



# **Super-éléments de plaque perforée pour la modélisation de l'assemblage riveté en dynamique rapide**

Nicolas Leconte, Bertrand Langrand, Eric Markiewicz

## **► To cite this version:**

Nicolas Leconte, Bertrand Langrand, Eric Markiewicz. Super-éléments de plaque perforée pour la modélisation de l'assemblage riveté en dynamique rapide. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. [hal-00592853](#)

**HAL Id: hal-00592853**

**<https://hal.science/hal-00592853v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Modélisation de l'assemblage riveté par super-éléments en dynamique rapide

N. Leconte<sup>1</sup>, B. Langrand<sup>2</sup>, E. Markiewicz<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LAMIH, Université de Valenciennes, France, [Nicolas.Leconte@univ-valenciennes.fr](mailto:Nicolas.Leconte@univ-valenciennes.fr)

<sup>2</sup> ONERA, The French Aerospace Lab, France, [Bertrand.Langrand@onera.fr](mailto:Bertrand.Langrand@onera.fr)

---

**Résumé** — L'évaluation de la survivabilité d'une structure aéronautique à une attaque terroriste (explosion) nécessite la modélisation de la structure complète et des assemblages rivetés afin d'évaluer la propagation de la rupture. Cependant, un tel modèle est trop coûteux par rapport aux moyens actuels. L'idée est alors de substituer les zones les plus coûteuses du maillage par des super-éléments capables de localiser (rupture). Si un super-élément de plaque perforée élastique existe, de nombreux développements sont nécessaires à la formulation de super-éléments adaptés à la dynamique rapide.

**Mots clefs** — Super-éléments, Assemblage riveté, Dynamique rapide.

---

## 1 Introduction

Lors de l'accident de Lockerbie, la détonation d'un engin explosif a d'abord perforé la peau de l'appareil par onde de souffle primaire et projection de débris [1]. La rupture a ensuite été amplifiée et propagée par une onde de souffle secondaire et la dépressurisation. En fait, il apparaît que la rupture s'est à la fois propagée le long de lignes de rivets et en tôle pleine jusqu'à la dislocation complète de l'appareil. Afin d'évaluer la survivabilité d'un avion à une explosion, il est donc nécessaire d'avoir recours à la modélisation de la structure complète (propagation de la rupture), et à une représentation précise de l'assemblage riveté (capture des champs pour le calcul du critère). Cependant, il n'est pas possible d'avoir à la fois recours à la modélisation de la structure complète et à la discrétisation fine des perforations, car les coûts de calcul deviennent prohibitifs. Il s'agit alors de remplacer les zones les plus coûteuses en éléments finis, i.e. les perforations, par des super-éléments économiques et précis.

Afin de construire de tels super-éléments, il s'agit d'employer des méthodes de formulation permettant de décrire des champs riches, où de forts gradients apparaissent. En fait, il faut disposer d'une certaine liberté dans le choix de l'interpolation des champs du super-élément, tout en assurant sa compatibilité avec des éléments finis standards voisins (conservés pour les zones à faibles gradients ne requérant pas de super-éléments). Les principes variationnels mixte et hybride de la Méthode des Éléments Finis permettent la formulation de super-éléments remplissant ces conditions. D'ailleurs, des éléments de plaque perforée de type hybride-Trefftz déplacement ont été formulés [10]. Ils reposent sur une solution analytique de plaque perforée et sur le principe hybride-Trefftz déplacement. Ce principe assure la compatibilité du super-élément formulé avec des éléments voisins polynomiaux basés sur l'énergie potentielle totale, et intègre les équations sur les frontières uniquement. Cependant, il a été montré que le super-élément hybride-Trefftz, dans sa formulation proposée par Piltner [10], ne permettait que les calculs élastiques linéaires [3, 4]. Il s'agit alors d'envisager les développements théoriques nécessaires à l'extension du domaine de validité de tels éléments à la dynamique rapide, afin de pouvoir discrétiser une structure aéronautique complète soumise à un chargement de type choc/impact [5].

