



HAL
open science

Une méthode sans maillage pour la modélisation des interactions fluide-structure: Application à la rupture d'un réservoir sous impact

Fabien Caleyron, Alain Combescure, Vincent Faucher, Serguei Potapov

► **To cite this version:**

Fabien Caleyron, Alain Combescure, Vincent Faucher, Serguei Potapov. Une méthode sans maillage pour la modélisation des interactions fluide-structure: Application à la rupture d'un réservoir sous impact. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. hal-00592847

HAL Id: hal-00592847

<https://hal.science/hal-00592847>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une méthode sans maillage pour la modélisation des interactions fluide-structure: Application à la rupture d'un réservoir sous impact.

F. Caleyron^{1,2}, A. Combescure¹, V. Faucher², S. Potapov²

¹ Université de Lyon, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, fabien.caleyron@insa-lyon.fr, alain.combescure@insa-lyon.fr

² LaMSID UMR EDF-CNRS-CEA 2832, vincent.faucher@cea.fr, serguei.potapov@edf.fr

Résumé — La mise au point de méthodes numériques permettant de réaliser des simulations prédictives de structures minces en interaction avec un fluide est un enjeu industriel. Il s'agit notamment de prévoir la ruine éventuelle de la structure et le débit de fuite associé dans des situations extrêmes de type impact. La simulation de ce type de problème fait intervenir trois composantes essentielles : un modèle de structure mince incluant toutes les éventuelles non-linéarités jusqu'à la rupture, un modèle de fluide permettant de capter les phénomènes de sloshing et les projections et, enfin, la gestion de l'interaction fluide-structure dont la topologie peut varier fortement au cours du calcul.

Mots clés — SPH, coque, fluide, impact, rupture.

1 Introduction

Pour s'affranchir des contraintes liées à l'utilisation d'un maillage à connectivité fixe, les méthodes sans maillage proposent de discrétiser le problème sur un ensemble de noeuds dont les voisinages peuvent varier. Les méthodes se distinguent suivant l'utilisation d'une formulation forte ou faible et le type de fonctions de forme utilisé. On pourra se reporter à [13] pour une description complète du domaine. Les méthodes basées sur une formulation faible sont généralement plus précises et stables mais la nécessité de réaliser une intégration numérique peut compliquer la gestion des ruptures. C'est pourquoi les méthodes basées sur une formulation forte sont parfois préférées pour les calculs de perforation et de fragmentation.

Un modèle entièrement basé sur la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) est proposé. Elle repose sur une formulation forte et fut l'une des premières méthodes sans maillage proposées par la communauté [8]. Appliquée traditionnellement en mécanique des fluides, par exemple pour la simulation des écoulements à surface libre, la méthode a été plus récemment étendue à la mécanique des structures et plus particulièrement à la théorie des coques dans [11]. Les travaux présentés dans cet article constituent la suite de [11] et étendent la méthode à la modélisation de la rupture.

Dans une première partie, les bases de la méthode SPH sont rappelées ainsi que le modèle de fluide associé. La deuxième partie présente l'application de la méthode à la théorie des coques de Mindlin-Reissner ainsi que son extension à la modélisation de la rupture. La troisième partie introduit le traitement des interactions fluide-structure par la méthode des Pinballs [6]. Enfin, l'exemple de la perforation d'un réservoir rempli d'eau est traité.

2 Méthode SPH et modèle SPH fluide

2.1 Méthode SPH

La méthode SPH discrétise le domaine d'étude Ω à l'aide de N noeuds entre lesquels il n'existe pas de connectivité fixe. Chaque noeud représente une quantité de matière m_i choisie pour que la masse totale m de la structure soit décrite correctement $m = \sum m_i$. Les noeuds interagissent les uns avec les autres par l'intermédiaire de fonctions de forme qui permettent l'approximation d'un champ ou de son gradient. Ces fonctions sont à support compact : la fonction de forme d'un noeud i est non nulle à l'intérieur d'un domaine Ω_{V_i} défini comme le voisinage du noeud i et nulle ailleurs. La taille de ce voisinage, classiquement noté $2h$ dans la méthode SPH, est un paramètre fondamental de la méthode, voir figure 1(a). Les

fonctions de forme de la méthode SPH sont souvent des fonctions splines B3 définies par :

