



HAL
open science

Un E.F. C0 basé sur un modèle raffiné pour l'analyse multi-physique de plaques hétérogènes

Philippe Vidal, Michele d'Ottavio, Olivier Polit

► **To cite this version:**

Philippe Vidal, Michele d'Ottavio, Olivier Polit. Un E.F. C0 basé sur un modèle raffiné pour l'analyse multi-physique de plaques hétérogènes. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. hal-00592860

HAL Id: hal-00592860

<https://hal.science/hal-00592860>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un E.F. C^0 basé sur un modèle raffiné pour l'analyse multiphysique de plaques hétérogènes

P. Vidal, M. D'Ottavio, O. Polit

LEME EA 4416, Université Paris Ouest, France, {philippe.vidal,michele.d_ottavio,olivier.polit}@u-paris10.fr

Résumé — Cet article présente un nouvel élément fini (EF) C^0 à huit noeuds pour l'analyse linéaire des plaques. L'accent est mis sur la capacité à modéliser des plaques minces et épaisses sans pathologies numériques (verrouillage, mode parasite,...). Il est basé sur un modèle raffiné [1] et peut être vu comme une évolution d'un précédent travail [2, 3] suivant trois directions : utilisation d'approximations EF C^0 , modélisation de structures minces et épaisses, aptitude pour l'analyse multiphysique. Dans cet esprit, la contrainte normale transversale n'est pas négligée permettant ainsi d'utiliser la loi de comportement 3D.

Mots clés — élément fini, modèle raffiné, verrouillage, thermomécanique.

1 Introduction

La recherche est toujours très active afin d'améliorer la vitesse de convergence et la précision en déplacement et en contrainte des E.F. De plus, les problèmes numériques doivent être contrôlés. La majorité des travaux sur ces aspects concernent le modèle de Reissner-Mindlin (First Shear Deformation Theory) en plaque et de Naghdi en coque. Les contributions pour les poutres, les plaques et les coques sont trop nombreuses pour être discutées ici mais on pourra avantageusement consulter [4, 5].

D'un autre côté, la recherche est aussi très active sur le développement de nouveaux modèles pour l'analyse des structures hétérogènes et les analyses multiphysiques. Deux familles peuvent être identifiées : les approches couches équivalentes (Equivalent Single Layer Model) et les approches layer-wise (Layer-Wise Model). Suivant [6], le nombre d'inconnu est indépendant du nombre de couches pour ESLM alors que le même nombre d'inconnus est présent dans chaque couche pour LWM. Un autre champ de développement concerne l'utilisation de modèles raffinés, type ESLM ou LWM, dans lequel on introduit les conditions d'interface. Cela permet de réduire le nombre d'inconnus et ces modèles sont dits ZigZag. On pourra consulter [7] pour plus d'informations. Actuellement, les modèles les plus utilisés sont Kirchhoff-Love (Classical Laminate Theory) et Reissner-Mindlin qui utilisent respectivement trois et cinq fonctions inconnues. Cela avait un sens par le passé afin d'avoir des équations et des formules simples et manipulables à la main. Aujourd'hui, la puissance des ordinateurs permet de résoudre des problèmes de grandes tailles (10^9 inconnus) mais les logiciels de calcul utilisent toujours ces modèles simplifiés. A ce sujet, il est intéressant de consulter [8] qui propose une étude systématique des modèles de plaques et identifie les termes indispensables dans le modèle en fonction du problème (géométrie, propriétés, chargement, ...), afin d'obtenir des résultats corrects.

Ce travail s'inscrit dans ces deux directions et concerne le développement d'un EF quadrilatère à huit noeuds, basé sur un modèle raffiné, et possédant sept degrés de liberté (ddl) en chaque noeud. L'objectif est d'obtenir un outil numérique dont le ratio coût/précision soit le meilleur. Les évaluations présentées ici concernent les pathologies numériques, la sensibilité à la distorsion de maillage, la convergence (vitesse et précision) pour des chargements mécanique et thermique.

Nous aborderons ensuite les structures hétérogènes (stratifiés et sandwichs), et cet EF pourra évoluer en utilisant les précédents travaux sur des poutres, des plaques et des coques hétérogènes [3, 9, 10, 11, 12].

