



**HAL**  
open science

## Techniques de réduction de modèles pour les vibrations non linéaires de plaques minces amorties

Faiza Boumediene, Jean-Marc Cadou, Laëtitia Duigou, Abdelhamid Miloudi

► **To cite this version:**

Faiza Boumediene, Jean-Marc Cadou, Laëtitia Duigou, Abdelhamid Miloudi. Techniques de réduction de modèles pour les vibrations non linéaires de plaques minces amorties. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592865

**HAL Id: hal-00592865**

**<https://hal.science/hal-00592865v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Techniques de réduction de modèles pour les vibrations non linéaires de plaques minces amorties

F. Boumediene<sup>1,2</sup>, J-M. Cadou<sup>1</sup>, L. Duigou<sup>1</sup>, A. Miloudi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Ingénierie des Matériaux de Bretagne, Université Européenne de Bretagne, Université de Bretagne Sud, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient cedex, France. {faiza.boumediene, jean-marc.cadou, laetitia.duigou}@univ-ubs.fr.

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique Avancée, Faculté de Génie Mécanique & Génie des Procédés, USTHB, BP 32, El Alia, 16111 Bab Ezzouar, Alger, Algérie

---

## Résumé

Ce travail porte sur la résolution numérique de problèmes de vibrations non linéaires de plaques minces amorties. Ces plaques sont soumises à des excitations multi-harmoniques qui conduisent à des problèmes de grande taille. La résolution de ces systèmes non linéaires est effectuée à l'aide d'une Méthode Asymptotique Numérique couplée à des techniques de réduction de modèles. Deux techniques de réduction sont évaluées dans ce travail : la POD et une technique originale issue d'un premier pas de calcul MAN.

**Mots clés** —Vibration non linéaire, amortissement, méthode asymptotique numérique, équilibrage harmonique, plaques minces, décomposition orthogonal aux valeurs propres.

---

## 1 Introduction

Les structures minces sont très répandues dans l'industrie mécanique. Ces structures ont l'avantage d'être légères et présentent également de bonnes propriétés aérodynamiques. Cependant, lorsque ces structures vibrent sous l'action d'effort mécaniques, elles le font généralement avec de grandes amplitudes de déplacement. Ces dernières nécessitent alors de prendre en compte dans la modélisation les non linéarités de type géométrique. Ces non linéarités conduisent à des difficultés dans la résolution numérique du problème mais sont également sources de phénomènes d'instabilités complexes.

Ce travail porte sur la résolution de problèmes de vibrations non linéaires de plaques minces amorties soumises à des excitations multi-harmoniques perpendiculaires à la surface moyenne. Lorsque le nombre d'harmoniques considéré dans l'étude est grand (supérieur à 4), les temps de résolution du problème de vibration deviennent également très importants. La résolution de ce type de problème nécessite alors un ensemble de méthodes efficaces tant pour résoudre le problème non linéaire que pour réduire les temps de simulation.

La résolution du problème non linéaire s'effectue en couplant la méthode d'équilibrage harmonique et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [4]. Cette dernière méthode est une méthode de perturbation associée à la méthode des éléments finis. La méthode de perturbation permet de transformer le problème non linéaire initial en un ensemble de problèmes linéaires qui sont alors résolus à l'aide de la méthode de discrétisation spatiale. Cette technique de linéarisation est appliquée pas à pas (méthode de continuation) et permet ainsi de déterminer une grande partie de la courbe réponse. Chaque pas de la MAN demande une triangulation de matrices et la résolution de quelques systèmes linéaires (ce nombre étant l'ordre de troncature de la méthode de perturbation). Considérer un grand nombre d'harmoniques dans l'étude vibratoire conduit à augmenter considérablement la taille des matrices à trianguler à chaque pas de continuation MAN et par conséquent le temps de calcul de la solution non linéaire. Afin de diminuer ces temps de calcul, nous proposons d'utiliser des techniques de réduction de modèles. Ces dernières sont introduites lors de la résolution des problèmes linéaires issus de la résolution par la MAN.

