



**HAL**  
open science

## Simulation et analyse d un broyeur à billes par éléments discrets

Romain Laniel, Madina Tchikou, Jean-Christophe Sangleboeuf

► **To cite this version:**

Romain Laniel, Madina Tchikou, Jean-Christophe Sangleboeuf. Simulation et analyse d un broyeur à billes par éléments discrets. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592857

**HAL Id: hal-00592857**

**<https://hal.science/hal-00592857>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Simulation et analyse d'un broyeur à billes par éléments discrets

R. Laniel<sup>1</sup>, M. Tchikou<sup>1</sup>, J.-C. Sangleboeuf<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Larmaur, Université de Rennes 1, France, {romain.laniel, madina.tchikou, jean-christophe.sangleboeuf}@univ-rennes1.fr

**Résumé** — Les broyeurs à billes utilisés dans l'industrie permettent de fragmenter des particules en suspension en agitant un domaine broyant. Les multiples impacts peuvent endommager les billes et diminuer l'efficacité de broyage. Pour étudier finement ce phénomène, une approche numérique discrète incluant des effets fluides est proposée et mise en œuvre. Les résultats obtenus permettent de remonter aux variables internes des corps broyants et de localiser les zones de haute énergie.

**Mots clés** — Broyage, Simulation par éléments discrets, Interaction fluide vs. grains.

### 1 Contexte industriel

Un grand nombre de procédés industriels utilisent la fragmentation de particule pour des applications dont les plus importantes en volume concernent les industries des peintures, pigments et encre, l'industrie minière ou encore celles des charges minérales et des céramiques. Le choix des technologies de broyage, à boulets, par attrition ou à billes agitées, dépend du domaine d'utilisation et des besoins qui en découlent. Par exemple, dans l'industrie minière, la cimenterie ou le recyclage des déchets métalliques, la préoccupation principale consiste à mettre en œuvre des appareils capables de traiter de grandes quantités de matière. Dans les industries des charges minérales et des céramiques, les besoins se précisent : grande finesse des produits broyés, distribution granulairre étroite et contrôle important du degré de contamination. Généralement, lorsque les exigences de broyage sont pointues, les broyeurs de haute énergie à billes agitées sont favorisés. Les billes utilisées sont en céramique et sont caractérisées par de grandes masses volumiques et des granulométries plus fines et étroitement centrées. Ces broyeurs à billes sont constitués d'une chambre de broyage cylindrique remplie de corps broyants, mis en mouvement par rotation d'un arbre à géométries variées : agitateur à disques, à doigts, annulaires *et cætera*. Le mouvement des billes engendre des contraintes de compression et de cisaillement sur les particules, en suspension dans un fluide, lors de leur traversée de la chambre de broyage. Les billes subissent des dommages et leur usure est généralement caractérisée par la perte de masse au cours du broyage.

L'usure reste un phénomène peu étudié dans la littérature et ses mécanismes physiques restent mal connus pour les billes. Or, l'endommagement des billes se faisant par perte de masse, la taille des billes a tendance à diminuer au cours du temps et les débris abrasés peuvent contaminer la suspension broyée. De plus, des observations expérimentales effectuées montrent que, pour des paramètres opératoires données, il existe une optimisation, par la taille des billes, de l'efficacité de broyage, qui est définie ici comme la réduction effective des diamètres médians des particules broyées [7]. Comprendre les mécanismes d'usure des billes est donc un élément crucial à prendre en compte pour améliorer les performances de broyage. Dans le cadre de la détermination d'une loi d'usure des corps broyants, différents types de billes en céramique, de tailles identiques, ont été utilisés pour le broyage de deux poudres différentes en granulométrie, forme des particules et dureté, dans un broyeur à billes de laboratoire à agitateur à doigts. Ces essais ont montré des résistances face à l'usure différentes. De plus, les hiérarchies d'usure diffèrent également en fonction des particules broyées, ce qui peut caractériser des mécanismes d'usure différents. Des essais de rayage

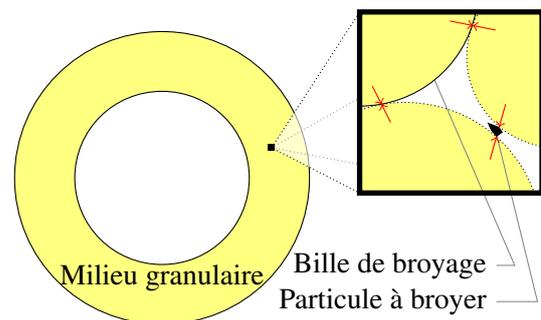


FIGURE 1 – Vue en coupe du milieu granulaire de broyage et des particules à broyer.