2 Le problème de plaque

Soit une plaque occupant un domaine $\mathcal{V} = \Omega \times [-\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}]$ avec un système de coordonnées $(x_1, x_2, x_3 = z)$. La plaque est donc définie par une région Ω dans le plan (x_1, x_2) , et par une épaisseur constante e .

2.1 La loi de comportement

Chaque couche est supposée orthotrope. En utilisant une notation matricielle, la loi de comportement 3D d'une couche k est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} \\ \sigma_{33}^{(k)} \\ \sigma_{23}^{(k)} \\ \sigma_{13}^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & C_{16}^{(k)} \\ & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & C_{26}^{(k)} \\ & & C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & C_{36}^{(k)} \\ & & & C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} & 0 \\ & & & & C_{55}^{(k)} & 0 \\ & sym & & & & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(k)} \\ \varepsilon_{22}^{(k)} \\ \varepsilon_{33}^{(k)} \\ \gamma_{23}^{(k)} \\ \gamma_{13}^{(k)} \\ \gamma_{12}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{i.e.} \quad [\sigma^{(k)}] = [C^{(k)}] [\varepsilon^{(k)}] \quad (1)$$

où on note $[\sigma]$ le tenseur des contraintes, $[\varepsilon]$ le tenseur des déformations et C_{ij} les coefficients matériau de la loi 3D.

Pour l'analyse thermomécanique, la loi 3D est modifiée en introduisant les coefficients de dilatation thermique, $\alpha_i^{(k)}$ et la variation de température ΔT , ainsi :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} \\ \sigma_{33}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} \\ & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} \\ & & C_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(k)} - \alpha_1^{(k)} \Delta T \\ \varepsilon_{22}^{(k)} - \alpha_2^{(k)} \Delta T \\ \varepsilon_{33}^{(k)} - \alpha_3^{(k)} \Delta T \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.2 La forme faible du problème aux limites

A partir des notations matricielles précédentes et pour un champ de déplacement virtuel admissible $\vec{u}^* \in U^*$, le principe variationnel s'écrit :

trouver $\vec{u} \in U$ (espace des déplacements admissibles) tel que :

$$-\int_{\mathcal{V}} [\varepsilon(\vec{u}^*)]^T [\sigma(\vec{u})] d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} [u^*]^T [f] d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}_F} [u^*]^T [F] d\partial\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho [u^*]^T [\ddot{u}] d\mathcal{V} \quad (3)$$

$\forall \vec{u}^* \in U^*$

où $[f]$ et $[F]$ sont les forces de volume et de surface agissant sur $\partial\mathcal{V}_F$. $\varepsilon(\vec{u}^*)$ sont les déformations virtuelles, et ρ est la densité.

Eq. (3) est le point de départ classique pour définir une approximation EF.

2.3 Le champ de déplacement

On peut vouloir définir toutes théories 2D par déduction à partir de la formulation 3D du problème aux limites, à partir d'un développement asymptotique par exemple, mais il est aussi possible et souvent plus pratique d'établir une théorie 2D sans référence au problème 3D. Ici, la justification 3D du modèle 2D est obtenue à partir des travaux de Cheng [13].

A partir du modèle sinus de Touratier [1], un nouveau modèle de plaque prenant en compte la contrainte normale est présenté. Cette extension est basée sur :

- des travaux poutres, plaques, coques [1, 14, 15, 16, 3, 9, 10, 11] sur la théorie sinus,
- les travaux de Tessler sur une théorie de plaque d'ordre $\{1, 2\}$ [17], et une théorie $\{3, 2\}$ [18].