Dans cette étude, les deux techniques de réduction de modèles proposées diffèrent par le moyen d'obtenir les bases de réduction. La première base est construite à partir des résultats issus d'un pas MAN et la deuxième est construite à partir d'un calcul complet en utilisant la méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). La première méthode, validée dans un travail précédent [5], donne de bons résultats. Cependant, comme le premier pas MAN est réalisé avec un nombre d'harmoniques identique à celui de l'étude, le temps de calcul de la base peut alors devenir important si la structure contient un nombre important de degré de liberté. Pour remédier à cet inconvénient nous proposons de faire ici une première résolution en utilisant la MAN et un nombre d'harmoniques faible ( $H = 2$ ) et ceci quelque soit le nombre d'harmoniques choisi pour l'étude. La deuxième méthode (POD) est une méthode classique et est aujourd'hui largement utilisée dans plusieurs domaines de la physique, notamment en vibrations non linéaires [1], [2], [9], [11]. Dans cette étude la POD est appliquée à l'étude des plaques minces soumises à des excitations harmoniques. La résolution complète du problème avec un faible nombre d'harmoniques ( $H = 2$ ) est initialement réalisée par la MAN. A partir de ces solutions non linéaires, la POD est utilisée pour extraire les composantes importantes du mouvement de vibrations de la structure étudiée. La POD permet ainsi d'extraire une base de réduction de ce premier calcul qui est ensuite utilisée pour résoudre un problème avec un nombre d'harmoniques plus élevé.

Dans ce travail, après avoir formulé notre problème sous forme mathématique, nous présentons la méthode asymptotique numérique qui permet d'obtenir une séquence de problèmes linéaires. Les méthodes de réduction utilisées dans cette étude sont ensuite présentées. Des exemples numériques permettent de montrer les avantages et les inconvénients des techniques numériques proposées.

## 2 Formulation mathématique

Considérons une plaque rectangulaire mince. Le système d'équations du mouvement peut être écrit sous forme quadratique en fonction du vecteur inconnu  ${}^T\mathbf{X} = (\mathbf{\Lambda}, \omega, \Omega)$  comme suit [4]:

$$\langle \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}, \omega, \Omega), \delta \mathbf{\Lambda} \rangle = \langle \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda} \rangle - \Omega \langle \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda} \rangle + \omega \langle \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda} \rangle + \langle \mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}), \delta \mathbf{\Lambda} \rangle - \langle \mathbf{P}, \delta \mathbf{\Lambda} \rangle = 0 \quad (1)$$

tel que  $\mathbf{\Lambda} = {}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$  est le vecteur mixte déplacement-contrainte,  $\omega$  la pulsation telle que  $\Omega = \omega^2$  et  $\mathbf{P}$  le vecteur de force externe.  $\mathbf{L}(\cdot)$  et  $\mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$  correspondent, respectivement, aux opérateurs linéaire et quadratique de la rigidité et  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  sont les opérateurs de la masse et de l'amortissement. La matrice d'amortissement est de type Rayleigh.

La plaque est supposée soumise à une excitation transversale multi-harmonique comme suit:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^{H-1} (\mathbf{P}^{jc} \cos j\omega t + \mathbf{P}^{js} \sin j\omega t) \quad (2)$$

où  $H$  est le nombre d'harmoniques,  $c$  et  $s$  représentent respectivement, les facteurs cosinus et sinus.

Le déplacement est également supposé multi-harmonique et il peut s'écrire sous une forme identique à l'excitation (2) :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{j=0}^{H-1} (\mathbf{U}^{jc} \cos j\omega t + \mathbf{U}^{js} \sin j\omega t) \quad (3)$$

Pour une discrétisation de la plaque en  $ND$  degrés de liberté par la méthode des éléments finis, le système d'équations aura comme dimension:

$$NT = ND \times (2H-1) \quad (4)$$

La résolution du problème non linéaire précédent (1) est réalisée à l'aide de la Méthode

Asymptotique Numérique. Cette méthode associe une technique de perturbation à une méthode de discrétisation spatiale, généralement la méthode des éléments finis. Cette partie de la résolution est exposée à la section suivante.

