



HAL
open science

Estimation de l'erreur due à la méthode des éléments finis dans une analyse de fiabilité de type FORM

Laurent Gallimard

► **To cite this version:**

Laurent Gallimard. Estimation de l'erreur due à la méthode des éléments finis dans une analyse de fiabilité de type FORM. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592861

HAL Id: hal-00592861

<https://hal.science/hal-00592861>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation de l'erreur due à la méthode des éléments finis dans une analyse de fiabilité de type FORM

L. Gallimard

LEME, Université Paris Ouest Nanterre La Défense
50 rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray, France
laurent.gallimard@u-paris10.fr

Résumé — Cet article décrit une extension des techniques d'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt à l'analyse de la fiabilité d'une structure élastique. Nous utilisons une méthode de fiabilité du premier ordre (FORM) en conjonction avec une analyse EF pour calculer la probabilité de défaillance de la structure. Dans une telle situation la quantité d'intérêt issue du calcul EF est l'indice de fiabilité β . Nous présentons des bornes supérieures et inférieures de cet indice ainsi que des bornes pour la probabilité de défaillance calculée au moyen de l'approximation FORM.

Mots clés — éléments finis, estimation d'erreur a posteriori, quantités d'intérêt, fiabilité, approximation FORM

1 Introduction

Dans de nombreuses applications en calcul de structures, il est nécessaire de prendre en compte le caractère aléatoire de certains paramètres du matériau, de la géométrie ou du chargement. Différentes techniques basées sur la théorie des probabilités ont été développées pour quantifier les effets de ces aléas sur la fiabilité de la structure. La méthode d'approximation FORM [1] est l'une des méthodes les plus utilisées en fiabilité, elle est basée sur le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind, associée à une estimation de la probabilité de défaillance de la structure. Dans de nombreuses situations la réponse de la structure ne peut pas être calculée explicitement et l'analyse de fiabilité doit être couplée avec une méthode des éléments finis (MEF). L'utilisation de la MEF peut conduire à une augmentation importante du coût du calcul fiabiliste si la discrétisation choisie est trop fine ou introduire une erreur d'approximation supplémentaire importante dans le résultat si la discrétisation EF est trop grossière. En conséquence, le contrôle de cette erreur de discrétisation est nécessaire au développement d'analyses fiabilistes couplées avec la MEF. Dans cet article, nous étudions le cas d'une structure élastique linéaire pour laquelle la fonction d'état limite $G(X)$ s'écrit $G(X) = R(X) - S_h(X)$, où R est la résistance de la structure, S_h la sollicitation évaluée par la MEF, et X le vecteur des variables aléatoires du modèle. Le calcul de la probabilité de défaillance de la structure par approximation FORM introduit trois sources d'erreurs :

- une erreur liée à l'algorithme de gradient utilisé pour calculer l'indice de fiabilité β ,
- une erreur géométrique due à l'utilisation d'une approximation FORM,
- une erreur de discrétisation liée au calcul de S_h par la MEF

A notre connaissance, seuls les deux premiers points ont été abordés dans la littérature [2, 3]. L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de la discrétisation E.F. sur le calcul de l'indice de fiabilité β et de proposer des bornes supérieures et inférieures de cet indice. Nous nous basons pour construire ces bornes sur le concept d'erreur en relation de comportement [4, 5], ainsi que sur une technique simplifiée de construction de champs admissibles [6]. Ces travaux prolongent les recherches développées dans [7].

Dans une première partie nous rappellerons les principes des calculs fiabilistes basés sur l'approximation FORM, dans une deuxième partie nous montrerons comment construire des bornes de l'indice de fiabilité et de la probabilité de défaillance de la structure. La troisième partie sera consacrée à un exemple d'application à la mécanique linéaire de la rupture.