La cinématique a la forme suivante :

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, x_3 = z) = u_0(x_1, x_2) - z u_1(x_1, x_2) + f(z) (u_1(x_1, x_2) + \theta_2(x_1, x_2)) \\ U_2(x_1, x_2, x_3 = z) = v_0(x_1, x_2) - z v_1(x_1, x_2) + f(z) (v_1(x_1, x_2) - \theta_1(x_1, x_2)) \\ U_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w_0(x_1, x_2) + z w_1(x_1, x_2) + z^2 w_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4)$$

où (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements de la surface moyenne, (u_1, θ_2) et (v_1, θ_1) sont des mesures de rotations du segment traversant autour des axes $(0, x_1)$ et $(0, x_2)$. De plus, les fonctions (w_1, w_2) sont ajoutées afin d'avoir une déformation normale transverse non nulle. Il est à noter que le verrouillage de poisson ou d'épaisseur est évité puisque on a un développement à l'ordre deux du déplacement transversal, voir [19].

Deux déformations de cisaillement peuvent être introduites dans Eq. (4) afin d'alléger les notations et l'on a :

$$\gamma^1_{13} = u_1 + \theta_2 \quad \gamma^1_{23} = v_1 - \theta_1 \quad (5)$$

Enfin, dans le cadre du modèle sinus, on impose :

$$f(z) = \frac{e}{\pi} \sin \frac{\pi z}{e} \quad (6)$$

Le modèle sinus classique est retrouvé en posant $w_{0,1} = u_1$, $w_{0,2} = v_1$ et en négligeant w_1 et w_2 .

2.4 Les déformations

A partir de Eq. (4), il est aisé d'obtenir l'expression des déformations :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = u_{0,1} - z u_{1,1} + f(z) \gamma^1_{13,1} \\ \epsilon_{22} = v_{0,2} - z v_{1,2} + f(z) \gamma^1_{23,2} \\ \epsilon_{33} = w_1 + 2 z w_2 \\ \gamma_{23} = w_{0,2} - v_1 + f'(z) \gamma^1_{23} + \frac{z w_{1,2} + z^2 w_{2,2}}{e} \\ \gamma_{13} = w_{0,1} - u_1 + f'(z) \gamma^1_{13} + \frac{z w_{1,1} + z^2 w_{2,1}}{e} \\ \gamma_{12} = u_{0,2} + v_{0,1} - z(u_{1,2} + v_{1,1}) + f(z) (\gamma^1_{13,2} + \gamma^1_{23,1}) \end{cases} \quad (7)$$

Dans Eq. (7), la contribution de w_1 and w_2 dans les déformations de cisaillement transverse est négligée afin de ne pas avoir de dérivées de w_1 et w_2 dans les composantes de déformations. Ainsi, une continuité C^{-1} est seulement nécessaire pour ces fonctions, ce qui sera mis à profit lors du choix des approximations EF. Ainsi, les déformations de cisaillement transverse deviennent :

$$\begin{cases} \gamma_{23} = \gamma^0_{23} + f'(z) \gamma^1_{23} \\ \gamma_{13} = \gamma^0_{13} + f'(z) \gamma^1_{13} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \gamma^0_{23} = w_{0,2} - v_1 \\ \gamma^0_{13} = w_{0,1} - u_1 \end{cases} \quad (8)$$

En adoptant une notation matricielle pour le déplacement et les déformations, on écrit :

$$[u]^T = [F_u(z)] [\mathcal{E}_u] \quad [\epsilon]^T = [F_\epsilon(z)] [\mathcal{E}_\epsilon] \quad (9)$$

où les matrices $[F_u(z)]$ et $[F_\epsilon(z)]$ contiennent les dépendances en z .

Enfin, Eq. (9) est introduite dans Eq. (3), et une intégration sur l'épaisseur est effectuée, afin d'obtenir une formulation variationnelle sur le domaine surfacique Ω .

Il reste à définir l'approximation EF des vecteurs déplacement et déformation généralisés $[\mathcal{E}_u]$, $[\mathcal{E}_\epsilon]$.

3 Les approximations EF

C'est un quadrilatère à huit noeuds qui est proposé. L'approximation est classique et isoparamétrique pour la géométrie et les fonctions inconnues déplacements (u_0, v_0, w_0) et rotations $(u_1, v_1, \theta_1, \theta_2)$.

Afin de contrôler le phénomène de verrouillage en cisaillement transverse, la méthodologie CL8 développée pour FSDT dans [20] est ici étendue à ce modèle raffinée. C'est donc l'approximation des déformations de cisaillement transverse constantes, notée $\gamma^0_{\alpha 3}$ dans Eq. (8) qui est traitée. On ne détaillera pas la procédure.