### 3 Méthode asymptotique numérique

L'équation du mouvement (1) peut être écrite en fonction de l'inconnue  ${}^T\mathbf{X} = (\mathbf{\Lambda}, \omega, \Omega)$  sous la forme suivante:

$$\mathbf{R}({}^T\mathbf{X}) = 0 \quad (5)$$

Considérons une solution régulière  $\mathbf{X}_0$  du problème non linéaire (5). L'idée de base de la MAN consiste à chercher la solution au voisinage de ce point, sous la forme d'une série entière d'un paramètre de chemin  $a$ :

$$\mathbf{X}(a) = \mathbf{X}_0 + a\mathbf{X}_1 + a^2\mathbf{X}_2 + \dots + a^p\mathbf{X}_p + \dots + a^n\mathbf{X}_n \quad (6)$$

où  $\mathbf{X}_p$  est la nouvelle inconnue du problème, à l'ordre  $p$  ( $p = 1, n$ ),  $n$  est l'ordre de troncature et ' $a$ ' est le paramètre de chemin qui peut être identifié comme étant la projection de l'incrément de déplacement  $(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0)$ , et l'incrément de pulsation  $(\omega-\omega_0)$ , sur le vecteur tangent  $(\mathbf{U}_1, \omega_1)$ :

$$a = \langle \mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1 \rangle + (\omega - \omega_0)\omega_1 \quad (7)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire Euclidien.

Introduisons l'expression (6) dans les équations (5) et (7) et équilibrons suivant les puissances de  $a$ . On trouve une séquence de problèmes linéaires à résoudre. Le problème linéaire à l'ordre  $p$  ( $p = 1, n$ ) s'écrit, après retour à l'écriture en déplacement pur, sous la forme suivante:

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0) \mathbf{U}_p = \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{X}_i), \quad i=1, p-1 \quad (8)$$

où  $\mathbf{U}_p$  est le déplacement à l'ordre  $p$ .  $\mathbf{F}^{nl}$  est le vecteur second membre calculé en fonction des paramètres connus qui sont déjà calculés dans les ordres précédents.  $\mathbf{L}_t$  note l'opérateur tangent au point de départ  $\mathbf{X}_0$ .

Finalement, le problème non linéaire initial (1) est transformé en une séquence de problèmes linéaires (8) qui ont le même opérateur tangent  $\mathbf{L}_t$  et qui diffèrent seulement dans le second membre  $\mathbf{F}^{nl}$ . Le second membre à l'ordre  $p$  dépend des entités calculées aux ordres précédents  $i < p$ . Il peut donc être déterminé facilement. Ces problèmes linéaires sont résolus en utilisant la méthode des éléments finis en discrétisant l'équation (8) :

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{X}_0) \mathbf{U}_p = \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{X}_i), \quad i=1, p-1 \quad (9)$$

Dans cette dernière équation  $\mathbf{K}_t$  désigne la matrice tangente et  $\mathbf{F}^{nl}$  représente le vecteur second membre discret.

Ces développements asymptotiques ont un intervalle de validité limité dont le seuil peut être évalué en utilisant le critère simple de Cochelin [7] :

$$a_{\max} = \left( \eta \frac{\|\mathbf{U}_1\|}{\|\mathbf{U}_n\|} \right)^{1/(n-1)} \quad (10)$$

où  $\eta$  est un petit paramètre de tolérance.

Une fois la valeur maximale du paramètre de chemin ' $a$ ' déterminée, on introduit sa valeur dans les

approximations polynomiales (6) et on définit ainsi un nouveau point de départ  $(\Lambda_0, \omega_0, \Omega_0)$  à partir duquel on réitère la MAN. Cela définit la méthode de continuation et permet le calcul des branches de solutions. Comme il a déjà été démontré dans les références [4] et [7], le meilleur algorithme de suivi de chemin est celui basé sur les approximants de Padé en utilisant les fractions rationnelles [8].