2 Analyse de Fiabilité : Méthode FORM

On s'intéresse à la probabilité de défaillance d'une structure en tenant en compte de la variabilité des paramètres (géométrie, matériau, chargement). Ces paramètres sont représentés par un vecteur aléatoire \mathbf{X} et une densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$. La solution du problème est donc un champ de déplacement stochastique noté $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et la sollicitation de la structure s'écrit $S(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$. La fonction d'état limite de la structure est définie par une fonction $G(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) - S(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ qui décrit le domaine de défaillance \mathcal{D}_f de la structure. Par définition $\mathcal{D}_f = \{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) \leq 0\}$. La probabilité de défaillance \mathcal{P}_f de la structure est alors calculée par

$$\mathcal{P}_f = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

La méthode FORM est basée sur la détermination d'un indice de fiabilité β , qui permet de calculer de façon simple une valeur approchée de \mathcal{P}_f . La première étape de la méthode consiste à reformuler le problème dans l'espace standard \mathbf{Y} (espace des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes) au moyen d'une transformation isoprobabiliste T [1]. La probabilité de défaillance (1) s'écrit alors

$$\mathcal{P}_f = \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}} \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2)$$

où ϕ est la densité de probabilité multinormale et \mathcal{D} le domaine de défaillance dans l'espace standard \mathbf{Y}

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{y} | H(\mathbf{y}) \leq 0\} \text{ avec } H(\mathbf{y}) = G(T^{-1}(\mathbf{y})) \quad (3)$$

La deuxième étape consiste en la détermination du point dit de conception P^* , point du domaine de défaillance \mathcal{D}_f le plus proche de l'origine

$$P^* = \operatorname{argmin} \{ \|\mathbf{y}\|^2 | H(\mathbf{y}) \leq 0 \} \quad (4)$$

La distance de ce point à l'origine est appelé indice de fiabilité β et est défini par

$$\beta = \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (5)$$

La troisième étape de la méthode FORM consiste à approximer le domaine de défaillance \mathcal{D}_f par le demi-plan tangent à \mathcal{D}_f en P^* . On a alors

$$\mathcal{P}_{f,FORM} = \Phi(-\beta) \quad (6)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le problème défini par (5) est résolu par un algorithme d'optimisation associé à une analyse élément finis qui permet d'évaluer la fonction décrivant le domaine de défaillance. Soit \mathcal{D}_h le domaine de défaillance associé à la résolution E.F.

$$\mathcal{D}_h = \{\mathbf{y} | R(\mathbf{y}) - S(\mathbf{u}(\mathbf{y})) \leq 0\} \quad (7)$$

et l'indice de fiabilité associé est β_h défini par

$$\beta_h = \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}_h} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (8)$$

Deux erreurs sont donc introduites lors du calcul de l'indice de fiabilité : Une erreur due à la résolution du problème d'optimisation sous contrainte défini par (8) et une erreur introduite par la discrétisation éléments finis. Dans cette présentation, nous nous intéressons à l'erreur introduite par la MEF et nous supposons que le problème d'optimisation est résolu exactement [2]. Nous admettons que la sollicitation $S(\mathbf{u}(\mathbf{y}))$ dépend linéairement du champ de déplacement.

3 Construction de bornes sur l'indice de fiabilité

Nous considérons un problème d'élasticité dans un domaine Ω qui peut être formulé de la façon suivante : Trouver $(\mathbf{u}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}))$ définis sur Ω tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{F}_d \text{ sur } \Gamma_N \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ dans } \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

où \mathbf{K} est l'opérateur de Hooke, \mathbf{f}_d et \mathbf{F}_d les efforts de volume et de surface respectivement, et Γ_D, Γ_N sont les parties de la frontière de $\partial\Omega$ où sont appliquées les conditions de Dirchlet et Neumann. Ces données sont définies dans l'espace des variables aléatoires \mathbf{Y} . La sollicitation d'intérêt s'écrit sous la forme d'une fonction linéaire de la solution

$$S(\mathbf{u}(\mathbf{y})) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Gamma \quad (10)$$