et d'indentation par un indenteur Vickers, effectués sur les billes polies, ont montré deux types d'endommagements : apparition de bourrelets par déformation majoritairement plastique et fissuration par écaillage. Ces observations nous ont amené à proposer un modèle d'usure reposant sur l'assimilation des particules à broyer, capturées dans un contact bille/bille, à des micro indenteurs pointus, cf. Fig. 1. Cette approche nécessite la caractérisation précise des contacts entre les billes au cours du broyage, passant essentiellement par la qualification et la quantification des efforts de contact. A partir des efforts, la surface de contact peut être estimée et le nombre de particules piégées évalué. En fonction des compositions des billes, il existe des charges d'indentation seuils de déformation plastique et d'écaillage. Pour affiner l'étude des contacts et du type d'endommagement qu'ils entraînent, la distribution des efforts au sein de la chambre de broyage et la fréquence des chocs pour un effort donné apparaissent donc comme des éléments importants. L'approche numérique de ce problème a souvent été abordée au travers de la mécanique des fluides en considérant le mélange granulat et fluide comme un fluide équivalent [1, 3, 8]. Néanmoins, ces simulations homogénéisées ne permettent pas de rendre compte du problème localisé du contact qui, par nature, est un problème discret. Seule la simulation granulaire couplée à des actions fluides permettent de remonter aux variables internes des corps broyants, comme les efforts de contact.

## 2 Simulation du procédé de broyage

### 2.1 Une méthode discrète avec contribution fluide

Une méthode de simulation de problèmes d'interactions fluide *vs.* particules a été proposée dans [2]. Néanmoins, cette méthode reste coûteuse et peu adaptée aux problèmes comportant un grand nombre de corps et de contacts. Dans le cadre de cette étude, nous proposons alors d'utiliser la théorie de la dynamique des contacts non réguliers, ou NSCD [4, 6]. Celle-ci permet de résoudre des problèmes multi-contacts en exprimant les équations de la dynamique dans le repère local d'un contact  $\alpha$ . De telles transformations sont assurées par les opérateurs  $\mathbf{H}_\alpha$  et  $\mathbf{H}_\alpha^T$  qui transportent les variables du repère du corps considéré au repère local de contact et *vice versa*. Pour le pas d'intégration  $i + 1$ , une relation linéaire entre  $u_{i+1}^\alpha$  la vitesse relative et  $p_{i+1}^\alpha$  l'impulsion moyennée sur  $[t_i, t_{i+1}]$  est alors trouvée et est associée à une condition de contact,

$$\begin{cases} u_{i+1}^\alpha - \mathbf{W}^{\alpha\alpha} p_{i+1}^\alpha = u_{\text{libre},i}^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{W}^{\alpha\beta} p_{i+1}^\beta \\ \text{Loi}[u_{i+1}^\alpha, p_{i+1}^\alpha] = \text{vraie} . \end{cases} \quad (1)$$

Les forces extérieures  $F_{\text{ext}}$  et les effets dynamiques sont pris en compte par l'expression de la vitesse relative libre de tout contacts  $u_{\text{libre},i}^\alpha$  et l'opérateur de Delassus  $\mathbf{W}^{\alpha\beta} = \mathbf{H}_\alpha^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}_\beta$  apparaît alors naturellement. Plusieurs types de lois de contact peuvent être utilisées entre deux contacteurs. Classiquement, nous employons la condition de Signorini  $0 \leq u_{n,i+1} \perp p_{n,i+1} \geq 0$  sur la partie normale, associée à une loi de frottement de Coulomb sur la partie tangentielle. Malgré le caractère fortement dynamique du problème de broyage, nous considérons une restitution énergétique nulle au niveau du contact. Ce choix se justifie par des dissipations énergétiques de contact au travers des particules à broyer et du fluide interstitiel. Cette méthode est parfaitement adaptée aux problèmes d'interactions entre corps rigides. Le problème d'interactions fluide *vs.* particules est simplifié en un problème de détermination des actions fluides sur les particules. En effet, en première approximation, nous considérons un écoulement de Couette stationnaire pour le fluide, cf. Fig. 2, induisant des efforts d'inertie sur le milieu granulaire. Grâce à la méthode NSCD, la position d'un corps rigide  $j$  peut donc être déterminée en fonction, entre autre, des forces extérieures  $F_{\text{ext},j}$  appliquées sur ce corps, incluant des contributions hydrodynamiques et définies par l'équation 2, avec  $u_f$  le champ de vitesses du fluide,  $x_j$ ,  $u_j$ ,  $r_j$  et  $m_j$  la position, la vitesse, le rayon et la masse de la particule  $j$ ,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $C \simeq 0,5$  le coefficient de pénétration d'une sphère dans l'eau. Les écoulements en présence dans le broyeur sont caractérisés par un  $Re$  proche de 1000. Par conséquent, les effets dynamiques du fluide l'emportent sur les effets visqueux du fluide *a priori*. En effet, si l'on compare les efforts de traînée :  $T_\mu$  issue de la théorie de Stokes, pour des fluides visqueux à faible  $Re < 1$  ; et  $T_\Gamma$  issue de la théorie d'Euler, pour des fluides parfaits, on trouve dans notre cas,

