

Estimation de l'erreur due à la méthode des éléments finis dans une analyse de fiabilité de type FORM

L. Gallimard

LEME, Université Paris Ouest Nanterre La Défense laurent.gallimard@u-paris10.fr

Résumé — Cet article propose une extension des techniques d'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt à l'analyse de la fiabilité d'une structure élastique. Nous utilisons une méthode de fiabilité du premier ordre (FORM) en conjonction avec une analyse EF pour calculer la probabilité de défaillance de la structure. Dans une telle situation la quantité d'intérêt issue du calcul EF est l'indice de fiabilité β . Nous présentons des bornes supérieures et inférieures de cet indice ainsi que des bornes pour la probabilité de défaillance calculée au moyen de l'approximation FORM.

Mots clés — éléments finis, estimation d'erreur a posteriori, quantités d'intérêt, fiabilité, approximation FORM

1 Introduction

Dans de nombreuses applications en calcul de structures, il est nécessaire de prendre en compte le caractère aléatoire de certains paramètres du matériau, de la géométrie ou du chargement. Différentes techniques basées sur la théorie des probabilités ont été développées pour quantifier les effets de ces aléas sur la fiabilité de la structure. La méthode d'approximation FORM [1] est l'une des méthodes les plus utilisées en fiabilité, elle est basée sur le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind, associée à une estimation de la probabilité de défaillance de la structure. Dans de nombreuses situations la réponse de la structure ne peut pas être calculée explicitement et l'analyse de fiabilité doit être couplée avec une méthode des éléments finis (MEF). L'utilisation de la MEF peut conduire à une augmentation importante du coût du calcul fiabiliste si la discrétisation choisie est trop fine ou introduire une erreur d'approximation supplémentaire importante dans le résultat si la discrétisation EF est trop grossière. En conséquence, le contrôle de cette erreur de discrétisation est nécessaire au développement d'analyses fiabilistes couplées avec la MEF. Dans cet article, nous étudions le cas d'une structure élastique linéaire pour laquelle la fonction d'état limite $G(X)$ s'écrit $G(X) = I_c(X) - I_h(X)$, où I_c est la résistance de la structure, I_h la sollicitation évaluée par la MEF, et X le vecteur des variables aléatoires du modèle. Le calcul de la probabilité de défaillance de la structure par approximation FORM introduit trois sources d'erreurs :

- une erreur liée à l'algorithme de gradient utilisé pour calculer l'indice de fiabilité β ,
- une erreur géométrique due à l'utilisation d'une approximation FORM,
- une erreur de discrétisation liée au calcul de I_h par la MEF

A notre connaissance, seuls les deux premiers points ont été abordés dans la littérature [2, 3]. L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de la discrétisation E.F. sur le calcul de l'indice de fiabilité β et de proposer des bornes supérieures et inférieures de cet indice. Nous nous basons pour construire ces bornes sur le concept d'erreur en relation de comportement [4, 5], ainsi que sur une technique simplifiée de construction de champs admissibles [6].

Dans une première partie nous rappellerons les principes des calculs fiabilistes basés sur l'approximation FORM, dans une seconde partie nous montrerons comment construire des bornes de l'indice de fiabilité et de la probabilité de défaillance de la structure. La troisième partie sera consacrée à des exemples d'application à la mécanique linéaire de la rupture.

2 Exemple

Nous considérons dans cet exemple une plaque fissurée soumise à un effort de traction (Figure 1). Les paramètres aléatoires du modèle sont la longueur de la fissure qui suit une loi lognormale, l'intensité de l'effort imposé et la tenacité du matériau qui suivent une loi normale. Sur cet exemple, il est possible de calculer directement la probabilité de défaillance (i.e. sans utiliser la MEF) par une approximation FORM : $P_{f,ref} = 9.2 \cdot 10^{-3}$. Dans la Table 1, nous présentons les probabilités de défaillance $P_{f,h}$ calculées en fonction du nombre de degrés de liberté du maillage ainsi que les bornes inférieures $P_{f,h}^{low}$ et $P_{f,h}^{uPP}$ obtenues. Sur cet exemple, on constate que l'approximation E.F. conduit à sous-évaluer de façon importante la probabilité de défaillance théorique $P_{f,ref}$.

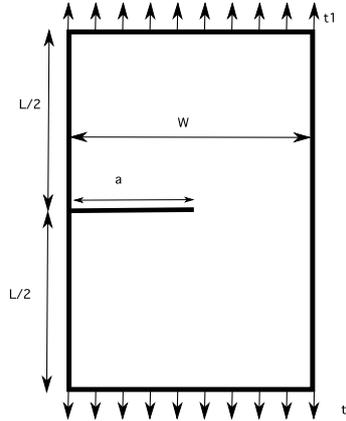


FIG. 1 – Plaque fissurée en Traction

DoF	$P_{f,h}$	$P_{f,h}^{low}$	$P_{f,h}^{uPP}$
234	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-2}$
326	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$
670	$8.5 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$9.5 \cdot 10^{-3}$
1250	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-3}$
1846	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-3}$

TAB. 1 – Approximation FORM : Bornes de la probabilité de défaillance - $P_{f,ref} = 9.2 \cdot 10^{-3}$

3 Références bibliographiques

Références

- [1] A.M. Hasofer, N.C. Lind. *An exact and Invariant First Order Reliability Format*, J. Eng. Mech.; ASCE, 100, EM1, 111–121, 1974.
- [2] A. Der Kiureghian, T. Dakessian. *Multiple design points in first and second-order reliability*, Structural Safety, 20 :37-49, 1998.
- [3] J.C. Mitteau. *Error evaluation for the computation of failure probability in static structural reliability problems*, Probabilistic Engineering Mechanics, 14 :119–115, 1999.
- [4] P. Ladevèze, D. Leguillon. *Error estimate procedure in the finite element method and application*, SIAM J. Num. Anal. 20(3) :485–509, 1983.
- [5] L. Gallimard, J. Panetier. *Error estimation of stress intensity factors for mixed-mode crack*, Int. J. Numer. Engng., 68 :299–316, 2006.
- [6] L. Gallimard. *A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress*, Int. J. Numer. Engng., 78 :460–482, 2009.