La construction des bornes de l'indice de fiabilité est effectuée en deux étapes. Pour une réalisation \mathbf{y} donnée, il est possible en utilisant les techniques développées pour l'analyse des erreurs sur les quantités d'intérêt, de construire, à partir de la solution EF \mathbf{u}_h et des données du problème, des bornes de $S(\mathbf{u}(\mathbf{y}))$ telles que

$$S^-(\mathbf{u}_h(\mathbf{y})) \leq S(\mathbf{u}(\mathbf{y})) \leq S^+(\mathbf{u}_h(\mathbf{y})) \quad (11)$$

Nous utilisons ici une méthode basée sur l'erreur en relation de comportement [4], associée à une méthode de reconstruction de contraintes en équilibre basée sur la partition de l'unité [6]. On peut alors définir un domaine de défaillance \mathcal{D}^+ associé à la borne supérieure $S^+(\mathbf{u}_h(\mathbf{y}))$

$$\mathcal{D}_h^+ = \{\mathbf{y} \mid R(\mathbf{y}) - S^+(\mathbf{u}_h(\mathbf{y})) \leq 0\} \quad (12)$$

et un domaine de défaillance \mathcal{D}^- associé à la borne inférieure $S^-(\mathbf{u}_h(\mathbf{y}))$

$$\mathcal{D}_h^- = \{\mathbf{y} \mid R(\mathbf{y}) - \quad (13)$$

On définit un indice de fiabilité β_h^{inf} associé à la borne supérieure

$$\beta_h^{inf} = \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}_h^+} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (14)$$

et un indice de fiabilité β_h^{sup} associé à la borne inférieure

$$\beta_h^{sup} = \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}_h^-} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (15)$$

Comme

$$\mathcal{D}^- \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}^+ \quad (16)$$

les équations (14), (15) et (5) conduisent aux bornes suivantes pour l'indice de fiabilité

$$\beta_h^{inf} \leq \beta \leq \beta_h^{sup} \quad (17)$$

La relation (17) permet de définir un encadrement de l'erreur sur l'indice de fiabilité

$$\frac{\beta_h^{inf}}{\beta} - 1 \leq \varepsilon(\beta_h) \leq \frac{\beta_h^{sup}}{\beta} - 1 \text{ avec } \varepsilon(\beta_h) = \frac{\beta - \beta_h}{\beta_h} \quad (18)$$

Finalement comme $\Phi(x)$ est une fonction monotone croissante, il est possible d'utiliser les bornes de l'indice d'efficacité pour encadrer la probabilité de défaillance issue de l'approximation FORM

$$P_{f,FORM}^{inf} \leq P_{f,FORM} \leq P_{f,FORM}^{sup} \quad (19)$$

avec $P_{f,FORM}^{inf} = \Phi(-\beta_h^{sup})$, $P_{f,FORM}^{sup} = \Phi(-\beta_h^{inf})$ et $P_{f,FORM} = \Phi(-\beta)$.

Les bornes β_h^{inf} et β_h^{sup} sont calculées en résolvant successivement deux problèmes de minimisation sous contraintes (15) et (14). Ces problèmes sont résolus en utilisant l'algorithme iHLRF développé spécifiquement pour les problèmes de fiabilité [8]. A chaque itération l'algorithme nécessite de calculer soit une borne supérieure $S^+(\mathbf{u}_h(\mathbf{y}))$ pour (14) soit une borne inférieure $S^-(\mathbf{u}_h(\mathbf{y}))$ pour (15).

4 Application à la mécanique de la rupture

Nous considérons dans cet exemple une plaque fissurée soumise à un effort de traction (Figure 1). La fonction d'état limite G est fonction de la tenacité du matériau K_c et du facteur d'intensité de contrainte K_I .

$$G = K_c - K_I \quad (20)$$

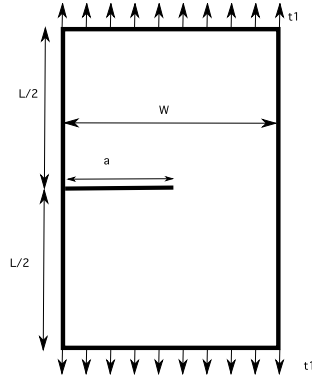


FIG. 1 – Plaque fissurée en Traction

Les paramètres aléatoires du modèle sont la longueur de la fissure qui suit une loi lognormale, l'intensité de l'effort imposé et la tenacité du matériau qui suivent une loi normale.