$$\frac{T_\Gamma}{T_\mu} = \frac{C\rho r_{\text{moy}} \Delta u_{\text{moy}}}{6\mu} \simeq 1000 , \quad (3)$$

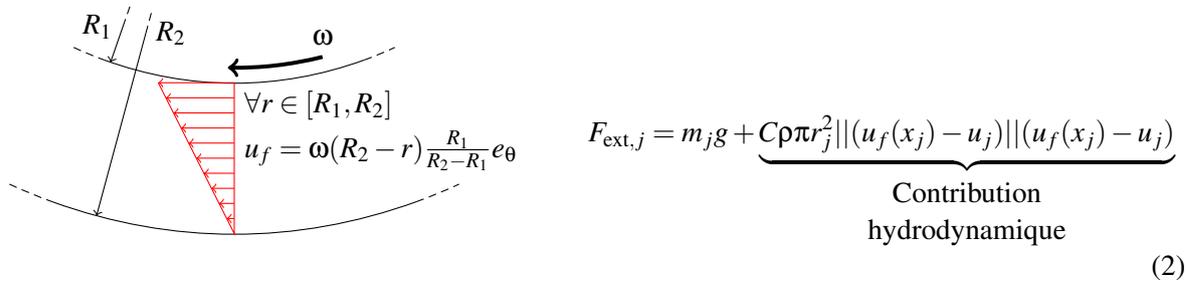


FIGURE 2 – Ecoulement de Couette cylindrique vu dans le plan  $(e_r, e_\theta)$ .

avec  $\mu$  la viscosité dynamique de l'eau. Il semble donc tout à fait raisonnable de privilégier la contribution hydrodynamique.

## 2.2 Le modèle du broyeur

L'étude numérique de ce problème se base sur un broyeur industriel disponible au laboratoire. Son enceinte cylindrique  $\varnothing 97$  mm peut contenir deux granulométries de billes en céramiques de zircon, soit de diamètres proches de  $\varnothing 3$  mm, soit de diamètres proches de  $\varnothing 1$  mm. Le granulat broyant est mis en rotation par un arbre agitateur  $\varnothing 57,5$  mm à doigts tournant à  $3000 \text{ tr.min}^{-1}$  et, suivant les conditions d'utilisation, à un mouvement fluide ou non. Six doigts d'agitation  $\varnothing 8$  mm sont réparties sur la circonférence de l'arbre moteur et se répètent tout les 19 mm. Par considérations de symétrie, le do-

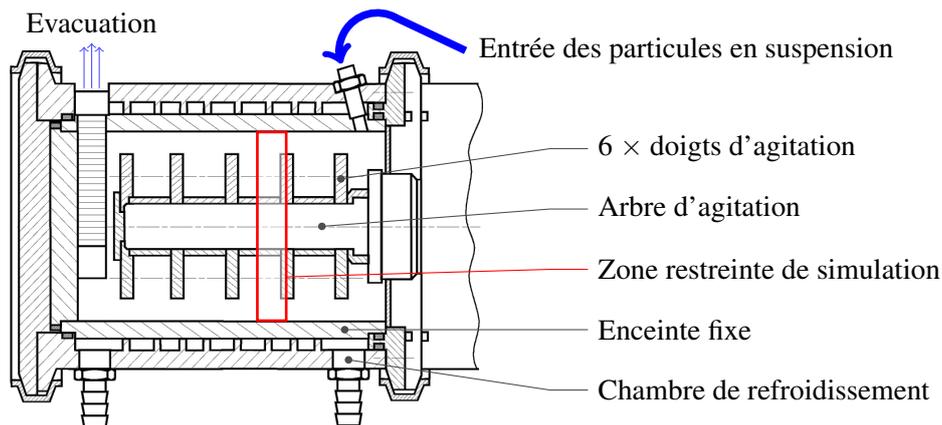


FIGURE 3 – Détails sur le broyeur à bille et délimitation de la zone de simulation.