Enfin, l'approximation des fonctions (w_1, w_2) est choisie bilinéaire en utilisant les points intérieurs au domaine élémentaire de coordonnées $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Une technique classique de condensation statique au niveau élémentaire permettra alors d'éliminer les ddls associés à ces fonctions dont l'approximation est interne au domaine. C'est donc bien un EF à 8 noeuds et 7 ddls par noeud qui est finalement obtenu, et qui va être évalué numériquement dans la section suivante.

4 Les évaluations numériques

On intègre exactement les matrices élémentaires en utilisant un schéma de Gauss à 3×3 points. Le rang de la matrice de rigidité ainsi obtenu est correct, avec 6 valeurs propres nulles, correspondant aux 6 mouvements de corps rigide. L'EF sera appelé **sin-z2/CL8**. On présentera successivement deux tests de verrouillage, cisaillement transverse et poisson, puis un test de distorsion, et enfin un test de convergence sous sollicitation mécanique et thermique.

Des comparaisons seront fournies avec des EF existants, fruits de précédents travaux [20, 3, 9] :

Sin-AG modèle Sinus et approximations EF Conformes ; C^1 Argyris pour le déplacement transverse et semi- C^1 Ganev pour les autres déplacements et les rotations,

RM-AG modèle Reissner-Mindlin et mêmes approximations EF ; on utilisera le coefficient correcteur en cisaillement transverse classique $5/6$,

KL-AG modèle Kirchhoff-Love et mêmes approximations EF,

RM-CL8 modèle Reissner-Mindlin avec une approximation EF de Serendip, 8 noeuds ; correction du verrouillage en cisaillement transverse de type CL8,

et aussi les travaux de E. Carrera basés sur la Carrera Unified Formulation (CUF), voir [21, 22, 23, 8] :

ED2 modèle ESL et approche Déplacement ; chaque composante est développé à l'ordre 2, c'est un modèle à 9 fonctions inconnues

ED3 modèle ESL et approche Déplacement, chaque composante est développé à l'ordre 3, c'est un modèle à 12 fonctions inconnues .

4.1 Verrouillage numérique

On considère une plaque carrée de dimension a en appui simple, soumise à une pression uniforme. L'épaisseur est définie par $e = 10^{-n}$ avec $n \in \{0, 4\}$. Le matériau est isotrope avec $E = 10.92$ et $\nu = 0.43$. Il y a absence de verrouillage en cisaillement transverse si la vitesse de convergence est indépendante de l'élancement $S = \frac{a}{e}$ quand e tend vers 0. En considérant un maillage fixé $N = 2$ (2×2 éléments), la Fig. 1 présente l'erreur sur la flèche au milieu de la plaque en $z = 0$, pour l'approximation CL8 et l'approche isoparamétrique. Il est tout à fait évident que le verrouillage en cisaillement transverse est totalement absent pour sin-z2/CL8 alors que la version isoparamétrique verrouille très fortement. La convergence vers la solution de KL pourra être obtenue mais il faudra un maillage de plus en plus fin, à mesure que l'épaisseur diminue.

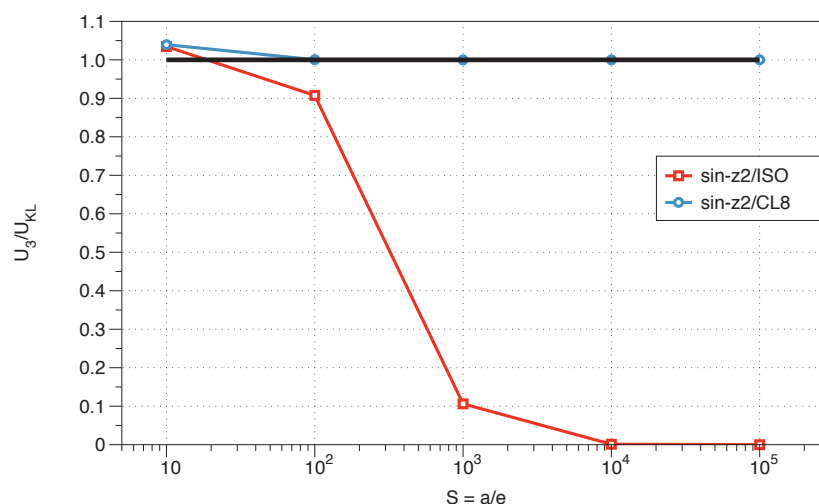


FIG. 1 – Verrouillage en cisaillement transverse.