$$w_i(\vec{x}_j) = w_{ij} = C \begin{cases} \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{r_{ij}}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_{ij}}{h} \right)^3 \right] & \text{si } 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4} \left[2 - \frac{r_{ij}}{h} \right]^3 & \text{si } 1 < \frac{r_{ij}}{h} < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

avec $r_{ij} = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|$ et $C = 10/7\pi h^2$ en dimension 2. Il s'agit d'un facteur de normalisation qui permet d'assurer la condition de partition de l'unité. L'approximation d'un champs et de son gradient peuvent alors s'écrire :

$$f(\vec{x}_i) \approx \sum_{j \in \Omega_{V_i}} f_j w_{ij} V_j \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_i) \approx \sum_{j \in \Omega_{V_i}} f_j \vec{\nabla} w_{ij} V_j \quad (3)$$

où V_j est le volume de matière attaché au noeud j .

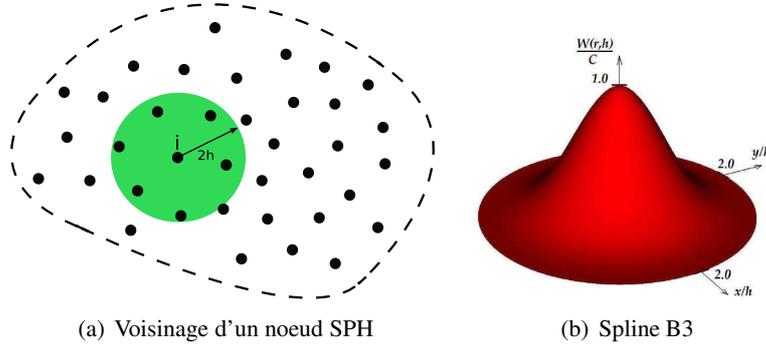


FIG. 1 – Définition du voisinage d'un noeud par la spline B3

2.2 Modèle SPH fluide

Le fluide est supposé parfait, faiblement compressible et acoustique de sorte que les équations régissant son comportement, une fois discrétisées dans le cadre de la formulation lagrangienne réactualisée, s'écrivent :

- équation d'équilibre :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = - \sum_{j \in \Omega_{V_i}} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \vec{\nabla} w_{ij} \quad (4)$$

où p est la pression, ρ la masse volumique et \vec{v} le vecteur vitesse. On remarque que l'équation (4) a été symétrisée afin de respecter le principe de Newton.

- équation de continuité :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i = \rho_i \sum_{j \in \Omega_{V_i}} \frac{m_j}{\rho_j} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \vec{\nabla} w_{ij} \quad (5)$$

Cette équation a également été modifiée afin d'obtenir une masse volumique constante lors d'un écoulement uniforme.

- équation d'état :

$$\Delta p_i = c^2 \Delta \rho_i \quad (6)$$

où c est la vitesse du son dans le fluide.

Des viscosités artificielles sont introduites dans le modèle afin de limiter les instabilités numériques qui peuvent apparaître dans les simulations d'impacts.

3 Modèle SPH de coque fissurante

L'extension de la méthode SPH à la mécanique des structures et plus particulièrement à la théorie des coques de Mindlin-Reissner est présentée ici. Ces travaux sont issus de [11] et sont poursuivis dans le présent article pour permettre la prise en compte de l'endommagement et de la rupture de la coque.

3.1 Formulation SPH coque (SPHC)

L'application de la méthode SPH à la mécanique des structures présente trois obstacles majeurs, qui sont aujourd'hui maîtrisés par la communauté :

- la consistance de la méthode est mauvaise, notamment à proximité des bords du domaine où les voisinages sont incomplets. Cela empêche la convergence en maillage de la méthode. L'approche choisie consiste à utiliser des fonctions de forme Moving Least Square (MLS) [7]. Les fonctions de forme sont construites à partir d'une base polynomiale de degrés n , ce qui leur confère une consistance d'ordre n . L'approximation en \vec{x} , construite autour \vec{x}^* , d'un champs de données $\{u_i\}$, $i = \{1, \dots, N\}$, s'écrit alors :

$$u(\vec{x}, \vec{x}^*) = \vec{p}^T(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}^*) \quad (7)$$

\vec{p} est la base polynomiale utilisée et \vec{a} est un vecteur de coefficients obtenus par la minimisation d'une distance J que l'on choisit classiquement comme étant la norme L_2 pondérée par les poids $w_j(\vec{x}^*)$:

$$J = \sum_{j=1}^N [\vec{p}^T(\vec{x}_j) \vec{a}(\vec{x}^*) - u_j]^2 w_j(\vec{x}^*) \quad (8)$$

La fonction poids choisie est la spline B3 utilisée classiquement dans la méthode SPH.