main simulé est borné entre le plan médian des doigts et le plan médian inter-doigts. Les conditions limites axiales de cette "tranche" sont réalisées par des plans fictifs qui, par des conditions de contact sans frottements, empêchent la sortie des particules dans l'axe du broyeur, mais n'influencent pas leur déplacements radiaux. Des conditions périodiques pourraient être utilisées mais obligerait une simulation d'une tranche granulaire plus large. Les deux populations de billes ont été testées et conduisent à des simulations respectivement de 1400 et 38500 corps. Néanmoins, la puissance de calcul disponible au laboratoire, ne nous permet pas de finaliser la simulation des billes de  $\varnothing 1$  mm dans des temps raisonnables. Nous réduirons donc le cadre de cette étude aux billes de  $\varnothing 3$  mm. A la différence des broyeurs à boulets, les broyeurs à billes fonctionnent avec des taux de remplissage compris entre 80% et 90%. De plus la spécificité granulaire de ce problème nous impose, pour la simulation, les étapes suivantes,

1. **Construction d'un échantillon granulaire** – celui-ci doit être compris dans les limites de la zone restreinte de simulation.
2. **Dépôt sous gravité** – l'échantillon est laissé sous gravité dans le seul but de vérifier le taux de remplissage.
3. **Simulation du broyage** – Mise en rotation de l'arbre agitateur et simulation du broyage.

La construction de l'échantillon peut être envisagée par deux méthodes. La pluviation sous gravité nous permettrait de remplir un contenant grain après grain en disposant au préalable d'une granulométrie.

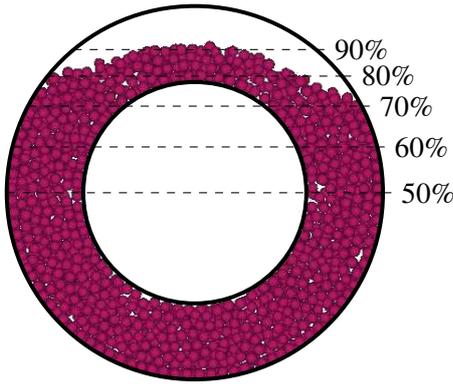


FIGURE 4 – Remplissage à 85%.

Cette méthode permettrait d'obtenir directement l'échantillon déposé sous gravité et de contrôler son taux de remplissage. Néanmoins, elle reste très couteuse en temps de calcul. La méthode utilisée dans cette étude est le dépôt géométrique de sphères [5]. Pour s'assurer un remplissage acceptable, le volume de dépôt est artificiellement augmenté en diminuant l'arbre agitateur. Les particules sont, dans un premier temps, déposées *via* une méthode géométrique, puis, dans un second temps, plongées dans un champ gravitationnel centrifuge. Une fois les billes déposées sur la paroi extérieure du broyeur, l'arbre retrouve ses dimensions initiales et le granulat est soumis à un champ de pesanteur. Cette procédure nous permet, en des temps raisonnables, d'obtenir des échantillons granulaires, comme celui représenté sur la Fig. 4, remplissant jusqu'à 85% le volume du broyeur. Une fois le remplissage validé, l'arbre

agitateur est astreint à tourner à  $3000 \text{ tr.min}^{-1}$  *via* une montée de type échelon. Les lois de contact entre les différents éléments correspondent à des conditions de Signorini-Coulomb avec un coefficient de frottement de 0,1, à l'exception des contacts avec les plans fictifs. La simulation du broyage se fait sur 50000 pas de temps de  $2 \mu\text{s}$ , ce qui correspond à 5 rotations de l'arbre agitateur. Les résultats observés montrent que la première moitié de cette simulation rend compte d'une phase transitoire dépendant de conditions de mise en mouvement non réalistes. En revanche, la seconde moitié de la simulation concerne une phase stabilisée et témoigne des mécanismes élémentaires mis en jeux lors du procédé de broyage. Afin de vérifier les effets du champ de vitesse fluide, chaque simulation de "broyage avec fluide" est systématiquement comparée à une simulation de broyage du même type, mais ne comportant pas de contribution fluide. On l'appellera "broyage à sec".

