations de membrane et de flexion peuvent être exprimées en fonction des paramètres cinématique  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\theta$  et  $\beta$  en introduisant la cinématique décrite au paragraphe précédent. On obtient ainsi des expressions des déformations établies dans le cadre des grands déplacements, grandes rotations et grandes déformations. Dans l'optique de simplifier ces expressions, on peut remarquer que l'épaisseur de la coque étant faible devant la largeur de la section et la longueur de la poutre, la coque aura tendance à travailler plus en flexion qu'en membrane, quitte à développer du flambage. En introduisant l'hypothèse des petites déformations de membrane, on peut décomposer les déformations de membrane et de flexion de la façon suivante :

$$\begin{aligned} e_{11} &= e^r + z k^r + e^s, \\ k_{11} &= -k^r \cos(\beta) + k_{11}^s, \\ k_{22} &= k_{22}^s, \\ k_{12} &= k_{12}^s. \end{aligned} \quad (13)$$

avec

$$\begin{cases} e^r = u_{1,1} + \frac{1}{2}((u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2), \\ k^r = \theta_{,1}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^s = \frac{1}{2}((y_{,1})^2 + (z_{,1})^2), \\ k_{11}^s = z_{,11} \cos(\beta) - y_{,11} \sin(\beta), \\ k_{22}^s = \beta_{,2} - \beta_{0,2}, \\ k_{12}^s = \beta_{,1}. \end{cases} \quad (14)$$

Les expressions (13) et (14) font clairement apparaître des déformations induites par la cinématique globale de poutre (exposant  $r$ ) et des déformations induites par l'évolution de la forme de la section (exposant  $s$ ). On reconnaît notamment l'expression classique des déformations de tension  $e^r$  et de flexion  $k^r$  de poutre dans le cadre des grands déplacements et des grandes rotations. Les déformations  $e^s$  et  $k_{\alpha\beta}^s$ , qui ne dépendent que de l'angle  $\beta$ , sont quant à elles moins classiques et constituent par leur présence l'originalité du modèle.

### 3.2 Énergie de déformation

Classiquement l'énergie de déformation élastique d'une coque est donnée par :

$$U_e(u_1, u_3, \theta, \beta) = \int_0^L \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}) ds_2 ds_1. \quad (15)$$

où  $N_{\alpha\beta}$  et  $M_{\alpha\beta}$  sont respectivement les contraintes de membrane et les moments de flexion. Comme la largeur  $a$  de la section est petite devant la longueur axiale  $L$ , on utilise les hypothèses classiques de la théorie des poutres supposant que  $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ , qui deviennent ici  $N_{22} = N_{12} = 0$ . La coque est supposée élastique orthotrope sans couplage entre les comportements en membrane et en flexion. Ainsi, la loi de comportement peut s'écrire de la manière suivante :

$$N_{11} = A e_{11}, M_{11} = D_1 k_{11} + D_3 k_{22}, M_{22} = D_3 k_{11} + D_2 k_{22}, M_{12} = D_4 (2k_{12}), \quad (16)$$

où  $A, D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  sont les constantes d'élasticité. Finalement, l'énergie de déformation peut être décomposée de la manière suivante :

$$U_e = U_e^r + U_e^s + U_e^{rs} \quad (17)$$

avec

$$\begin{cases} U_e^r = \int_0^L \frac{1}{2} \left( A a e^{r^2} + \left( A \bar{z}^2 + D_1 \overline{\cos^2(\beta)} \right) k^{r^2} + 2A \bar{z} e^r k^r \right) ds_1 \\ U_e^s = \int_0^L \frac{1}{2} \left( A \bar{e}^{s^2} + D_1 \overline{k_{11}^s} + D_2 \overline{k_{22}^s} + 2D_3 \overline{k_{11}^s k_{22}^s} + 4D_4 \overline{k_{12}^s} \right) ds_1 \\ U_e^{rs} = \int_0^L \left( A e^r \bar{e}^s + A k^r \bar{z} e^s - k^r \left( D_1 \overline{\cos(\beta)} \overline{k_{11}^s} + D_3 \overline{\cos(\beta)} \overline{k_{22}^s} \right) \right) ds_1 \end{cases} \quad (18)$$

où la notation  $\bar{X}$  introduit des quantités intégrées suivant  $s_2$  :

$$\bar{X}(s_1, t) = \int_{-a/2}^{a/2} X(s_1, s_2, t) ds_2. \quad (19)$$

Dans le cas traité ici d'une section circulaire paramétrée par l'angle d'ouverture  $\beta^e$ , toutes ces intégrales peuvent être calculées analytiquement. On obtient ainsi une expression explicite de la densité d'énergie de déformation associée au modèle de poutre à section fortement déformable, en fonction des paramètres cinématiques  $u_1, u_3, \theta, \beta^e$  et des caractéristiques géométriques. Le terme  $U_e^r$  correspond à l'énergie de déformation classique de poutre, avec les composantes de tension, de flexion et de couplage tension-flexion due au fait que la ligne moyenne ne passe pas par le barycentre de la section. Le terme  $U_e^s$  ne dépend que de la variable  $\beta$  et représente l'énergie de déformation uniquement induite par le changement de forme de la section. Le terme  $U_e^{rs}$  est lié au couplage entre la déformation globale de poutre et le changement de forme de la section.