Dans un premier temps, la formulation du super-élément hybride-Trefftz déplacement de plaque perforée est succinctement rappelée. Elle permet de mieux cerner les limitations de ce type d'élément fini et sert de support aux discussions sur la formulation d'un super-élément de plaque perforée adapté à la dynamique rapide. De plus, les résultats obtenus en élasticité linéaire avec les fonctions

d'interpolation de ce super-élément sont présentés et constituent un des points d'intérêt de cette formulation. Dans un deuxième temps, la formulation d'un super-élément de plaque perforée pour les calculs de dynamique rapide est abordée. Parmi les nombreux développements nécessaires, la capacité des fonctions d'interpolations à représenter des champs de plaque perforée matériellement non-linéaires et l'intégration numérique du domaine de plaque perforée sont plus particulièrement évalués.

## 2 Eléments finis hybride-Trefftz déplacement

Dans cette partie, les caractéristiques théoriques et numériques d'un élément de plaque perforée de type hybride-Trefftz déplacement sont présentées. Ici, seuls les éléments indispensables à la compréhension des développements nécessaires à la formulation d'un élément de plaque perforée adapté à la dynamique rapide sont présentés. La formulation complète du super-élément élastique est présentée dans les références [6, 7], alors que des présentations synthétiques peuvent être trouvées dans la référence [8] pour les fonctions d'interpolation, et dans la référence [10] pour le super-élément. Par ailleurs, une étude numérique complète des caractéristiques du super-élément (précision, temps de calcul) peut être trouvée dans la référence [3]. Pour les cas étudiés, les temps de calcul se sont révélés être 300 fois inférieurs à ceux des maillages fins, pour des écarts observés de l'ordre de 1%.

### 2.1 Formulation

Il s'agit tout d'abord de s'intéresser à la formulation théorique de ce type d'élément, afin de discuter ultérieurement d'une formulation adaptée à la dynamique rapide.

#### 2.1.1 Fonctions d'interpolation

La formulation des fonctions d'interpolation du super-élément perforé s'effectue à l'aide du formalisme de Kolosov-Muskhelishvili. Seules les équations de Kolosov-Muskhelishvili, valides en élasticité plane, et les champs de déplacement et de contraintes obtenus sont ici rappelés.

Le point de départ de la formulation des fonctions d'interpolation est l'écriture des équations de Kolosov-Muskhelishvili :

$$\begin{cases} 2\mu(u + iv) = k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \\ \sigma_{xx} + i\tau_{xy} = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - z\overline{\Phi''(z)} - \overline{\Psi'(z)} \\ \sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)} \\ k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} = 2\mu(\tilde{u} + i\tilde{v}) \quad \text{on } \Gamma_u \\ \Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = i \int (\tilde{T}_x + i\tilde{T}_y) ds \quad \text{on } \Gamma_t \end{cases} \quad (1)$$

Ici, le symbole  $( )'$  représente le différentiation complexe, la barre le nombre complexe conjugué,  $i$  représente le nombre imaginaire,  $z$  est une variable complexe,  $k$  est la constante de Muskhelishvili (en contraintes planes,  $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ ),  $\mu$  est le coefficient de Lamé,  $\Psi(z)$  et  $\Phi(z)$  sont les potentiels de Kolosov-Muskhelishvili,  $u$  et  $v$  sont les composantes du champ des déplacements,  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$  sont les composantes du champ des contraintes,  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{T}_x, \tilde{T}_y$  sont des conditions aux limites en déplacement et en effort respectivement imposées sur les frontières  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_t$ .

Les expressions obtenues pour le champ des déplacements et le champ des contraintes sont les suivantes :

$$2\mu u^h = \sum_{j=-N}^M \alpha_j \left[ (kR^j + R^{-j}) \cos j\theta - j(R^j - R^{j-2}) \cos(j-2)\theta \right] + \beta_j \left[ -(kR^j + R^{-j}) \sin j\theta + j(R^j - R^{j-2}) \sin(j-2)\theta \right] \quad (2)$$

$$2\mu v^h = \sum_{j=-N}^M \alpha_j \left[ (kR^j + R^{-j}) \sin j\theta + j(R^j - R^{j-2}) \sin(j-2)\theta \right] + \beta_j \left[ (kR^j + R^{-j}) \cos j\theta + j(R^j - R^{j-2}) \cos(j-2)\theta \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{xx}^h = \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j \left[ 2R^{j-1} \cos(j-1)\theta - R^{-j-1} \cos(j+1)\theta - [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta \right] + \beta_j j \left[ -2R^{j-1} \sin(j-1)\theta + R^{-j-1} \sin(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta \right] \quad (4)$$