### 3 Analyse du broyeur à billes

#### 3.1 Analyse cinématique

Suite à la simulation d'un broyage avec fluide et d'un autre à sec, nous présentons sur la Fig. 5 la distribution de vitesse et d'effort au cours d'un pas de temps de la phase stabilisée. Lors du broyage à sec, le granulat broyant a tendance à se comporter comme un solide rigide tournant autour de l'axe du broyeur. Les frottements inter-particulaire et ceux contre l'enceinte fixe, limitent la rotation de l'ensemble granulaire par rapport à celle de l'arbre d'agitation. Néanmoins, dans les zones non influencées par les doigts d'agitation, les billes restent sur des empilements relativement stables. Il n'en est pas du tout de même pour le granulat présent dans le broyeur avec fluide. La présence du champ fluide, et en particulier le fait que celui-ci soit nul au niveau de l'enceinte fixe, freine considérablement les particules extérieures et favorise le glissement des couches annulaires. En revanche, pour certains pas de temps de la simulation, on observe la présence de configurations granulaires localement plus stables, *i.e* configurations de blocage. Ces structures, résistant mieux aux sollicitations, génèrent des chaînes de forces importantes comme le montre la Fig. 5. Celles-ci sont favorisées par la présence du fluide qui réduit la mobilité des billes sur l'enceinte extérieures. Afin de comparer la cinétique d'ensemble du granulat, la vitesse de rotation moyenne  $\Omega_{e_1}$ , autour de l'axe de l'arbre agitateur  $e_1$ , est calculée *post mortem* pour chaque pas de temps sauvegardé. Elle est définie telle que,

$$\Omega_{e_1} = \frac{1}{n_s} \sum_j \chi_j \omega_{e_1}^j, \quad \omega_{e_1}^j = \frac{u_3^j x_3^j - u_2^j x_2^j}{2x_2^j x_3^j}, \quad (4)$$

avec  $\omega_{e_1}^j$  la vitesse de rotation d'une bille  $j$  autour de l'axe  $e_1$  et  $\chi_j$  une pondération dépendant de la taille des billes. Dans notre cas, la granulométrie des éléments étant quasi-constante, nous considérerons que  $\chi_j = 1$ . L'évolution de cette vitesse de rotation au cours de l'essai est donnée sur la Fig. 6 pour trois simulations différentes : un broyage avec fluide, un broyage à sec et un broyage à sec avec des billes deux

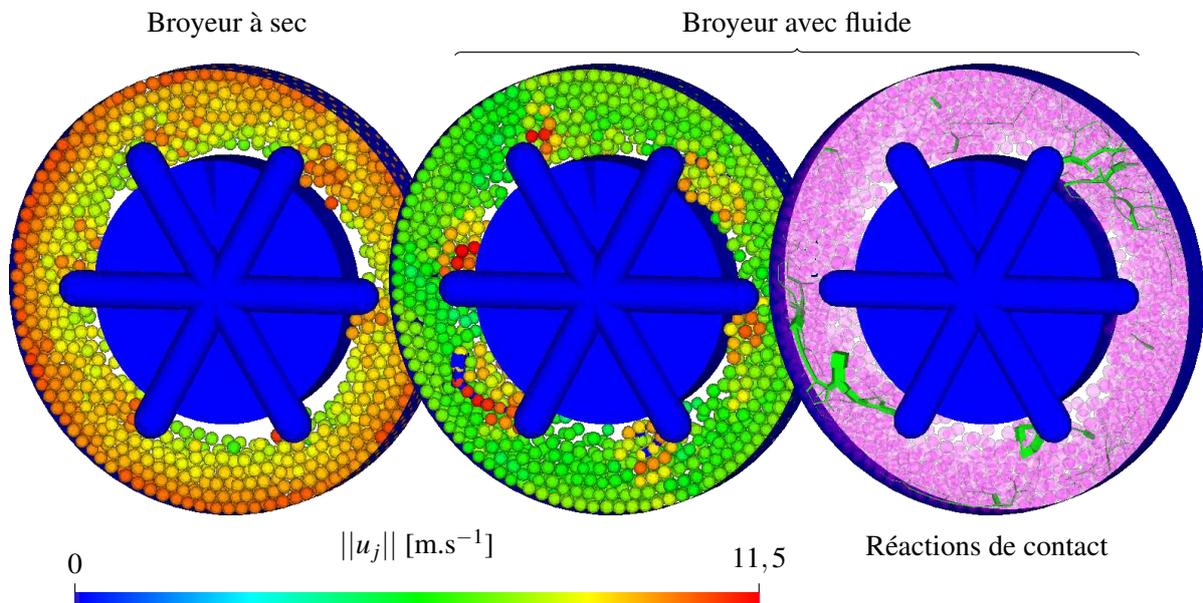


FIGURE 5 – Champs de vitesses et réseau des efforts de contact issus de simulations de broyage pour des billes de  $\varnothing 3$  mm, avec  $\|u_j\|$  la norme de la vitesse d'un élément  $j$ .