K_I peut être exprimé sous une forme dépendant linéairement de \mathbf{u} en utilisant une modification de l'intégrale de contour de Stern ([9]) proposée dans ([5]).

$$K_I = S(\mathbf{u}) = \int_{\omega_2} (\mathbf{K}\varepsilon(\phi\tilde{\mathbf{u}}^I) - \phi\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^I) : \varepsilon(\mathbf{u}) d\omega - \int_{\omega_2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^I \mathbf{grad}(\phi) \cdot \mathbf{u} d\omega \quad (21)$$

ω_2 est une couronne définie autour de la pointe de fissure (Figure 2), $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^I$ et $\tilde{\mathbf{u}}^I$ sont des solutions analytiques singulières calculées en pointe de fissure et ϕ une fonction telle $\phi(M) = 1$ sur C_1 and $\phi(M) = 0$ sur C_2 (voir [5, 9]).

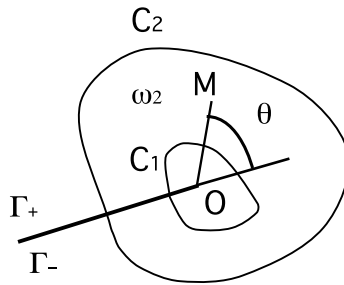


FIG. 2 – Domaine ω_2

Sur cet exemple, il est possible de calculer directement (i.e. sans utiliser la MEF) l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance par une approximation FORM : $\beta_{ref} = 2.356$ et $P_{f,ref} = 9.2 \cdot 10^{-3}$. Dans la table 1 nous présentons les bornes de l'indice de fiabilité en fonction du nombre de degrés de liberté du maillage. On constate que β_h (contrairement à β_{ref}) n'est pas inclu dans les bornes β_h^{inf} et β_h^{sup} , ce résultat n'est pas inconsistant car la relation (17) indique que β_h^{inf} et β_h^{sup} bornent β_{ref} mais pas nécessairement β_h . Dans la Figure 3, nous présentons les probabilités de défaillance $P_{f,h}$ calculées en fonction du nombre de degrés de liberté du maillage ainsi que les bornes inférieures $P_{f,h}^{inf}$ et $P_{f,h}^{sup}$ obtenues. Sur cet exemple, on constate que l'approximation E.F. conduit à sous-évaluer de façon importante la probabilité de défaillance théorique $P_{f,ref}$.

DoF	β_h	β_h^{sup}	β_h^{inf}	$\beta_h^{sup} - \beta_h^{inf}$	$ \epsilon(\beta_h) $
234	2.531	2.510	2.238	0.272	6.89%
326	2.453	2.417	2.326	0.091	3.93%
670	2.385	2.373	2.345	0.028	1.19%
1250	2.377	2.366	2.349	0.017	0.87%
1846	2.372	2.363	2.350	0.013	0.47%

TAB. 1 – Bornes de l'indice de fiabilité ($\beta_{ref} = 2.356$)

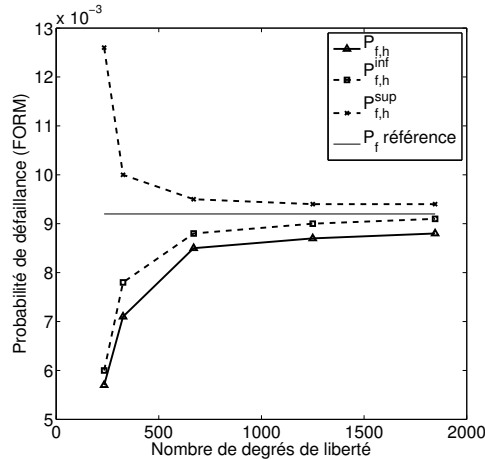


FIG. 3 – Plaque fissurée en Traction : probabilité de défaillance ($P_{f,ref} = 9.2 \cdot 10^{-3}$)

Le second exemple considéré est celui d'une plaque fissurée encadrée (Figure 4). La fonction d'état limite G est fonction de la tenacité du matériau K_c et du facteur d'intensité de contrainte K_I comme indiqué dans la relation (20).