Le test de verrouillage de poisson, ou d'épaisseur, reprend la même configuration que précédemment mais on testera 3 élancements $S = 4, 10, 100$ et trois coefficients de poisson $\nu = 0., 0.3, 0.45$. On compare

		erreur relative $U_3(a/2, b/2, 0)$	
		$(w_i)_{i=0,2}$	$(w_i)_{i=0,1}$
$S = 4$	$\nu = 0.$	-0.31	-0.31
	$\nu = 0.3$	-0.42	-11.47
	$\nu = 0.45$	-0.52	-49.84
$S = 10$	$\nu = 0.$	-0.24	-0.24
	$\nu = 0.3$	-0.31	-12.28
	$\nu = 0.45$	-0.39	-62.44
$S = 100$	$\nu = 0.$	-0.05	-0.05
	$\nu = 0.3$	-0.06	-18.39
	$\nu = 0.45$	-0.11	-66.91

TAB. 1 – Verrouillage de poisson ou d'épaisseur.

les résultats obtenus dans le cas où l'on a U_3 développé à l'ordre deux, voir Eq. (4), et le cas où l'on considère U_3 linéaire seulement. La référence est obtenue en utilisant un maillage $N = 8$. Les résultats sont présentés dans Tab. 1 et sont totalement indépendants de l'élançement. Ils sont liés uniquement au coefficient de poisson, ce qui explique la dénomination de ce verrouillage. C'est intrinsèque au modèle et totalement indépendant de l'approximation EF. En développant U_3 à l'ordre deux, il n'y a aucun problème. Dans le cas contraire, il faut adopter en flexion la loi de comportement 2D.

4.2 Distorsion

Afin d'évaluer la sensibilité de cet EF à la distorsion de maillage, on considère une plaque carrée ($a = 100, e = 1$) encadrée soumise à une charge concentrée $F_3 = 178.5714$ en son centre. Le matériau est isotrope avec $E = 10.92 \cdot 10^4$ et $\nu = 0.3$. La solution de référence est donnée par Kirchhoff-Love et l'on a $U_3 = 1$. La distorsion est introduite dans un maillage $N = 2$ sous la forme du paramètre s indiquée sur Fig. 2. Il est à noter que dans le cas $s = 12$, la coordonnée du noeud sommet de l'EF central est $(37.5, 37.5)$ alors que le point milieu des deux noeuds sommets adjacents est $(37, 37)$. C'est donc un maillage extrêmement distordu. Les résultats sont présentés dans Tab. 2 et montre la bonne réponse d'ensemble de cet EF dont l'erreur maximale est inférieure à 7 %.

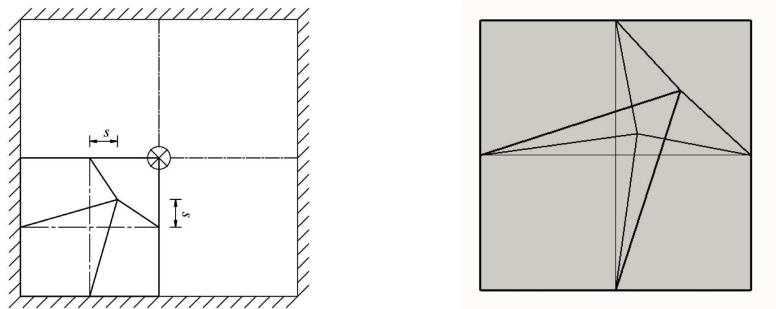


FIG. 2 – Sensibilité à la distorsion de maillage ; problème et maillage $s = 0, 4, 12$.

s	0.	4.	8.	12.
U_3	1.001	0.9836	0.9629	0.9366

TAB. 2 – déplacement transverse - plaque carrée encadrée.