- la méthode SPH appliquée à la mécanique des structures souffre d'une instabilité numérique. Les auteurs de [15] ont en effet montré que le noyau w_{ij} eulérien utilisé n'est pas stable en présence de contraintes de tension. La solution choisie est tirée de [5] et consiste en l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale pour laquelle le noyau est stable.
- enfin, la plupart des méthodes sans maillage souffre dans leur forme initiale de la présence de modes à énergie nulle due à l'utilisation de la collocation pour les formulations fortes et de l'intégration nodale pour les formulations faibles. [5] fournit une étude complète sur ce problème et montre que l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale réduit ces instabilités. Cela n'est cependant pas suffisant dans le cas d'un modèle de coque car le champs des normales à la surface moyenne est sensible à la présence d'instabilités sur la courbure de la coque. Le problème venant du fait que les champs cinématiques et les champs de déformations et contraintes sont portés par les mêmes noeuds, [5] a proposé l'introduction d'un second type de points, les Stress Points (SP) qui jouent un rôle similaire aux points de Gauss dans la méthode des Eléments Finis (EF) : ils servent uniquement de points intermédiaires pour le calcul des contraintes et des déformations.

La formulation SPH coque est basée sur la théorie de Mindlin-Reissner. Elle repose sur l'hypothèse que l'épaisseur e de la structure est petite devant ses autres dimensions, de sorte que l'on peut écrire :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_m(t) + \xi \vec{n}(t) \quad \xi \in \left[-\frac{e}{2}; +\frac{e}{2}\right] \quad (9)$$

\vec{x}_m désigne la position du point dans le plan médian de la coque et \vec{n} est la pseudo-normale qui matérialise l'orientation de la matière. La théorie prend en compte le cisaillement transverse de sorte que \vec{n} n'est pas constamment normale au plan médian. Le déplacement dans le repère global $R(x, y, z)$ est donné

en fonction des coordonnées initiales dans le repère local tangent $R_{L0}(x_{L0}, y_{L0}, z_{L0})$ dont la direction z_{L0} est normale à la coque :

$$\vec{u}(\vec{x}_{L0}, t) = \vec{u}_m(x_{L0}, y_{L0}, t) + z_{L0} [\vec{n}(x_{L0}, y_{L0}, t) - \vec{n}_0(x_{L0}, y_{L0})] \quad (10)$$

avec $\vec{x}_{L0} = \mathbf{G}_{L0} \vec{x}_0$ et \vec{n}_0 la pseudo-normale initiale.

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est donné dans R_{L0} par :

$$(\mathbf{E})_{R_{L0}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \vec{u}_{L0}}{\partial \vec{x}_{L0}} + \frac{\partial \vec{u}_{L0}^T}{\partial \vec{x}_{L0}} + \frac{\partial \vec{u}_{L0}^T}{\partial \vec{x}_{L0}} \frac{\partial \vec{u}_{L0}}{\partial \vec{x}_{L0}} \right] = (\mathbf{E}^m)_{R_{L0}} + z_{L0} (\mathbf{E}^f)_{R_{L0}} \quad (11)$$

Le tenseur \mathbf{E}^m contient les termes de membrane et de cisaillement transverse constants dans l'épaisseur et \mathbf{E}^f contient les termes associés à la flexion et au couplage des termes non-linéaires de flexion et de membrane qui varient linéairement dans l'épaisseur.

L'hypothèse des contraintes planes nécessite d'appliquer la loi de comportement dans un plan tangent à la coque au point considéré. On définit pour cela le repère tangent $R_L(x_L, y_L, z_L)$ dont la direction z_L est normale à la coque. Les déformations d'Euler-Almansi associées aux effets de membrane et de flexion $(\vec{\varepsilon}_{mf})_{R_L}$ et de cisaillement transverse $(\vec{\varepsilon}_c)_{R_L}$ sont calculées dans R_L . Les vecteurs des contraintes de Cauchy associés $(\vec{\sigma}_{mf})_{R_L}$ et $(\vec{\sigma}_c)_{R_L}$ sont issus de l'application d'une loi de comportement en contraintes planes. Les efforts de membrane N_{ij} et de cisaillement transverse T_i ainsi que les moments de flexion m_{ij} sont obtenus par l'intégration dans R_L des contraintes de Cauchy dans l'épaisseur de la coque :