Le système linéaire (8) est simple mais de grandes dimensions. La décomposition de la matrice tangente nécessite donc un temps de calcul significatif. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour réduire ce temps. Dans cet article, la projection du vecteur inconnu sur des bases réduites est utilisée. La procédure est expliquée en détail dans la section suivante.

## 4 Réduction de modèle

Dans cette section, nous décrivons la procédure générale de réduction de modèle qui doit entre autre conserver les propriétés du système, comme la stabilité. Le modèle de réduction peut générer une erreur d'approximation mais celle-ci doit être limitée. La méthode de réduction est appliquée à notre système (9). Nous avons appliqué deux méthodes de réduction de modèles. La première est fondée sur les vecteurs obtenus à chaque ordre après au moins un pas MAN sur le problème complet sans réduction. Nous l'avons appelé Base Non Linéaire (BNL) car elle est issue d'un calcul non linéaire. La deuxième méthode de réduction est basée sur la méthode orthogonale aux valeurs propres (POD). Avant de présenter ces différentes méthodes, on commence par expliquer le principe général de la réduction de modèle.

### 4.1 Description de la procédure

L'idée essentielle de la méthode est de projeter le vecteur inconnu de dimension  $NT$  (4) sur un sous-espace de petite dimension comme suit:

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{u}_p \quad (11)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur inconnu réduit de dimension  $nt$  ( $nt < NT$ ).  $\mathbf{\Phi}$  est la matrice de réduction de dimension  $NT \times nt$ .

La matrice de réduction doit caractériser convenablement la réponse dynamique non linéaire de la structure et doit être capable d'approximer la solution dans un large intervalle du paramètre de continuation. En plus, ses colonnes doivent être linéairement indépendantes. En substituant  $\mathbf{U}_p$  par son expression, donnée par l'équation (11), dans l'équation (9) et en multipliant à gauche par le transposé de la matrice de réduction  $\mathbf{\Phi}$ , le système linéaire (8) devient:

$${}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{K}_t(\mathbf{X}_0) \mathbf{\Phi} \mathbf{u}_p = {}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{X}_i), \quad i=1, p-1$$

L'équation réduite à l'ordre  $p$  s'écrit alors comme suit:

$$\boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{u} = \mathbf{f}^{nl} \quad (12)$$

où  $\boldsymbol{\kappa}_i$  et  $\mathbf{f}^{nl}$  représentent, respectivement, les formes réduites de  $\mathbf{K}_t$  et  $\mathbf{F}^{nl}$ .

Comme la matrice de réduction est la même pour tous les problèmes linéaires, la forme réduite correspondante  $\boldsymbol{\kappa}_i$  est calculée seulement une fois par pas. Ceci n'est pas le cas, pour le second membre qui doit être construit pour chaque ordre. Pour éviter un coût élevé de temps de calcul, la matrice discrète réduite est directement calculée au niveau élémentaire. Avec cette procédure, le nombre de données nécessaires à stocker est aussi réduit car on n'a pas à construire de grandes matrices. La matrice réduite et le vecteur second membre réduit du système sont alors construits par les relations suivantes:

$$\mathbf{\kappa}_t = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{T}^T \mathbf{\Phi}^e \mathbf{K}_t^e \mathbf{\Phi}^e, \mathbf{f} = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{T}^T \mathbf{\Phi}^e \mathbf{F}^e$$

où  $Ne$  est le nombre des éléments finis dans la structure. Dans la section suivante, nous décrivons comment on construit la matrice de réduction  $\mathbf{\Phi}$  utilisée dans ce travail.

## 4.2 Méthode de réduction basée sur un calcul non linéaire : Base Non Linéaire (BNL)

Cette méthode de réduction de modèle est construite à partir de la résolution de notre problème dynamique. En effet, un pas MAN est réalisé sans réduction. Le vecteur calculé à chaque ordre  $p$  est alors utilisé pour construire la matrice de réduction. Cette base est notée Base Non Linéaire (BNL) car ces colonnes représentent les vecteurs résultats d'un calcul non linéaire. Cette appellation est à relativiser car la base de projection est linéaire. On souhaite ainsi introduire l'effet non linéaire dans la base de projection dans le but d'améliorer la qualité des solutions réduites. Cette technique de réduction a déjà été étudiée dans un travail précédent [5]. La nouveauté ici est que le premier pas MAN, nécessaire pour construire la base, est réalisé avec deux harmoniques seulement quelque soit le nombre d'harmoniques pris pour l'étude de la réponse. L'avantage de cette approche est qu'elle évite de construire des matrices de grande taille.