4.3 Test de convergence et précision

4.4 Chargement mécanique

On considère maintenant une plaque carrée isotrope avec différents élancements, soumise à une pression double sinus. Les solutions de référence sont données dans [24].

La Fig. 3 présente la convergence des déplacements et des contraintes pour une plaque épaisse $S = 2$ et une plaque mince $S = 100$. Le déplacement transversal présente une erreur inférieure au pourcent pour $N = 2$. Pour les contraintes (dans le plan et de cisaillement), on obtient une erreur inférieure à 3 % à convergence pour tous les élancements. Par contre, sa contrainte normale transversale est beaucoup plus difficile à obtenir avec ce modèle. Afin d'illustrer cela, la distribution dans l'épaisseur est présentée Fig. 4 pour le cas mince et le cas épais. Afin de vérifier la convergence, des maillages avec un raffinement progressif vers le centre notés sr1 et sr2 sont proposés. On constate sur ces courbes que la convergence est beaucoup plus lente dans le cas mince.

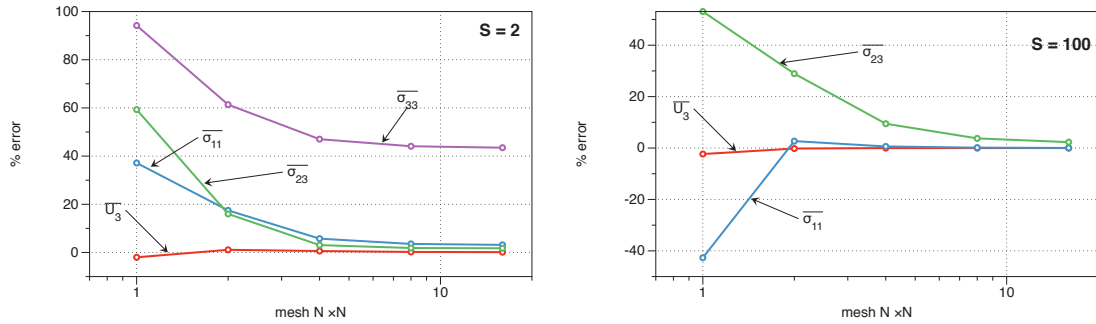


FIG. 3 – Plaque carrée isotrope, chargement mécanique ; convergence du déplacement et des contraintes $S = 2$ et $S = 100$.

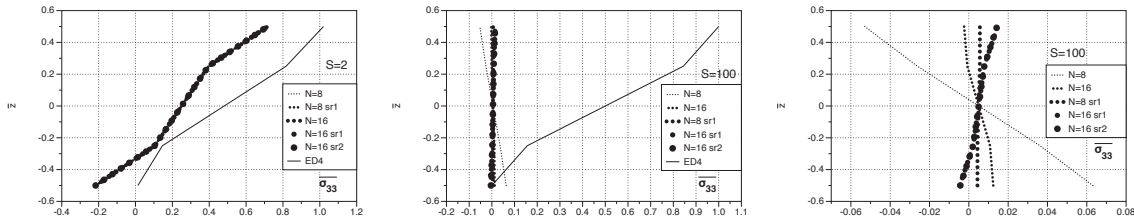


FIG. 4 – Plaque carrée isotrope, chargement mécanique ; convergence et distribution de σ_{33} pour $S = 2$ et $S = 100$.

Enfin, les résultats pour $N = 16$ en considérant différents élancements sont présentés dans Tab. 3. Ils sont comparés à ceux obtenus par l'EF AG et un maillage $N=4$. L'amélioration des performances est notable dans le domaine épais et semi-épais. Dans le cas mince, les résultats obtenus sont identiques. Il est à noter que les résultats d'ensemble de sin-z2/CL8 se situe entre ED2 et ED3, pour un nombre de fonctions inconnues bien inférieur et donc un coût inférieur.

4.5 Chargement thermique

On considère maintenant une plaque carrée isotrope transverse avec différents élancements, soumise à un chargement thermique définie par : $T(x_1, x_2, z) = T_0 \frac{2z}{e} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{a}$.