$$N_{ij} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{ij}^m d\xi = e \sigma_{ij}^m \quad (12)$$

$$T_i = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{iz}^c d\xi = e \sigma_{iz}^c \quad (13)$$

$$m_{ij} = \int_{-e/2}^{e/2} \xi \sigma_{ij}^f(\xi) d\xi = \frac{e^3}{12} \sigma_{ij}^f \quad (14)$$

Dans le contexte de la formulation Lagrangienne totale, les équations d'équilibre sont finalement écrites dans R en terme de contraintes de Piola-Kirchoff 1.

3.2 Endommagement et fissuration

Les phénomènes microscopiques à l'origine de la rupture de la coque sont homogénéisés et leurs effets sont traduits au niveau macroscopique directement par la notion d'endommagement. L'endommagement critique d'un volume élémentaire représentatif (VER) conduit à l'apparition d'une microfissure qui se propage au niveau de la structure par endommagement de VER supplémentaires. Une fois la fissure apparue, elle est traitée comme une discontinuité forte.

3.2.1 Endommagement

Dans le cas des métaux, l'endommagement provient du cisaillement qui favorise la plasticité et de la déformation volumique qui favorise la croissance des cavités et des fissures. Le critère d'endommagement choisi, classique et connu sous le nom de critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique, s'écrit [10] :

$$\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] p - \varepsilon_p^s \leq 0 \quad (15)$$

σ_H est la contrainte hydrostatique, σ_{eq} la contrainte équivalente au sens de Von-Mises, σ_H/σ_{eq} le taux de triaxialité des contraintes, ε_p^s la déformation plastique équivalente seuil, p la déformation plastique cumulée et ν le coefficient de Poisson. L'évolution de l'endommagement est donné par [10] :

$$\dot{D} = \frac{D_c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \dot{p} \quad (16)$$

ε_p^c est la déformation plastique équivalente critique au delà de laquelle le matériau est rompu et D_c l'endommagement critique qui représente la fraction volumique de défauts dans le VER à la rupture. L'endommagement plastique ductile accompagne les grandes déformations plastiques et doit donc être couplé à un modèle de plasticité (Von-Mises ou Johnson-Cook par exemple).

Les simulations numériques effectuées pour un matériau dont la courbe contrainte-déformation présente une pente négative (matériau adoucissant ou endommageable) ne donnent pas des résultats satisfaisants car les déformations et l'endommagement se localisent sur une seule maille à l'approche de la rupture. Il en résulte que l'énergie dissipée dans la rupture et le temps à rupture tendent vers 0 pour un maillage infiniment fin, ce qui suppose une vitesse de croissance infinie des microfissures et des cavités. Ce problème est largement traité dans la littérature [2]. Des travaux, comme [3], montrent que la localisation a pour origine la transformation du problème hyperbolique initial en un problème elliptique lorsque le matériau devient adoucissant. La vitesse de propagation des ondes devenant complexe, elles sont piégées dans la zone de localisation. Les solutions apportées par la communauté pour résoudre le problème consistent à préserver le caractère hyperbolique des équations du problème en introduisant une longueur ou un temps caractéristique qui traduit l'interaction d'une entité du maillage avec ses voisins. Une manière courante d'introduire un temps caractéristique est l'utilisation de l'équation suivante [1] :

$$\begin{aligned} &\text{si } D \leq D_c \\ &\quad \dot{D}_r = \frac{1}{\tau_c} [1 - e^{-a(D-D_r)}] \\ &\text{sinon} \\ &\quad \dot{D}_r = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

D est l'endommagement fourni par la loi d'évolution de l'endommagement, D_r est l'endommagement régularisé et $\langle \cdot \rangle$ est l'opérateur partie positive. En plus du temps caractéristique τ_c , un second paramètre matériau a fait son apparition.

3.2.2 Transition endommagement-fissuration

Nous définissons dans cette approche une fissure comme l'ensemble continu des VER complètement endommagés, voir figure 2. Cette méthode est avantageuse car elle ne fait pas intervenir de représentation explicite des fissures, ce qui permet de traiter simplement les multi-fissurations et branchements de fissures.