## 4.3 Méthode de réduction basée sur la POD

La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD pour Proper Orthogonal Decomposition) est initialement construite pour analyser les données de processus aléatoires en introduisant de nouveaux systèmes basés sur la statistique. Actuellement, elle est devenue une méthode très efficace pour plusieurs tâches d'analyses de données, de compression et de réduction de modèles. Des applications de cette approche sont trouvées dans plusieurs disciplines: l'analyse des variables aléatoires, traitement d'image, analyse de signal, compression de données, identification de processus, génie chimique, l'océanographie ... etc. La POD est une technique très efficace d'analyse de données, qui permet d'approximer un système de dimension élevée par un autre de dimension nettement plus faible. Cette méthode est une procédure linéaire, qui consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux représentatifs par définition des réalisations les plus probables [10], [13], [12]. Pour utiliser cette méthode, on doit faire un calcul préalable en ordre complet. Dans cette étude, ce calcul préalable est réalisé en utilisant seulement deux harmoniques afin de minimiser le temps de calcul des quantités nécessaires à la POD. A partir de ce calcul, on construit une matrice de clichés (snapshots) en changeant un paramètre du système: le temps ou la pulsation de l'excitation. Cette matrice est utilisée pour construire la matrice de base. La procédure retenue est alors la suivante: on fait un calcul complet de la solution dans un intervalle de pulsation prédéfini (pour construire la matrice des snapshots en pulsation) ou on fixe la pulsation et on incrémente le temps dans un intervalle de temps choisi (pour construire la matrice de snapshots en temps) [6]. Ces résultats permettent ensuite de construire la base de projection grâce la POD. Finalement, cette base est utilisée pour calculer la réponse d'un problème contenant un nombre d'harmoniques plus important.

## 5 Résultats numériques

Pour démontrer la validité de l'approche proposée, nous étudions un exemple déjà présenté dans le cadre de la validation de la MAN pour résoudre les problèmes de vibrations non linéaires de plaques minces amorties [4]. La plaque est rectangulaire simplement appuyée (SA), isotrope et homogène. Ses dimensions sont: la longueur  $L = 0.6 \text{ m}$ , la largeur  $l = 0.3 \text{ m}$  et l'épaisseur  $h = 0.001 \text{ m}$ . Le matériau est l'aluminium dont les caractéristiques sont: module d'Young  $E = 70.10^9 \text{ Pa}$ , masse volumique  $\rho = 2778 \text{ kg/m}^3$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice

de rigidité élastique ( $\mathbf{K}_1$ ) avec un coefficient  $\beta = 0.0001$  ( $\mathbf{C} = \beta \cdot \mathbf{K}_1$ ). Elle est soumise à une force excitatrice harmonique perpendiculaire à la surface moyenne et uniformément répartie  $P = 40\text{N/m}^2$ . La plaque est modélisée en utilisant des éléments coques triangulaires DKT à trois nœuds et six degrés de liberté par nœud ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) [3]. Pour une raison de symétrie, seulement un quart de la plaque est modélisé et discrétisé en 435 nœuds (i.e. 2610 ddl pour une harmonique). La première pulsation linéaire de cette plaque,  $\omega_1$  est égale à 208.67 rad/s. En se basant sur un travail précédent [4], nous utilisons les paramètres suivants de la MAN: la tolérance  $\eta = 10^{-4}$  et l'ordre de troncature des approximations asymptotiques  $n = 20$ . Ces paramètres sont utilisés dans tous les calculs. Pour la décomposition de la matrice tangente, nous avons utilisé la méthode classique de Crout.