$$\sigma_{yy}^h = \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j \left[ 2R^{j-1} \cos(j-1)\theta + R^{-j-1} \cos(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta \right] + \beta_j j \left[ -2R^{j-1} \sin(j-1)\theta - R^{-j-1} \sin(j+1)\theta - [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta \right] \quad (5)$$

$$\tau_{xy}^h = \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j \left[ -R^{-j-1} \sin(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta \right] + \beta_j j \left[ -R^{-j-1} \cos(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta \right] \quad (6)$$

Ces champs peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\mu} N_{ij} c_j \quad (7)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ \sigma_{yy} n_x + \tau_{xy} n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_x \\ \mathbf{T}_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{r_0} P_{ij} c_j \quad (8)$$

On remarquera en particulier la dépendance qui existe entre les expressions (7) et (8) : les champs des déplacements et des contraintes sont fonction du même vecteur d'inconnues  $c_j$ . Cette dépendance provient des équations de Kolosov-Muskhelishvili, employées pour formuler les fonctions d'interpolation. En, effet le système (1) reflète la transcription sous forme complexe des équations de petites déformations et de la loi de Hooke [7]. Cette dépendance indique que lorsque le champ des déplacements est connu, le champ des déformations est déduit par l'application des relations (transcrites sous forme complexe) de petites déformations et de comportement élastique linéaire.

### 2.1.2 Principe variationnel

La construction du principe variationnel Hybrid-Trefftz déplacement sur lequel repose l'élément de plaque perforée dérive du principe de l'énergie potentielle totale :

$$\Pi_{TPE}[u_i] = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}'' \varepsilon_{ij}'' dV - \int_V b_i u_i dV - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS \quad (9)$$

Où  $\varepsilon_{ij}''$  et  $\sigma_{ij}''$  représentent les tenseurs des contraintes et des déformations,  $b_i$  les efforts volumiques,  $u_i$  le champ des déplacements,  $\hat{T}_i$  la condition aux limites en efforts,  $V$  le volume du domaine considéré et  $S$  la frontière du domaine.

Appliquons le théorème de la divergence à l'équation (9) :

$$\begin{aligned} \Pi[u_i] &= \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS - \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij,j}'' + b_i) u_i dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V b_i u_i dV - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS \end{aligned} \quad (10)$$

Or, si les fonctions d'interpolation respectent de manière forte l'équation d'équilibre ( $\sigma_{ij,j}'' + b_i = 0$ ), et que l'on néglige les efforts volumiques ( $b_i = 0$ ), le principe variationnel devient :

$$\Pi[u_i] = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS \quad (11)$$

Un principe hybride-Trefftz déplacement, qui force la compatibilité des déplacements d'un super-élément avec celui de ses voisins, peut alors être identifié lorsqu'une potentielle d'interface est ajoutée :

$$\Pi_H[u_i] = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS + \int_{Su+Si} (\tilde{u}_i - u_i) T_i dS \quad (12)$$

Où  $\tilde{u}_i = \tilde{N}_{ij} q_j$ , avec  $q_j$  le vecteur des déplacements nodaux, est par exemple le champ des déplacements d'éléments finis polynomiaux quadratiques voisins [3].

Le principe (12) peut encore être modifié de façon à ne plus faire apparaître que des intégrations sur la frontière inter-élément du super-élément (il s'agit d'une intégration 1D). La matrice de rigidité est finalement obtenue en associant les fonctions d'interpolation (7-8) qui respectent l'équation d'équilibre, au principe (12), puis en prenant les conditions de stationnarité par rapport à  $c$  et à  $q$ .