Les solutions de référence sont données dans [25]. Les résultats pour $N = 16$ sont présentés Tab. 4. Les résultats fournis par sin-z2/CL8 sont meilleurs dans le domaine épais et semi-épais, en particulier sur la flèche. Dans le cas mince, les modèles donnent des résultats identiques.

S/maillage	modèle	\bar{U}_3	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{23}$	$\bar{\sigma}_{33}$
100	ref.	2.7248	0.2037	0.2387	0.0100
N=16	Sin-z2/CL8	2.7247	0.2038	0.2442	-0.0024
N=4	Sin-AG	2.7254	0.2036	0.2464	
N=4	RM-AG	2.7254	0.2036	0.1592	
	ED2	2.7247	0.2037	0.1727	0.0102
	ED3	2.7248	0.2037	0.2387	0.0128
10	ref.	2.8345	0.2068	0.2383	0.1000
N=16	Sin-z2/CL8	2.8210	0.2090	0.2428	0.1447
N=4	Sin-AG	2.8863	0.2058	0.2462	
N=4	RM-AG	2.8867	0.2036	0.1592	
	ED2	2.8156	0.2055	0.1722	0.0102
	ED3	2.8345	0.2082	0.2383	0.1276
5	ref.	3.2056	0.2168	0.2371	0.2000
N=16	Sin-z2/CL8	3.1573	0.2244	0.2411	0.2910
N=4	Sin-AG	3.3722	0.2318	0.2455	
N=4	RM-AG	3.3755	0.2036	0.1592	
	ED2	3.1270	0.2118	0.1709	0.2072
	ED3	3.2044	0.2224	0.2372	0.2552
2	ref.	7.3826	0.3145	0.2277	0.5000
N=16	Sin-z2/CL8	7.3923	0.3244	0.2317	0.7174
N=4	Sin-AG	6.7038	0.2564	0.2411	
N=4	RM-AG	6.7968	0.2036	0.1592	
	ED2	6.7598	0.2839	0.1618	0.5454
	ED3	7.3337	0.3460	0.2287	0.6360
N=4	KL-AG	2.7238	0.2036		

TAB. 3 – Plaque carrée isotrope, chargement mécanique.

5 Conclusion

Un nouvel EF basé sur un modèle de plaque raffiné a été présenté et évalué sur un ensemble de test. Les résultats obtenus sont très encourageants dans le cadre de la recherche d'un compromis "idéal" entre coût et précision. Par rapport au modèle classique FSDT, on ajoute seulement deux fonctions inconnues supplémentaires pour lesquels la définition des conditions limites ne posent aucun problème puisque ce ne sont que des rotations. L'étape suivante va consister à évaluer cet EF sur des tests hétérogènes.

Références

- [1] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Int. J. Eng. Sci.*, 29 :901–916, 1991.
- [2] O. Polit and M. Touratier. High order triangular sandwich plate finite element for linear and nonlinear analyses. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 185 :305–324, 2000.
- [3] O. Polit and M. Touratier. A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and nonlinear analysis. *Compos. Struct.*, 58(1) :121–128, 2002.
- [4] J. Mackerle. Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements : a bibliography (1992-1995). *Engineering Computations*, 14(4) :347–??, 1997.
- [5] J. Mackerle. Finite- and boundary-element linear and nonlinear analysis of shells and shell-like structures : a bibliography (1999-2001). *Fin. Elem. Anal. Des.*, 38 :765–782, 2002.
- [6] J.N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. CRC Press, second ed. edition, 2004.
- [7] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 9(2) :87–140, 2002.
- [8] E. Carrera and M. Petrolo. Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates. *AIAA J.*, 48(12) :2852–2866, 2010.