Dans ce qui suit, nous considérons que la plaque est soumise à une excitation de la forme  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^{1c} \cos \omega t$  et nous prenons six harmoniques dans le vecteur réponse. Dans un premier temps, on compare la réponse de la plaque obtenue par la MAN sans réduction (section 3) à celles obtenues par la méthode de réduction BNL. Pour construire la base de réduction, on réalise un premier calcul MAN complet en prenant  $H = 2$ . Une fois, la base construite, la méthode BNL est appliquée pour calculer la réponse pour  $H = 6$ . Les courbes réponses obtenues par la méthode de réduction en faisant varier le nombre de vecteurs composant la base ( $nd = 10, 15$  et  $20$ ) sont tracées sur la figure 1. Cette figure montre, en comparant avec la réponse trouvée par la MAN sans réduction, qu'on peut obtenir les superharmoniques même si le nombre de vecteurs est petit. Cependant, avec 10 vecteurs, la solution semble devenir moins précise autour du deuxième mode symétrique. Par conséquent, au moins 15 vecteurs dans la base semblent nécessaires pour obtenir une réponse précise dans l'intervalle  $0 < \omega / \omega_1 < 3$ . Une fois déterminé, le nombre de vecteurs nécessaires à la construction de la base BNL, nous comparons cette méthode à la méthode de réduction POD.

Dans un deuxième temps, nous utilisons donc la POD pour construire la base réduite. L'idée est de réaliser un premier calcul, sur un intervalle déterminé de pulsation et à l'aide d'un petit nombre d'harmoniques ( $H = 2$ ), puis de calculer la solution pour  $H$  élevé en utilisant la méthode de réduction. Nous proposons ici de construire avec la POD deux types de base de réduction: la première basée sur des snapshots en pulsation et la seconde en utilisant des snapshots en temps. Pour construire la matrice snapshot en temps, nous avons pris deux pulsations (les deux premières pulsations de résonance symétriques). Pour chaque pulsation, nous avons incrémenté le temps d'un pas de  $1.10^{-4}$  sur 300 pas. Ceci correspond à un temps total, pour chaque pulsation, de 0,03, soit une période. Plusieurs tests numériques ont été effectués avec la POD. Nous avons pu obtenir les mêmes résultats trouvés avec la MAN sans réduction ( $H = 6$ ) en utilisant dans la base de réduction POD seulement 8 vecteurs issus d'un calcul complet avec  $H=2$ . Sur la figure 2, nous comparons les courbes de réponse trouvées par la MAN sans réduction, avec celles obtenues en utilisant une base BNL avec 15 vecteurs ainsi que celles obtenues par deux bases avec 8 vecteurs sélectionnés par la POD en temps et en pulsation. Nous remarquons que les courbes coïncident. Seule une petite différence est visible au niveau du deuxième mode symétrique. Aux alentours de ce mode, la POD en pulsation et la BNL donnent les meilleurs résultats. Cependant, pour les grandes amplitudes, on remarque que c'est la BNL qui donne les meilleurs résultats. En calculant le temps complet pour tracer la courbe autour du premier mode dans l'intervalle  $[0, 2\omega_1]$  (Tab. 1), on trouve que la POD demande moins de temps que la MAN. Cependant, elle nécessite plus de temps que la BNL avec  $nd = 20$ , sans pour autant être meilleure en terme de qualité de solution obtenue.