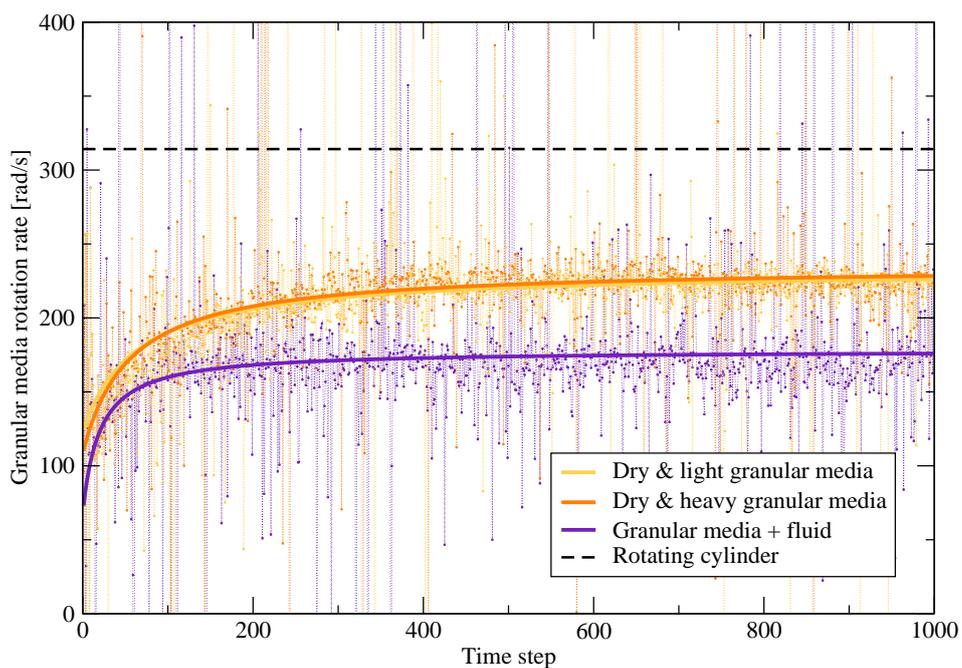


FIGURE 6 – Evolution de la vitesse de rotation équivalente du milieu granulaire sur 1000 pas de temps sauvegardés et pour différentes simulations.

fois moins denses. Cette dernière simulation ayant pour but de vérifier la sensibilité du comportement cinétique global du granulat à la masse volumique des éléments le composant. Les données brutes étant fortement bruitées par la nature discrète et dynamique de ce problème, mais néanmoins convergentes autour de valeurs constantes, nous les lisserez par une courbe du type  $\Omega_{e_1} = c_0 + \frac{c_1}{T+c_2}$ , avec  $T$  le pas de temps sauvegardé et  $c_i$  des coefficients de recalage. La courbe du broyage avec fluide a tendance à se

stabiliser plus tôt pour une valeur inférieure à celle du broyage à sec, rendant compte de l'effet frein du champ fluide sur le granulat. Dans tous les cas de figures, le régime sera considéré comme stable dans la seconde moitié de l'essai. En revanche, pour le broyeur industriel étudié, il n'y a pas de différences notables dans le comportement cinétique de granulats à densités différentes.

### 3.2 Analyse des efforts de contact

Pour établir une loi descriptive de l'usure des billes, il est primordial de caractériser les efforts de contact dans le régime stationnaire de broyage, de part leur nature, leur intensité, ainsi que leur fréquence. Considérant la stabilité cinématique dans la seconde moitié des simulations mises en œuvre, les investigations sur les efforts ne concerneront que cette phase et seront moyennées sur cette période afin de lisser les effets discrets. Ainsi, dans le Tab. 1, sont donnés, entre autre, l'effort maximal que rencontre

	$N_{\max}$	$N_{\text{moy}}$	$T_{\max}$	$T_{\text{moy}}$	$\mathcal{P}$	$n_c$
Broyage à sec	73,77	1,18	6,56	0,09	11,51	2307
Broyage avec fluide	98	1,5	8,99	0,12	9,39	1694

TABLE 1 – Composantes normales et tangentielles des efforts de contact [N], densité volumique de puissance [ $\text{mW}\cdot\text{mm}^{-3}$ ] et nombre de contacts, moyennés sur l'essai dans sa partie stationnaire.

une particule au cours du broyage et l'effort moyen associés à l'ensemble du granulat. Que l'on compare leurs composantes normale ou tangentielle, on s'aperçoit que le niveau d'effort atteint est le plus important dans la simulation avec fluide. Ces valeurs rejoignent les observations de la Sect. 3.1 associant une diminution cinématique d'ensemble à une augmentation des efforts de contact. Notons que ces efforts dans le broyeur avec fluide se répartissent sur un nombre de contact ayant chuté de près de 27% par rapport à son homologue sans fluide. Dans un système aussi dynamique, les impacts répétés sur les billes favorisent l'usure de celles-ci. Nous proposons d'étudier, pour différentes valeurs d'efforts critique  $F_c$ , la répartition des fréquences d'impact sur les billes pour des efforts supérieurs à  $F_c$ . La Fig. 7 permet