## 4 Énergie cinétique

Partant de l'énergie cinétique du modèle de coque dans laquelle on néglige la contribution de l'inertie de rotation, en introduisant la cinématique choisie, on obtient par la même démarche :

$$T(u_1, u_3, \theta, \beta) = T^r + T^s + T^{rs} \quad (20)$$

avec

$$\begin{cases} T^r = \int_0^L \frac{1}{2} \left( \rho^s a (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2) + \rho^s \bar{z}^2 \dot{\theta}^2 \right) ds_1 \\ T^s = \int_0^L \frac{1}{2} \rho^s \left( \overline{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} \right) ds_1 \\ T^{rs} = \int_0^L \rho^s \left( -\dot{u}_1 \left( \bar{z} \widehat{\sin(\theta)} \right) + \dot{u}_3 \left( \bar{z} \widehat{\cos(\theta)} \right) \right) ds_1 \end{cases} \quad (21)$$

où la notation  $\dot{X}$  désigne la dérivée temporelle de la grandeur  $X$ .

## 5 Implémentation numérique

Le modèle linéique, comportant quatre degrés de libertés ( $u_1, u_3, \theta, \beta^e$ ), est implémenté dans le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL [1]. Ce logiciel permet d'utiliser directement les expressions des énergies potentielles et cinétiques sur la base de l'équivalence du principe d'Hamilton avec la formulation faible de problème d'élastodynamique. Un multiplicateur de Lagrange (cinquième degré de liberté) est introduit pour imposer sous forme faible la relation entre les composantes de translation  $u_1$  et  $u_3$  et la rotation  $\theta$ . On laisse le soin au logiciel d'effectuer la différentiation de l'énergie potentielle et seul un petit travail préalable est nécessaire sur l'énergie cinétique (intégration par partie en temps) pour introduire la forme faible. L'utilisation du modèle nécessite ensuite la discrétisation par éléments finis de la ligne moyenne (un segment de droite).

## 6 Applications numériques

Les caractéristiques géométriques et matérielles du mètre ruban étudié sont présentées tableaux 1 et 2.

TABLE 1 – Caractéristiques géométriques du mètre ruban

Longueur $L$	Largeur $a$	épaisseur $h$	angle initial $\beta_0^e$
1170 mm	60 mm	0.15 mm	0.6 rad

TABLE 2 – Caractéristiques matérielles

Module de Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$	masse volumique $\rho$
210 000 MPa	0.3	7800 kg.m <sup>-3</sup>

Dans les figures qui suivent, les déformées tridimensionnelles sont reconstruites à partir de la solution du modèle unidimensionnel de poutre et de la cinématique définie à la section 3.1.

La Figure 3 permet d'illustrer la capacité du modèle à rendre compte de l'apparition d'un pliage localisé par flexion, lorsqu'on impose des rotations de section opposées aux extrémités. Plus précisément, on impose :

- à l'extrémité gauche  $s_1 = 0 : u_1 = u_3 = 0, \theta = -\theta_L, \beta^e = \beta_0^e, \beta_{,1}^e$  libre ;
- à l'extrémité droite  $s_1 = L : u_3 = 0, \theta = \theta_L, \beta^e = \beta_0^e, \beta_{,1}^e$  libre.

Les calculs sont menés en statique. Sur la Figure 3, la courbe du couple réaction  $M$  à l'extrémité droite montre que pour des faibles valeurs de l'angle  $\theta_L$ , le comportement est linéaire. Cependant, il devient rapidement non-linéaire et on constate que la section présente un aplatissement dont le maximum se trouve au centre. Ce phénomène est visible sur l'isocouleur de  $\beta$  de la déformée [1](#) ( $\beta^e$  diminue progressivement des sections terminales vers le centre). Cependant, cette déformée s'apparente encore globalement à celle d'une poutre en flexion qui présente une courbure régulière. Puis cet aplatissement se localise brusquement au centre, provoquant une chute de la raideur globale. Cette chute de raideur est engendré par un pliage localisé, relâchant les contraintes dans les extrémités qui retrouvent leur formes initiales (voir déformée [2](#)). Ce saut est aussi illustré sur la courbe de l'énergie élastique emmagasinée en fonction de l'angle  $\theta_L$  imposé.