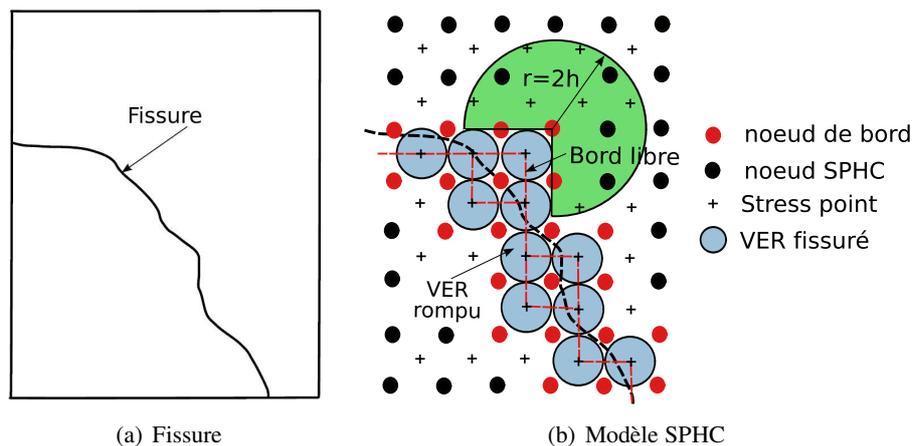


FIG. 2 – Représentation d'une fissure par le modèle SPHC.

Remarque : la méthode est illustrée en représentant un maillage régulier basé sur des quadrilatères mais elle est applicable à un maillage quelconque s'appuyant sur un diagramme de Voronoï.

Les VER totalement endommagés sont traités comme des discontinuités fortes, ce qui permet d'aborder efficacement les cas où les bords de la fissure s'éloignent de façon importante. Les interactions entre les particules SPH, nœuds ou SP, de part et d'autre d'une fissure sont supprimées. Pour cela, la zone

fissurée est considérée comme étant opaque de sorte que des points de part et d'autre de celle-ci s'excluent mutuellement de l'approximation et de la dérivation des champs de variables. La figure 2 donne alors la forme des supports des fonctions poids. Il s'agit de la méthode de visibilité [4]. La figure 2 met en évidence la possibilité que certains points SPH se retrouvent avec un voisinage nul. Si le point est un SP, on choisit d'imposer $D = D_c$, ce qui revient à l'éliminer du calcul. Si le point est un noeud, il est conservé dans le calcul sans interagir avec les autres : son mouvement est uniquement déterminé par l'énergie cinétique qu'il possédait au pas de temps où il est devenu un fragment et éventuellement par les contacts qu'il entretient avec d'autres parties du modèle. On conserve ainsi deux avantages principaux de la méthode SPH :

- les ruptures sont traitées sans perte de masse et donc d'énergie,
- les fragments peuvent éventuellement interagir avec d'autres éléments.

Pour assurer le bon déroulement des calculs, il est également nécessaire de rendre possible une dégradation de l'ordre des fonctions MLS au cours du calcul.

3.3 Exemples numériques

3.3.1 Perforation d'une plaque

Ce cas test se base sur les travaux présentés dans [14] concernant l'étude expérimentale et numérique de la perforation d'une plaque en acier par un projectile hémisphérique. Il est observé l'éjection d'un petit disque central, suivi de l'apparition de fissures qui se propagent radialement, conduisant à la pétalisation de plaque. Le nombre de pétales dépend essentiellement de la vitesse d'impact. Les figures 3(a) et 3(b) montrent l'état final de la plaque calculé avec la méthode SPHC et comparé avec les calculs effectués dans [14] pour une vitesse d'impact $V_{imp} = 300 m.s^{-1}$. Le modèle utilisé dans cette référence est un modèle EF avec érosion des éléments dont la déformation plastique cumulée dépasse un seuil. Le temps à rupture en fonction de la vitesse d'impact est tracé sur la figure 3(c) pour le modèle SPHC et les calculs issus de [14]. Les différentes sources de résultats concordent bien.