## 2.2 Résultats numériques

Dans cette partie, les caractéristiques des fonctions d'interpolation élastiques (2-6) tronquées à l'ordre  $N=M=4$ , qui correspondent aux fonctions d'interpolation d'un élément fini hybride-Trefftz déplacement perforé élastique à 8 nœuds, sont présentées. Leur capacité à interpoler des champs linéaires élastiques de plaque perforée soumise à un chargement quelconque a été vérifiée. Pour cela, des calculs éléments finis fins sont réalisés afin d'obtenir des champs de plaque perforée de référence. Ces champs de référence sont ensuite réinterpolés (à partir de 8 points disposés sur la frontière externe de la plaque perforée de la FIG. 1) à l'aide des champs calculés précédemment (2-6), afin d'évaluer la qualité de l'interpolation. Les distributions de tous les cas de chargement envisagés sont représentatives et précises, comme par exemple dans le cas de la traction biaxiale (FIG. 1). En particulier, on remarquera que pour une contrainte lointaine  $\sigma_\infty$  de 176.9MPa imposée sur le bord du domaine (endroit où sont situés les points d'interpolation), la contrainte obtenue en bord de perforation est de 353MPa conformément à ce qui était attendu en élasticité [9] ( $k_t = 2$ ).

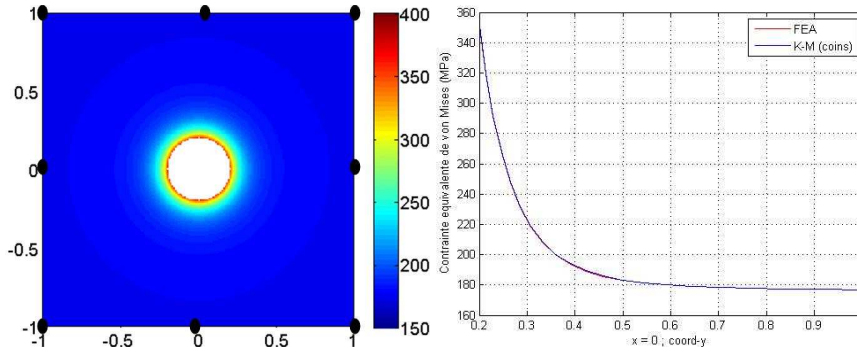


FIG. 1 – Réinterpolation d'un champ de référence élastique de plaque perforée soumise à de la traction biaxiale à l'aide des champs (2-6). a- Contrainte de von Mises. b- Contrainte en  $x=0$ .

### 2.3 Domaine de validité

La solution analytique de plaque perforée formulée au §2.1.1 respecte l'équation d'équilibre et la loi de Hooke, car elle est dérivée des équations de Kolosov-Muskhelishvili. Les fonctions d'interpolation basées sur cette solution analytique respectent donc intrinsèquement ces deux équations à la fois. En particulier, le fait qu'elles respectent l'équation d'équilibre permet la simplification du principe variationnel de (10) à (11), ce qui permet de ne réaliser l'intégration numérique que sur les frontières du super-élément (intégration de Gauss 1D). Cependant, comme elles respectent également la loi de Hooke, le super-élément perforé doit satisfaire de manière forte le comportement élastique linéaire sur son domaine intérieur, et est donc restreint aux calculs élastiques linéaires. En fait, le domaine d'application des éléments de type hybride-Trefftz est le même que celui de la solution analytique ayant permis la formulation de leurs fonctions d'interpolation [2]. Il s'agit alors d'envisager l'extension du super-élément de plaque perforée à la dynamique rapide.

## 3 Élément fini hybride déplacement

La seule façon connue de formuler des fonctions d'interpolation prenant intrinsèquement en compte la présence d'une perforation est d'utiliser le formalisme de Kolosov-Muskhelishvili. Nous sommes donc contraints d'utiliser ces fonctions d'interpolation pour formuler un super élément de plaque perforée non limité à l'élasticité. Cependant les fonctions d'interpolation formulées à partir de ce formalisme respectent la loi de Hooke. Il s'agit donc de ne pas forcer le super-élément à satisfaire le comportement élastique linéaire des fonctions d'interpolation à l'intérieur de son domaine. Il ne faut donc pas employer l'hypothèse indiquant que le comportement du super-élément est le même que celui de ses fonctions d'interpolation à l'intérieur de son domaine (passage de (10) à (11)). Il s'agit donc tout d'abord de généraliser le principe hybride-Trefftz déplacement.