		$F_c = 2 \text{ N}$	$F_c = 4 \text{ N}$	$F_c = 6 \text{ N}$	$F_c = 8 \text{ N}$	$F_c = 10 \text{ N}$
Fréquence de contact [MHz]	Broyage à sec	4,41	1,98	1,18	0,8	0,58
	Broyage avec fluide	3,89	2,17	1,47	1,09	0,84

TABLE 2 – Fréquence de contact total sur la tranche du broyeur simulée.

de comparer la distribution de ces fréquences sur les billes du broyeur dans deux cas d'utilisation. Les fréquences d'impact de l'ensemble du granulat sont reportés dans le Tab. 2. Les impacts faibles se développent plus fréquemment dans le broyeur à sec que dans le broyeur avec fluide. En revanche, lorsque l'on considère des impacts forts, leur fréquence est majorée dans la simulation avec fluide. Il est difficile de parler de structure dans une simulation aussi dynamique, néanmoins, il s'opère une ségrégation des billes qui, en fonction de leur localisation, seront plus sensible aux impacts. Ceci conduit en l'identification d'une population de corps broyants avec un risque d'usure accru. Pour continuer de mettre en évidence ce phénomène, nous proposons de regarder la répartition de la densité de puissance dissipée par frottement dans le broyeur à billes. Le frottement étant un mécanisme majeur du broyage, cette cartographie permet également de localiser les zones efficaces. La densité de puissance est calculée sur 12 couronnes du broyeur et représentée sur la Fig. 8. Pour l'ensemble du broyeur, la puissance de frottement est la plus forte pour le broyage à sec, cf. Tab. 1. Ceci s'explique par des vitesses relatives de contact plus grandes et en particulier au niveau de l'enceinte fixe. Le broyeur avec fluide garde toujours un pic de puissance dissipée au niveau de la couronne extérieure, mais on observe également une activité non négligeable autours de la terminaison des doigts d'agitation. En l'absence d'éléments géométriques sur l'enceinte fixe permettant de déstabiliser l'arrangement granulaire de la couronne extérieure, les billes

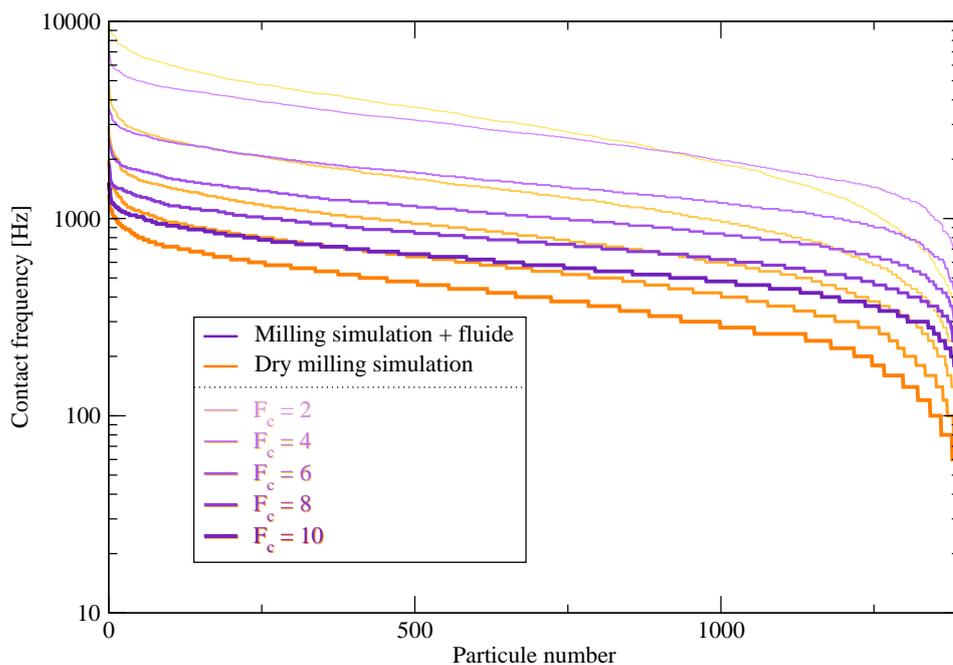


FIGURE 7 – Fréquence d’impact [Hz] dépassant un seuil critique  $F_c$  vu pour chaque particule, de la plus fréquemment impactée à la moins fréquemment impactée.