La Figure 4 montre la capacité du modèle à traiter des grandes rotations et à rendre compte de la séparation d'une zone de pliage en deux. L'extrémité gauche étant fixe, on initie le pliage en imposant un couple d'aplatissement, associé à la variable cinématique  $\beta^e$ , au centre de la section (deuxième déformée). On impose ensuite une rotation  $\theta$  à la section de l'extrémité droite jusqu'à avoir les deux branches

parallèles, tout en relâchant le couple d'aplatissement (troisième déformée). Puis on fixe les déplacements  $u_1$  et  $u_3$  aux extrémités et on impose un accroissement de rotation opposé aux deux extrémités. On engendre ainsi la séparation d'un pliage en deux nouveaux pliages (quatrième et cinquième déformées) qui se déplacent le long du ruban (sixième déformée).

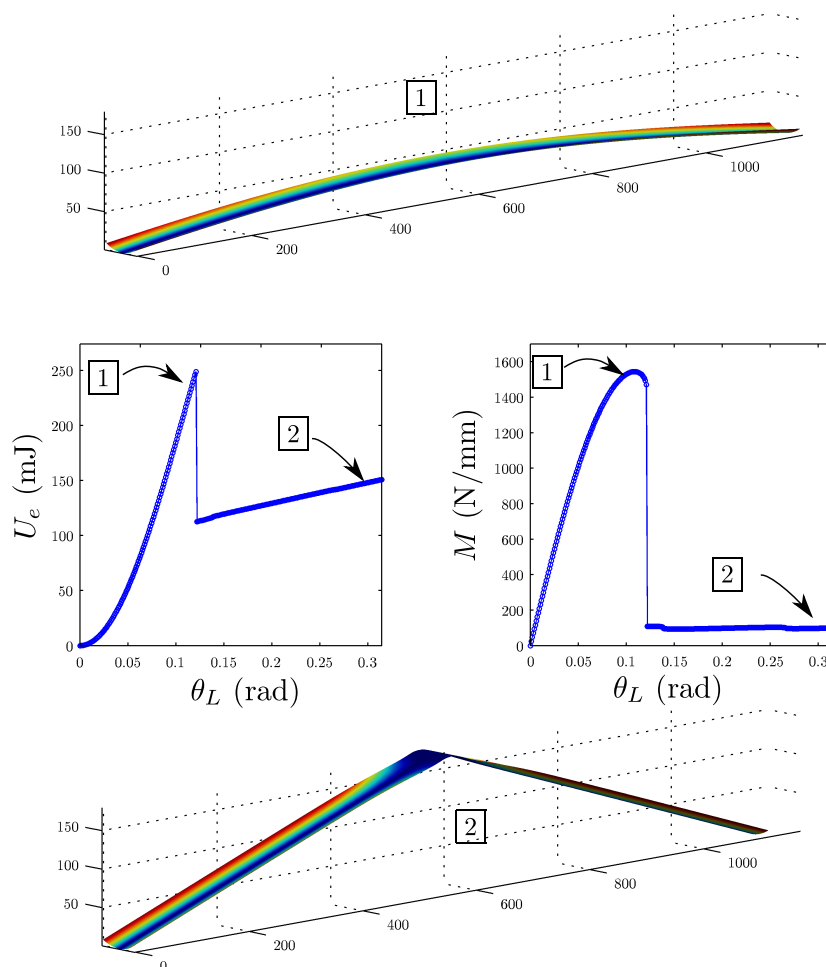


FIGURE 3 – Création d'un pliage par flexion aux extrémités. Courbe du couple réaction  $M$  en fonction de l'angle imposé  $\theta_L$  imposé aux extrémités. Courbe de l'énergie élastique emmagasinée en fonction de l'angle  $\theta_L$ . Déformées avant et après la création du pliage - reconstruction des déformées tridimensionnelles à partir des résultats du modèle 1D de poutre proposé et isocouleur de l'angle  $\beta$ .

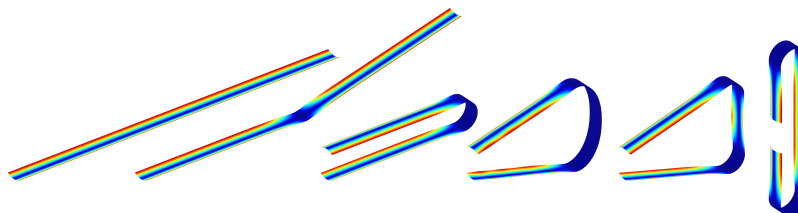


FIGURE 4 – Exemple de scénario modélisé : pliage simple puis séparation d'une zone de pliage en deux. Reconstruction des déformées tridimensionnelles à partir des résultats du modèle 1D de poutre proposé.