### 3.1 Généralisation du principe variationnel

Si l'on se prive de l'hypothèse  $\sigma_{ij,j}^u + b_i = 0$ , et qu'il n'y a donc plus aucune condition spéciale requise pour les fonctions d'interpolation, le principe variationnel est simplement le principe de l'énergie potentielle totale (§2.1.2) :

$$\Pi_{TPE}[u_i] = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dV - \int_V b_i u_i dV - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS \quad (14)$$

Cependant, la théorie des éléments finis réclame la continuité des déplacements à l'interface entre le super-élément fini et les éléments finis standards polynomiaux voisins. Une potentielle d'interface

qui assure cette continuité est donc ajoutée à (14). Le principe hybride déplacement apparaît alors :

$$\begin{aligned} \Pi[u_i] = & \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dV - \int_V b_i u_i dV \\ & - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS + \int_{S_{ut+Si}} (\tilde{u}_i - u_i) T_i dS \end{aligned} \quad (15)$$

Le principe variationnel du super-élément perforé est ainsi généralisé, et le choix des fonctions d'interpolation est maintenant libre. Il n'est plus nécessaire que les fonctions d'interpolation soient formulées à partir de la solution analytique du problème considéré, alors que c'était le cas pour le principe hybride-Trefftz déplacement (§2.1.1). Cependant, il apparaît que le principe hybride déplacement (15) nécessite une intégration d'intérieur de domaine sur  $V$ , alors que le principe hybride-Trefftz déplacement (12) ne nécessitait que des intégrations de frontière. Il s'agit donc alors de développer une intégration numérique sur un domaine de plaque perforée.

### 3.2 Intégration numérique de plaque perforée

Pour réaliser cette intégration numérique, il est proposé, par analogie avec la XFEM, de découper le domaine comportant une discontinuité à l'aide de triangles (pour la XFEM, de part et d'autre de la fissure, et dans notre cas autour de la perforation). Il s'agit d'évaluer l'intégrale sur le domaine de plaque perforée à l'aide d'une somme d'intégrations de type 2D Gauss triangle d'ordre 1, et on insiste sur le fait que la décomposition de cette intégrale n'ajoute aucun degré de liberté au super-élément.

Par exemple, l'intégrale relative à l'énergie interne sur le domaine de plaque perforée du principe (15) peut être décomposée en triangles de la manière suivante :

$$\int_V \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dV = e \cdot \int_S \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dS = e \cdot \sum_{triangle} \int_{S_{triangle}} \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dS \quad (16)$$

L'intégrale sur chaque triangle de (16) est évaluée à l'aide d'une intégration numérique 2D de type Gauss triangle d'ordre 1. Pour cette intégration numérique, on a, pour chaque triangle considéré [11] :

$$\int_{S_{triangle}} \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dS = 1 \cdot \sigma_{ij}^u(\xi, \eta) \varepsilon_{ij}^u(\xi, \eta) \cdot S_{triangle}$$

Où 1 est le poids de l'intégration de Gauss triangle d'ordre 1, et  $(\xi, \eta)$  sont les coordonnées du barycentre du triangle considéré.

Il s'agit alors de déterminer le nombre de domaines triangulaires intervenant dans la décomposition et leur disposition, de manière à avoir un rapport précision / temps de calcul intéressant. On considère alors un champ de contrainte de référence (par exemple analytique) de plaque perforée, et deux discrétisations pour essayer de le reconstruire : une discrétisation effectuée à l'aide du super-élément de plaque perforée (dont l'intégrale de domaine est sous-découpée en triangles) et une discrétisation fine effectuée à l'aide d'éléments finis triangles polynomiaux d'ordre 1 (chaque EF est intégré à l'aide d'une intégration de Gauss triangle d'ordre 1). Pour chacune de ces deux discrétisations, les découpes en triangle sont définies comme étant les mêmes. Si les résultats fournis par la discrétisation fine (EF triangles) sont suffisamment proches de la référence, cela indique que la découpe en triangles, et donc que l'intégration, a été réalisée avec une erreur suffisamment faible pour reconstruire le champ de référence. L'hypothèse est alors la suivante : si cette découpe fournit une erreur suffisamment faible pour l'intégration de la discrétisation fine, alors elle fournirait également une erreur suffisamment faible lorsqu'elle est employée pour décomposer l'intégrale du super-élément perforé, car le champ de référence à reconstruire est le même. Cette décomposition permettrait donc au super-élément perforé de reconstruire le champ de référence avec suffisamment de précision.