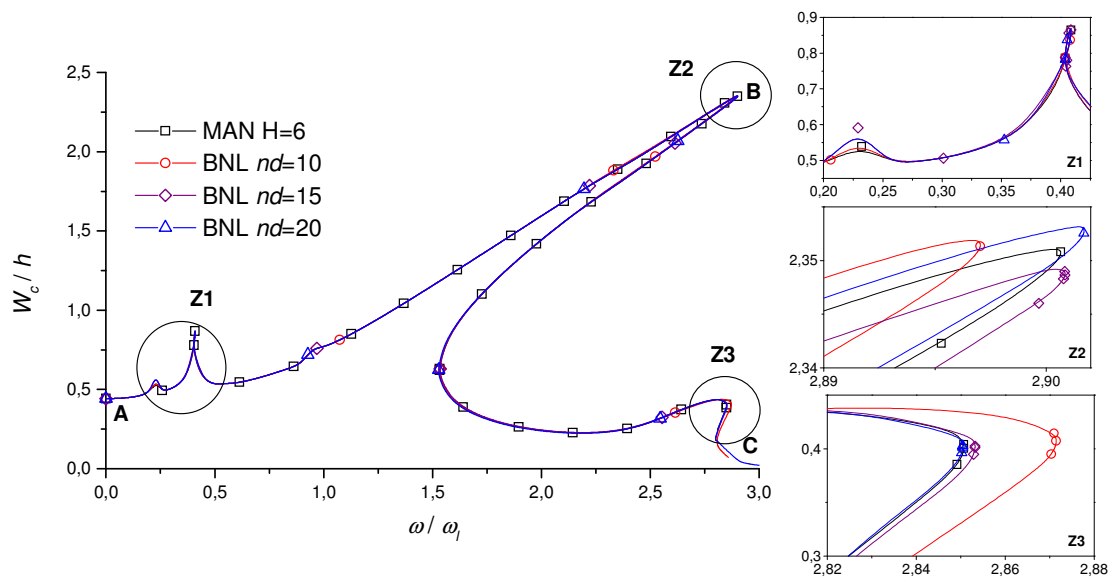


FIG. 1 - Réponse de la plaque en utilisant la MAN avec  $H = 6$  et la méthode de réduction basée sur la BNL (base construite avec  $H=2$ ).

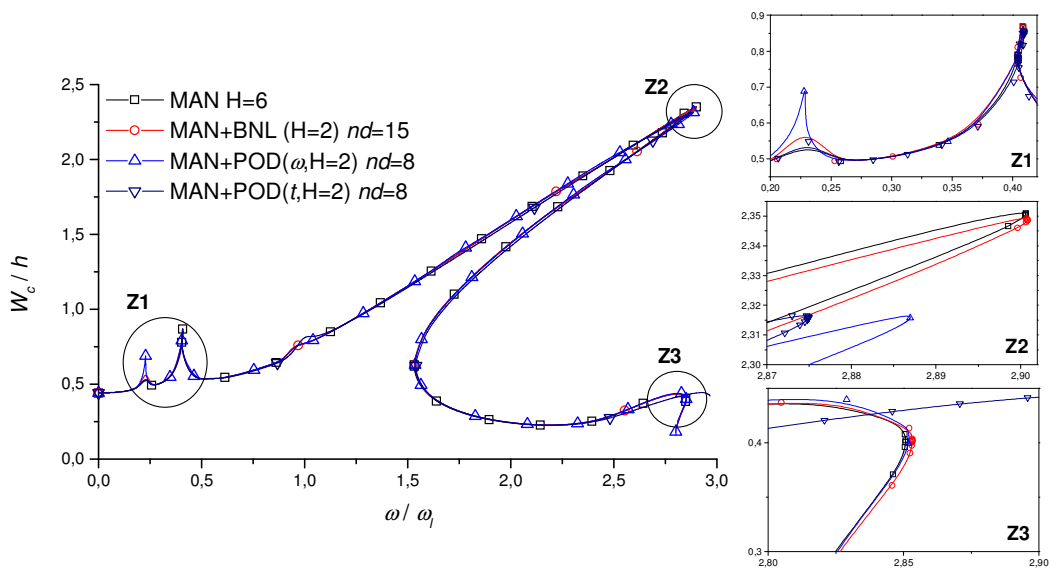


FIG. 2 – Comparaison des résultats trouvés par la MAN et par les deux bases réduites à partir de  $H=2$  pour une plaque soumise à une excitation harmonique  $H=6$ .