La Figure 5 permet d'illustrer les potentialités du modèle en dynamique. Un ruban, soumis à la gravité et préalablement plié à son extrémité, est relâché sans vitesse initiale. On constate une oscillation de la zone pliée autour de la position non déformée avec un déplacement de la rotule élastique (phénomène étudié dans [9]).



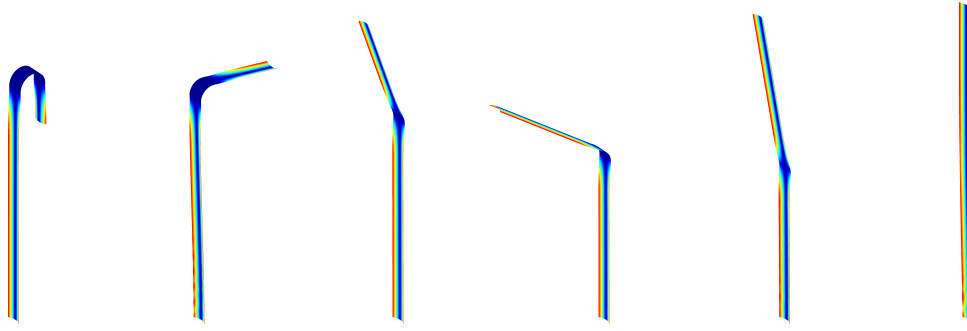


FIGURE 5 – Déploiement dynamique d'un ruban plié.

## 7 Conclusion

Nous avons proposé un modèle de poutre à section fortement déformable pour le comportement statique et dynamique des mètres rubans. Ce modèle à quatre paramètres cinématiques permet de simuler des scénarios complexes de pliages et de déploiements. Partant d'un modèle de coque, une cinématique originale, reposant sur une hypothèse d'inextensibilité, est introduite pour décrire la géométrie de la section. On obtient après intégration les énergies potentielle et cinétique associées aux modèle de poutre. La résolution numérique est mise en œuvre dans le logiciel COMSOL en utilisant la différentiation automatique de la fonctionnelle de Hamilton. Sa généralisation au 3D devrait permettre de traiter le déploiement et la stabilité de structures plus complexes, composées d'un assemblage de mètres rubans.

## Références

- [1] COMSOL AB, COMSOL Multiphysics User's Guide v3.5, Stockholm, Sweden, September 2008.
- [2] E. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744.
- [3] R. Gonçalves, M. Ritto-Corrêa, D. Camotim, *A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199(23-24), 1627-1643, 2010.
- [4] V.G.A. Goss, *The History of the Planar Elastica : Insights into Mechanics and Scientific Method*, Science & Education 18(8), 1057-1082, 2009.
- [5] F. Guinot, *Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre ruban composite*, thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, 2011.
- [6] S. Hoffait, O. Bruls, D. Granville, F. Cugnon, G. Kerschen, *Acta Astronautica, Dynamic analysis of the self-locking phenomenon in tape-spring hinges*, Acta Astronautica 66(7-8), 1125-1132, 2009.
- [7] P.M. Pimenta, E.M.B Campello, *A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-sectional in-plane changes and out-of-plane warping*, Latin American Journal of Solids and Structures 1(1), 119-, 2003.
- [8] E. Reissner, *On one-dimensional finite-strain beam theory : the plane problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 23(6), 795-804, 1972.
- [9] K. Seffen, S. Pellegrino, *Deployment dynamics of tape springs*, Proceedings of the Royal Society A 455, 1003-1048, 1999.
- [10] K. Seffen, Z. You, S. Pellegrino, *Folding and deployment of curved tape springs*, International Journal of Mechanical Sciences 42 (10), 2055-2073, 2000.
- [11] J.C. Simo, *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem, Part I.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 49(1), 55-70, 1985.
- [12] B.Z. Vlassov, *Pièces longues en voiles minces*, Eyrolles, Paris, 1962.
- [13] S.J.I. Walker, G.S. Aglietti, *A study of tape spring fold curvature for space deployable structures*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G (Journal of Aerospace Engineering), G3, 221, 313-325, 2007.
- [14] M. Zivkovic, M. Kojic, R. Slavkovic, N. Grujovic, *A general beam finite element with deformable cross-section*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190(20-21), 2651-2680, 2001.