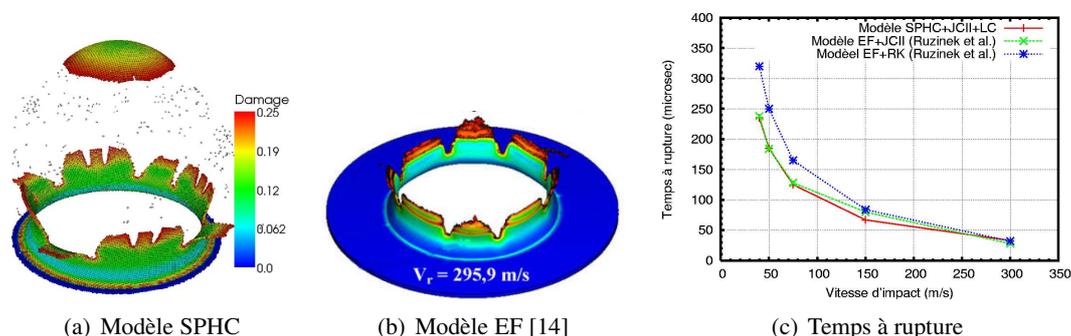


FIG. 3 – Perforation d'une plaque par un projectile hémisphérique.

3.3.2 Fragmentation d'un cylindre

Ce cas s'inspire des expériences présentées dans [9] correspondant à la fragmentation d'un cylindre par la détonation d'un explosif placé en son centre. Le cylindre est modélisé par la méthode SPHC. L'explosif est modélisé en EF en utilisant l'équation d'état de Jones-Wilkins-Lee caractéristique des explosifs. La figure 4(a) compare le nombre de fragments par classe de masse obtenu par la méthode SPHC avec les données expérimentales. La figure 4(b) représente les fragments calculés ramenés sur la géométrie initiale du cylindre.

4 Traitement des interactions fluide-structure

Les applications visées font intervenir des interactions fluide-structure non permanentes car la topologie du contact peut varier fortement au cours du calcul. La méthode des Pinballs [6] a démontré sa

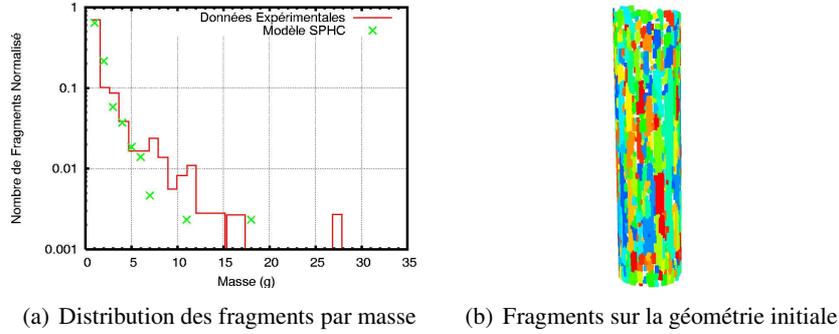


FIG. 4 – Fragmentation d’un cylindre par explosif.

capacité à gérer ce type de problèmes dans le cadre des EF et a été adaptée à la méthode SPH [12].

A chaque noeud SPH est associé un Pinball, de forme sphérique pour les SPH fluide et cylindrique pour les SPH coque. La détection du contact revient alors à un simple test géométrique sur l’interpénétration des Pinballs. Une fois le contact détecté, une condition d’impénétrabilité est appliquée. Dans le cas où le frottement est nul, elle peut s’écrire :

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (18)$$

où \vec{v}_1, \vec{v}_2 sont les vecteurs vitesses des Pinballs et \vec{n} la normale au contact. L’efficacité de la méthode dépend largement de la manière dont est calculée \vec{n} . Dans le cas d’un contact glissant par exemple, des oscillations de la normale (dues par exemple à des Pinballs de taille importante) peuvent entraîner l’apparition d’efforts tangentiels artificiels. Pour un contact SPH fluide-SPH coque, on choisit pour \vec{n} la normale à la coque, ce qui limite ces effets indésirables. Le problème est résolu par l’utilisation de multiplicateurs de Lagrange. L’intérêt de cette méthode réside essentiellement dans le fait que la détection du contact est simple. De plus, la méthode est symétrique puisque les deux corps en contacts jouent le même rôle. Cela évite d’avoir à choisir un corps maître et un corps esclave, choix qui influence le résultat.