TAB. 1 - Temps nécessaire pour obtenir la réponse aux alentours du premier mode  $\omega \in [0, 2\omega_1]$ ,  $H=6$

	MAN	POD - $\omega$ ( $nd = 8$ )	POD - $t$ ( $nd = 8$ )	BNL ( $nd = 20$ )
N <sup>bre</sup> de pas	72	84	72	70
Temps CPU	46938	5795	5190	4183



## 6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons couplé la MAN et les modèles de réduction pour calculer la réponse dynamique non linéaire de plaques minces amorties. L'idée est de faire un premier calcul MAN pour un faible nombre d'harmoniques ( $H = 2$  ou  $3$ ), de créer une base réduite à partir de ce premier calcul afin de poursuivre l'étude pour un nombre d'harmoniques important ( $H = 6$  par exemple). Nous avons proposé deux méthodes de réduction qui diffèrent dans la manière de construire la base. Le premier modèle, noté BNL, s'appuie sur un calcul non linéaire pour construire la base (base générée à partir d'un premier pas de la MAN sans réduction). Le deuxième est fondé sur la méthode orthogonale aux valeurs propres (POD). Les deux méthodes de réduction donnent des résultats satisfaisants : quand le nombre d'harmoniques est significatif, les deux méthodes permettent d'obtenir les résonances superharmoniques. En outre, après plusieurs tests numériques, nous avons trouvé que le nombre de vecteurs nécessaires pour obtenir des solutions précises, en utilisant la méthode BNL, semble être supérieur à 15 et que, pour la méthode POD, celui-ci est proche de 8 vecteurs. En prenant en compte le temps de construction de la base dans le calcul total du temps CPU pour trouver la réponse non linéaire dynamique autour du premier mode de résonance, la méthode BNL semble la meilleure.

## Références

- [1] M. Amabili, A. Sarkar & M. P. Paidoussis. *Reduced-order models for nonlinear vibrations of cylindrical shells via the proper orthogonal decomposition method*. Journal of Fluids and Structures. 18, 227–250, 2003.
- [2] A. C. Antoulas & D. C. Sorensen. *Approximation of large-scale dynamical systems: An overview*. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 11(5), 1093-1121, 2001.
- [3] J-L. Batoz & G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. Vol 3: coques. Hermès, Paris. 1992
- [4] F. Boumediene, A. Miloudi, J.M. Cadou, L. Duigou & E.H. Boutyour, *Nonlinear forced vibration of damped plates by an asymptotic numerical method*. Computers and Structures 87. 1508–1515. 2009.
- [5] F. Boumediene, L. Duigou, E.H. Boutyour, A. Miloudi & J.M. Cadou. *Nonlinear forced vibration of damped plates coupling Asymptotic Numerical Method and reduction models*. Computational Mechanics 2010. DOI 10.1007/s00466-010-0549-2 (en ligne).
- [6] F. Boumediene. *Méthode asymptotique numérique et techniques de réduction de modèles pour les vibrations non linéaires de plaques minces amorties*. Thèse de doctorat de l'Université de Bretagne Sud, 2010.
- [7] B. Cochelin, N. Damil & M. Potier-Ferry. *Asymptotic numerical methods and Padé approximants for nonlinear elastic structures*. International Journal for Numerical methods in Engineering. 37, 1187–1213, 1994.
- [8] A. Elhage-Hussein, M Potier-Ferry & N Damil. *A numerical continuation method based on Padé approximants*. Int. J. Solids and Structures. 37, 6981-7001. 2000
- [9] P. B. Goncalves, F. M. A. Silva & Z. J. G. N. Del Prado. *Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition*. Journal of Sound and Vibration. 315, 641–663, 2008.
- [10] P.Holmes, J.L. Lumley & G. Bertozz. *Turbulence, coherent structures dynamical systems end symmetry*. Cambridge University Press 1996.
- [11] S. Lall, P. Krysl & J. E. Marsden. *Structure-preserving model reduction for mechanical systems*. Physica D. 184, 304–318, 2003.
- [12] N. Verdon. *Un système dynamique d'ordre réduit base sur une approche PPR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules*. Thèse de doctorat à l'Université de La Rochelle, 2007.
- [13] P. Wriggers. *Nonlinear finite element methods*. Springer-Vellag, Berlin Heidelberg, 2008.