### 3.3 Interpolation de champs plastiques

Les fonctions d'interpolation (2-6) sont conservées pour leur capacité à interpoler des champs en présence d'une perforation (§2.2). Cependant, la relation de dépendance entre les champs des déplacements et des contraintes reflète en particulier l'emploi de la loi de Hooke sous forme complexe (§2.1.1). Une telle dépendance n'est pas souhaitable lorsqu'il est envisagé de formuler un super-élément perforé général, c'est-à-dire ne s'appliquant pas uniquement aux calculs élastiques linéaires (§2.3). Il s'agit alors de généraliser les fonctions d'interpolations (2-6), en indiquant qu'il n'existe pas de relation particulière entre le champ des déplacements et le champ des contraintes :  $\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu} N_{ij} c_j^1$  et

$$\mathbf{T} = \frac{1}{r_0} P_{ij} c_j^2, \text{ avec } c_j^1 \neq c_j^2 \text{ dans le cas général.}$$

Cependant, une difficulté subsiste. En effet, le champ des déplacements et le champ des contraintes sont respectivement bâtis pour interpoler des champs de déplacement élastiques et de contrainte élastiques. Ces champs, *interpolés indépendamment*, sont-ils respectivement capables d'interpoler des champs de déplacement plastiques et des champs de contrainte plastiques ?

Des éléments de réponse à cette interrogation sont les suivants. Les fonctions d'interpolation (2-6), tronquées à l'ordre  $N=M=4$ , sont très riches (puissance, fractions, fonctions trigonométriques, nombre de termes...), et il est donc supposé qu'elles permettraient d'interpoler des champs plastiques. Encore faut-il que les données fournies soient suffisantes pour interpoler les champs de manière précise (nombre de points d'interpolation). En effet, en élasticité, si l'on applique une contrainte lointaine  $\sigma_\infty$  de 1 en traction biaxiale, la contrainte  $\sigma$  en bord de perforation est de 2 ( $k_t = 2$ , §2.2.1). Or, en plasticité le coefficient de concentration de contraintes diminue. Par ailleurs, le champ (4-6) est bâti pour l'élasticité, et le super-élément perforé ne capte (dans sa version originelle) que les informations lointaines (le super-élément perforé ne possède que des nœuds sur sa frontière interne, et en particulier, il n'y a aucun nœud sur la perforation). Il est donc probable que le champ des contraintes (4-6), si seules des informations lointaines lui sont fournies, ait tendance à reproduire un  $k_t$  de 2 en bord de perforation, ce qui ne correspond pas au  $k_t$  en bord de perforation d'une plaque perforée plastique. Il est donc pressenti que des points d'interpolation supplémentaires (en pratique, des nœuds pour le super-élément) seront nécessaires, en particulier en bord de perforation, pour que les champs (2-6) puissent représenter des champs plastiques. Il s'agit alors d'étudier numériquement la capacité des fonctions d'interpolation (2-6) d'ordre  $N=M=4$  à interpoler indépendamment des champs plastiques, en fonction du nombre (et de la disposition) des points d'interpolation.

Trois configurations ont été envisagées pour évaluer la capacité des fonctions d'interpolation à réinterpoler les champs de contrainte plastiques : « coins » (8 points disposés sur le bord extérieur de la plaque / configuration originelle), « coins perfo » (8 sur le bord extérieur et 8 au niveau de la perforation) et « coins perfo inter » (8 sur le bord extérieur, 8 au niveau de la perforation plus 3\*8 points dans le domaine intérieur de la plaque perforée). Comme cela était pressenti, la disposition « coin » surévalue le  $k_t$  en bord de perforation, car seules des informations sur le bord extérieur de la plaque sont fournies pour la reconstruction (FIG. 2). En revanche, contrairement à ce que l'on pouvait espérer, plus de points d'interpolation n'implique pas des résultats significativement meilleurs (dispositions « coins perfo » et « coins perfo inter ») : en effet, il n'a pas été possible d'approximer le champ plastique avec les fonctions d'interpolation, il n'a été possible que de translater de manière rigide la courbe élastique (FIG. 2). En effet, il apparaît que le  $k_t$  conserve une valeur de 2 ( $k_t$  élastique). Le fait qu'il ne soit pas possible d'approximer les champs plastiques à l'aide des fonctions d'interpolation (2-6) tronquées à l'ordre  $N=M=4$  pourrait trouver deux explications différentes : soit