Les paramètres aléatoires du modèle portent sur la connaissance de la fissure : la position du point A ainsi que la tenacité du matériau sont décrits par des lois normales et la longueur de la fissure suit une loi lognormale. Les analyses E.F. sont réalisées sur des maillages composés d'éléments triangulaires à 6 noeuds relativement grossier comportant environ 500 DDL. L'analyse fiabiliste conduit ici à un indice de fiabilité $\beta_h = 6.30$ et une probabilité de défaillance $P_{f,FORM} = 1.5 \cdot 10^{-10}$. On obtient pour la borne inférieure $\beta_h^{inf} = 5.85$ ($P_{f,FORM} = 2.5 \cdot 10^{-9}$) et pour la borne supérieure $\beta_h^{sup} = 6.28$ ($P_{f,FORM} = 1.7 \cdot 10^{-10}$). On constate que le calcul E.F. est trop grossier et conduit à sous estimer le risque de défaillance. Une analyse de fiabilité réalisée à partir de maillages plus fins (≈ 7000 DDL) conduit à un indice de fiabilité approché $\beta_h = 6.00$ plus précis et inclus dans les bornes proposées.

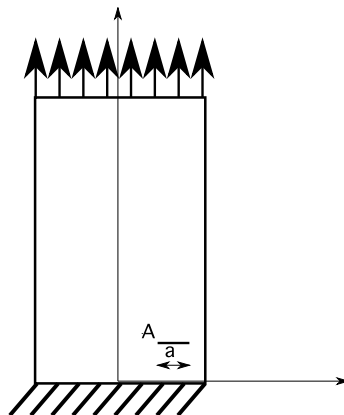


FIG. 4 – Plaque fissurée encadrée

5 Conclusion

Nous avons présenté une première approche permettant d'obtenir des encadrements simples de l'indice de fiabilité obtenu lors d'une analyse E.F. fiabiliste. Ces bornes sont construites à partir des techniques d'encadrement des quantités d'intérêt développées dans le cadre de l'erreur en relation de comportement.

6 Références bibliographiques

Références

- [1] A.M. Hasofer, N.C. Lind. *An exact and Invariant First Order Reliability Format*, J. Eng. Mech. ; ASCE, 100, EM1, 111–121, 1974.
- [2] A. Der Kiureghian, T. Dakessian. *Multiple design points in first and second-order reliability*, Structural Safety, 20 :37-49, 1998.
- [3] J.C. Mitteau. *Error evaluation for the computation of failure probability in static structural reliability problems*, Probabilistic Engineering Mechanics, 14 :119–115, 1999.
- [4] P. Ladevèze, D. Leguillon. *Error estimate procedure in the finite element method and application*, SIAM J. Num. Anal. 20(3) :485–509, 1983.
- [5] L. Gallimard, J. Panetier. *Error estimation of stress intensity factors for mixed-mode crack*, Int. J. Numer. Engng., 68 :299–316, 2006.
- [6] L. Gallimard. *A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress*, Int. J. Numer. Engng., 78 :460–482, 2009.
- [7] L. Gallimard. *Error bounds for the reliability index in finite element reliability analysis*, to appear in Int. J. Numer. Engng.
- [8] Zhang Y, Der Kiureghian A. Two improved algorithms for reliability analysis. In Rackwitz R, Augusti G, and BorriA, editors, *Proc. 6th IFIP WG7.5 Reliability and Optimization of Structural System*, 1994.
- [9] Stern M, Becker EB, and Dunham RS . A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *International Journal of Fracture* 1976 ; 12(3) :359–368.