S	modèle	\bar{U}_1	\bar{U}_2	\bar{U}_3	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{22}$	$\bar{\sigma}_{12}$	$\bar{\sigma}_{13}$	$\bar{\sigma}_{23}$
4	ref.	-16.244	-90.676	37.652	1043.4	-829.7	-167.95	104.21	-126.93
	Sin-z2/CL8	-12.517	-86.795	42.200	746.8	-845.3	-156.13	121.58	-128.34
	Sin-AG	-13.328	-85.201	21.199	811.3	-846.4	-160.68	125.38	-130.06
	RM-AG	-8.9449	-97.255	21.735	474.9	-811.8	-173.48	83.91	-83.96
10	ref.	-16.017	-33.061	15.577	980.17	-1011.3	-77.09	70.62	-72.96
	Sin-z2/CL8	-15.323	-32.357	16.279	926.37	-1013.7	-74.96	73.54	-74.28
	SIN-AG	-15.311	-32.092	12.764	926.03	-1012.2	-79.91	74.19	-74.70
	RM-AG	-14.286	-34.726	12.789	846.81	-1004.7	-83.02	48.23	-48.28
100	ref.	-15.991	-16.177	10.24	964.81	-1064.5	-50.53	7.961	-7.964
	Sin-z2/CL8	-15.984	-16.169	10.24	966.02	-1063.9	-50.55	8.143	-8.141
	SIN-AG	-15.870	-16.223	10.14	958.11	-1062.0	-53.38	8.097	-8.104
	RM-AG	-15.858	-16.251	10.14	957.18	-1061.9	-53.49	5.237	-5.235
	KL-AG	-15.876	-16.048	10.12	958.94	-1064.0	-51.69		

TAB. 4 – Plaque carrée isotrope transverse, chargement thermique.

- [9] F. Dau, O. Polit, and M. Touratier. C^1 plate and shell finite elements for geometrically non linear analysis of multilayered structures. *Comput. Struct.*, 84 :1264–1274, 2006.
- [10] P. Vidal and O. Polit. A thermomechanical finite element for the analysis of rectangular sandwich beams. *Fin. Elem. Anal. Des.*, 42 :868–883, 2006.
- [11] P. Vidal and O. Polit. A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams. *Compos. Struct.*, 84 :56–72, 2008.
- [12] P. Vidal, M. D’Ottavio, M. Ben Thaier, and O. Polit. An efficient finite shell element for the static response of piezoelectric laminates. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 2011. to appear.
- [13] S. Cheng. Elasticity theory of plates and a refined theory. *J. Applied Mech. ASME*, 46 :644–650, 1979.
- [14] M. Touratier. A refined theory of laminated shallow shells. *Int. J. Solids Struct.*, 29(11) :1401–1415, 1992.
- [15] M. Touratier. A generalization of shear deformation theories for axisymmetric multilayered shells. *Int. J. Solids Struct.*, 29 :1379–1399, 1992.
- [16] M. Ganapathi, B. Patel, O. Polit, and M. Touratier. A c^1 finite element including transverse shear and torsion warping for rectangular sandwich beams. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 45(1) :47–75, 1999.
- [17] A. Tessler. An improved plate theory of 1, 2-order for thick composite laminates. *Int. J. Solids Struct.*, 30 :981–1000, 1993.
- [18] A. Barut, E. Madenci, J. Heinrich, and A. Tessler. Analysis of thick sandwich construction by a 3, 2-order theory. *Int. J. Solids Struct.*, 38 :6063–6077, 2001.
- [19] E. Carrera and S. Brischetto. Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed plate theories. *Compos. Struct.*, 82(4) :549–562, 2008.
- [20] O. Polit, M. Touratier, and P. Lory. A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37 :387–411, 1994.
- [21] E. Carrera. Developments, ideas, and evaluations based upon reissner’s mixed variational theorem in the modelling of multilayered plates and shells. *App. Mech. Rev.*, 54 :301–329, 2001.
- [22] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered plates and shells : a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(3) :216–296, 2003.
- [23] E. Carrera. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *App. Mech. Rev.*, 56 :287–308, 2003.
- [24] L. Demasi. ∞^3 plate theories for thick and thin plates : the generalized unified formulation. *Compos. Struct.*, 84 :256–270, 2008.
- [25] K. Bhaskar, T.K. Varadan, and J.S.M. Ali. Thermoelastic solutions for orthotropic and anisotropic composite laminates. *Composite Part B : Eng. J.*, 27B :415–420, 1996.