elles ne sont pas assez riches pour interpoler les champs plastiques, soit leur caractère « élastique » est plus marqué que prévu (c'est-à-dire qu'il ne s'exprimerait pas uniquement au travers de relation entre les champs des contraintes et des déplacements). Dans le premier cas, il s'agirait d'augmenter l'ordre des fonctions d'interpolation ( $N=M=8$ ) de manière à disposer des termes permettant l'interpolation des champs plastiques. Dans le deuxième cas, il serait conclu que les fonctions d'interpolation (2-6) ne peuvent pas être utilisées en l'état pour l'interpolation de champs plastiques.

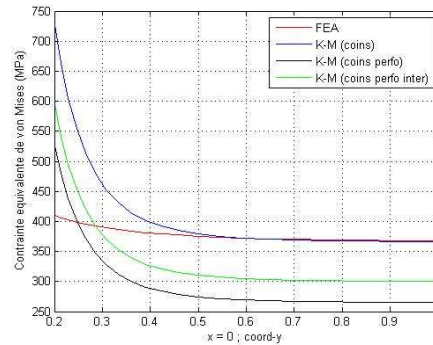


FIG. 2 – Réinterpolation d'un champ plastique de référence de plaque perforée soumise à de la traction biaxiale à l'aide des champs (2-6) modifiés. Contrainte de von Mises en  $x=0$ .

## 4 Conclusion

La formulation et les résultats numériques d'un élément hybride-Trefftz déplacement élastique de plaque perforée ont été rappelés. Ils justifient la démarche employée pour formuler un super élément de plaque perforée adapté à la dynamique rapide. Parmi les développements nécessaires à sa formulation, trois points ont été évoqués : la généralisation du principe variationnel, la généralisation des fonctions d'interpolation et leur capacité à interpoler des champs plastiques, et l'intégration numérique sur le domaine de plaque perforée. Parmi les points abordés, seule la capacité des fonctions d'interpolation à interpoler des champs plastiques semble poser problème. Dans la poursuite des travaux, il s'agira donc d'évaluer de manière systématique la capacité des fonctions d'interpolation à interpoler des champs plastiques, notamment en fonction de l'ordre employé.

## Références

- [1] M. Charles. *Report on the accident to Boeing 747-121, N739PA at Lockerbie, Dumfriesshire, Scotland on December 1988*, Air accident investigation branch, aircraft accident n°2/90 (EW/C1094), 1990.
- [2] E. Kita, N. Kamiya. *Trefftz method: an overview*, Advances in Engineering Software, Elsevier, 3-12, 1995.
- [3] N. Leconte, B. Langrand, E. Markiewicz. *On some features of a plate Hybrid-Trefftz displacement element containing a hole*, Finite Elements in Analysis and Design, Elsevier, 46 (10) 819-828, 2010.
- [4] N. Leconte, B. Langrand, E. Markiewicz. *Toward a hybrid Trefftz element with a hole for elasto-plasticity?*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier, 218 (1) 88-95, 2008.
- [5] N. Leconte, B. Langrand, E. Markiewicz. *Hybrid displacement formulations of finite elements including a hole*, Structural and Engineering Mechanics, Techno Press, 31 (4) 439-451, 2009.
- [6] N. Leconte. *Eléments finis hybride-Trefftz à trous internes*. Rapport ONERA n° RA 4/11377 DMSE, December 2006.
- [7] N. Leconte, F. Di Paola. *Etablissement et analyse de solutions analytiques de plaque perforée*. Rapport ONERA n° RA 5/12514 DMSE, 2007.
- [8] N.I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.
- [9] R.E. Peterson. *Stress concentration factors*, Wiley-interscience Publication, 1974.
- [10] R. Piltner. *Special finite elements with holes and internal cracks*. Int. J. Numer. Meth. Engng. 1985;21:1471-85.
- [11] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. *The finite element method* - 6th Edition, Elsevier, 2006.