

Un E.F. C^0 basé sur un modèle raffiné pour l'analyse multi-physique de plaques hétérogènes

P. Vidal, M. D'Ottavio, O. Polit

LEME EA 4416, Université Paris Ouest, France, {philippe.vidal,michele.d_ottavio,olivier.polit}@u-paris10.fr

Les composites stratifiés et sandwichs sont de plus en plus utilisés, en particulier dans les structures aéronautique, maritime, ... grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques. Dans cet environnement, ils sont souvent soumis à des sollicitations sévères de nature mécanique et/ou thermique et/ou piézoélectrique. Or, les mécanismes de rupture dépendent fortement des effets locaux aux interfaces des couches ou à proximité des bords. Il s'avère donc nécessaire de les évaluer de façon précise.

Pour la modélisation des structures composites et sandwichs soumis à des chargements multi-physiques, on peut distinguer deux grandes approches :

- l'approche couche équivalente (ESL) : le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches,
- l'approche couche discrète (DLT) : le nombre d'inconnues est proportionnel au nombre de couches.

Dans le cadre d'une approche ESL, l'objectif de ce travail est de développer un outil numérique simple et efficace présentant les caractéristiques suivantes :

- l'utilisation d'une relation de comportement 3D
- pas de facteur de correction en cisaillement transverse
- capacité à traiter une forte variété d'épaisseurs de structures (de mince à épaisses)
- capacité de couplages multi-physiques
- conditions limites avec un sens physique clair (point de vue ingénieur)
- approximation E.F. seulement C^0
- degrés de liberté identiques à chaque noeud
- pas de pathologie numérique tel que le verrouillage en cisaillement transverse, effet poisson, modes parasites, ...

Pour atteindre cet objectif, l'EF développé est basé sur différents travaux antérieurs. Le modèle s'appuie sur l'approche Sinus [1]. D'un point de vue E.F., un élément très efficace a été développé dans [2]. Enfin, les récents travaux [3, 4, 5] ont permis d'améliorer les résultats pour des structures épaisses et dans un environnement multi-physique. Ce modèle se révèle très intéressant d'un point de vue coût de calcul.

Dans ce travail, la prise en compte de la loi de comportement 3D est possible par l'ajout de deux fonctions supplémentaires dans le déplacement transverse (voir [6, 7, 8]). Ce choix évite le verrouillage de l'effet Poisson. Une technique de condensation au niveau élémentaire permet de supprimer ces inconnues additionnelles. Enfin, la méthode proposée dans [9] pour contrôler le verrouillage en cisaillement transverse est étendue ici.

Considérons une plaque $P = \Omega \times \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$ dans un système de coordonnées cartésiennes ($x_1, x_2, x_3 = z$). La coordonnée z est relative à la direction de l'épaisseur de la plaque e . Ω est une région arbitraire du plan (x_1, x_2) et définit le plan moyen de la plaque.

On suppose que le champ de déplacements s'écrit :

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, z) = u_0(x_1, x_2) - z u_1(x_1, x_2) + f(z) \gamma_{13}^1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, z) = v_0(x_1, x_2) - z v_1(x_1, x_2) + f(z) \gamma_{23}^1(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, z) = w_0(x_1, x_2) + z w_1(x_1, x_2) + z^2 w_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

où (u_0, v_0) sont les déplacements membranaires, w_0 est le déplacement transverse d'un point de la surface moyenne. (u_1, v_1) sont les fonctions associées à la rotation de la fibre normale. Il faut noter que la déformation transverse normale est non nulle grâce à l'ajout des deux fonctions (w_1, w_2) .

Les deux composantes de la déformation de cisaillement transverse peuvent s'exprimer en fonction des inconnues principales :

$$\gamma_{13}^1 = u_1 + \theta_2 \quad \gamma_{23}^1 = v_1 - \theta_1 \quad (2)$$

où (θ_1, θ_2) sont les rotations positives de la fibre normale (initialement orthogonale au plan moyen) autour des axes $(0, x_1)$ et $(0, x_2)$. Le signe négatif dans Eq. (1) permet de retrouver la cinématique classique de Reissner-Mindlin pour U_α lorsque $f(z) = z$.

Conformément au modèle Sinus, la fonction f dans Eq. (1) est définie par :

$$f(z) = \frac{e}{\pi} \sin \frac{\pi z}{e} \quad (3)$$

L'EF développé est évalué sur des tests hétérogènes classiques en terme de convergence et de précision sous sollicitations mécanique ou thermique. Ce travail s'inscrit dans la recherche d'un outil présentant un bon compromis entre coût de calcul et précision pour la simulation numérique de structures composites. Dans cette perspective, cette contribution peut être avantageusement exploitée pour des problèmes d'optimisation de structures hétérogènes.

Références

- [1] M. Touratier. *A simple and efficient model in composite structure*, C. R. Acad. Sci. Paris, 29, 901–916, 1991.
- [2] O. Polit, M. Touratier. *High order triangular sandwich plate finite element for linear and nonlinear analyses*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 185, 305–324, 2000.
- [3] P. Vidal, O. Polit. *A thermomechanical finite element for the analysis of rectangular sandwich beams*, Fin. Elem. Anal. Des., 42, 868–883, 2006.
- [4] P. Vidal, O. Polit. *A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams*, Compos. Struct., 84, 56–72, 2008.
- [5] M. D'Ottavio, O. Polit. *Sensitivity Analysis of Thickness Assumptions for Piezoelectric Plate Models*, J. Intell. Mater. Syst. Struct., 20, 1815–1834, 2009.
- [6] A. Tessler, E. Saether, T. Tsui. *Vibration of thick laminated composite plates*, J. Sound Vibr., 179(3), 474–498, 1995.
- [7] A. Tessler, M.S. Annett, G. Gendron. *A {1,2}-order plate theory accounting for three-dimensional thermoelastic deformations in thick composite and sandwich laminates*, Compos. Struct., 52, 67–84, 2001.
- [8] P.F. Pai, A.N. Palazotto. *A higher-order sandwich plate theory accounting for a 3-D stresses*, Int. J. Solids Struct., 38, 5045–5062, 2001.
- [9] O. Polit, M. Touratier, P. Lory. *A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element*, Int. J. Num. Meth. Eng., 37, 387–411, 1994.