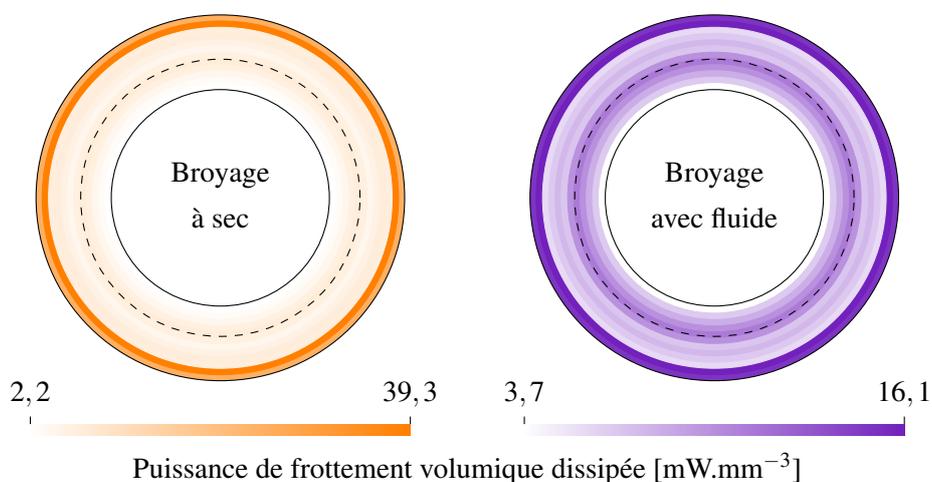


FIGURE 8 – Répartition de la densité de puissance de frottement volumique  $[mW.mm^{-3}]$  du milieu granulaire pour différentes simulations. La zone d’influence des doigts agitateurs est représentée par les traits interrompus.

chassées par l’effet centrifuge se retrouvent piégées dans une zone sollicitée fréquemment par des efforts importants, contribuant ainsi à leur usure prématurée.

## 4 Conclusions & perspectives

Dans le cadre de l’étude de l’usure des corps broyants dans les broyeurs à billes à haute énergie, ces travaux ont permis de mettre en œuvre des simulations au travers d’un modèle discret intégrant des contributions fluide hydrodynamiques. Des comparaisons ont été établies afin d’identifier les effets

visibles d'une contribution fluide simple dans ces structures. Cette approche numérique inédite vient compléter les connaissances des broyeurs à billes par des investigations fines sur la cinématique et les efforts de contact. Il a été montré que le broyeur industriel simulé engendrait des zones préférentielles de frottement pouvant conduire à une usure prématurée. Une campagne de simulation est actuellement en cours, en particulier avec un granulats plus fin, afin de compléter cette étude. Dans le but de simuler des cinétiques de billes plus réalistes, d'identifier les puissances de broyages et de localiser leur zone d'influence, des collaborations sont en cours pour affiner le champ de vitesse fluide en prenant en compte les zones tourbillonnaires à la sortie des doigts d'agitation. L'effet fluide lors du rapprochement entre les billes, qui ne peut être pris en compte par une condition de Signorini, modifie également le comportement de l'ensemble. Ce phénomène nécessitera l'intégration à ce modèle de nouvelles lois de contact. Les différentes géométries des arbres d'agitation sont également à l'étude pour optimiser le procédé.

## Références

- [1] L. Blecher, J. Schwedes. *Energy distribution and particle trajectories in a grinding chamber of a stirred ball mill*, Int. J. Miner. Process., Vol. 44-45, 617-627, 1996.
- [2] B.K. Cook, D.R. Noble, J.R. Williams. *A direct simulation method for particle-fluid system*, Engineering Computations, Vol. 21, 151-168, 2004.
- [3] R. Gers, E. Climent, D. Legendre, D. Anne-Archard, C. Frances. *Numerical approach of grinding process in a stirred media mill*, PARTEC, Nuremberg, 27-29 mars 2007.
- [4] M. Jean. *The non smooth contact dynamics method*, Comp. Meth. App. Mech. Eng., Vol. 177S, 235-257, 1999.
- [5] R. Laniel, P. Alart, S. Pagano. *Discrete element investigations of wire-reinforced geomaterial in a three-dimensional modeling*, Computational Mechanics, Vol. 42, 67-76, 2008.
- [6] J.-J. Moreau. *Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular material*, Eur. J. Mech. A Solids, Vol. 13, 93-114, 1994.
- [7] H.-H. Stender, A. Kwade, J. Schwedes. *New results of grinding media wear analysis in stirred media mills under changing operation conditions*, PARTEC, Nuremberg, 27-29 mars 2001.
- [8] H.-H. Stender, A. Kwade, J. Schwedes. *Stress energy distribution in different stirred media mill geometries*, Int. J. Miner. Process., Vol. 74S, 103-117, 2004.