5 Application : perforation d’un réservoir

Le cas test est tiré d’une étude expérimentale présentée dans [16] sur l’impact d’une balle sur un réservoir cylindrique vide ou rempli d’eau. Dans le cas d’un cylindre vide, l’impact se traduit par une simple perforation d’un diamètre proche de celui de l’impacteur, comme représenté sur la figure 5(a). La même chose est observée pour un réservoir rempli d’eau si la vitesse d’impact est faible. Pour les vitesses d’impact élevées, par exemple $730m.s^{-1}$ sur la figure 5(c), le mode de rupture est différent : une fissure se propage sur toute la hauteur de la face entrante du réservoir, sous l’effet du choc de pression créé dans le fluide. Le réservoir et le fluide sont modélisés entièrement par la méthode SPH décrite précédemment. Le projectile est considéré rigide. Dans le cas du cylindre vide, la simulation prévoit une simple perforation de la coque, voir figure 5(b), ce qui est conforme à l’expérience. Dans le cas du réservoir plein, la simulation prévoit un faciès de rupture comparable aux résultats expérimentaux, voir la figure 5(d).

6 Conclusion

La méthode mise en place pour modéliser la rupture des coques avec la méthode SPH repose sur les ingrédients classiques de la théorie de l’endommagement et sur l’introduction de discontinuités fortes dans le modèle. Les fissures ne sont pas décrites explicitement ce qui la rend particulièrement adaptée au traitement des cas de multi-fissuration, perforation et fragmentation. Enfin, le modèle SPHC est facilement étendu au traitement des interactions fluide-structure via la méthode des Pinballs. Tous les développements ont été réalisés au sein du code de dynamique rapide Europlexus.

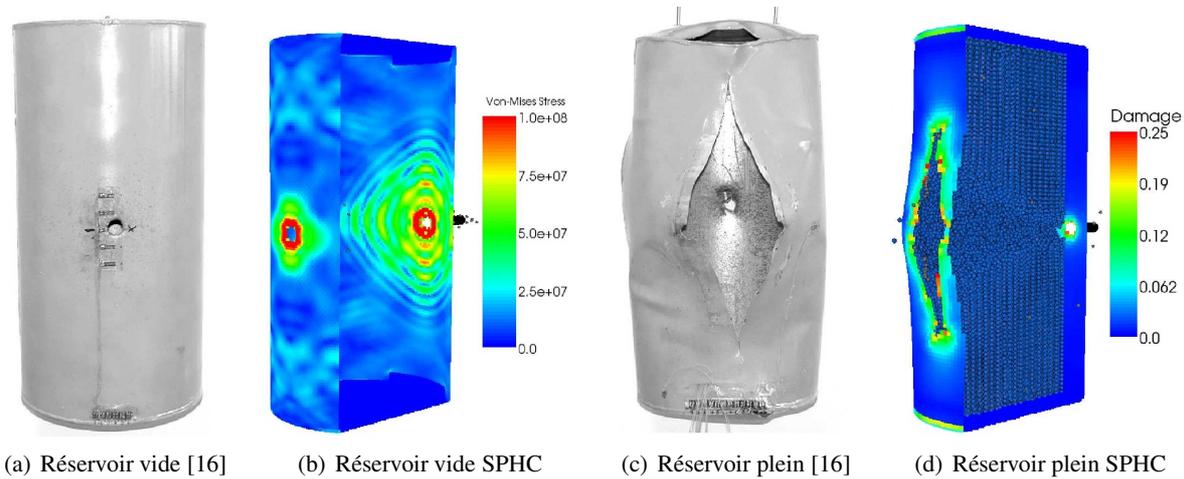


FIG. 5 – Perforation d'un réservoir vide ou plein par une balle.

Références

- [1] O. Allix, J.-F. Deü. *Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading*, Engineering Transactions, 45 :29-46, 1997.
- [2] Z.P. Bazant. *Instability, ductility and size effect in strain softening concrete*, Mechanics and Journal of the Engineering Mechanics Division, 102 :331-344, 1976.
- [3] Z.P. Bazant, T. Belytschko. *Wave propagation in strain-softening bar : exact solution*, Journal of the Engineering Mechanics Division, 111 :381-389, 1985.
- [4] T. Belytschko, L. Gu, Y.Y. Lu. *Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods*, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2 :519-534, 1994.
- [5] T. Belytschko, Y. Guo, W.K. Liu, S.P. Xiao. *A unified stability analysis of meshless particle methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40 :1359-1400, 2000.
- [6] T. Belytschko, MO. Neal. *Contact-impact by the pinball method with penalty and Lagrangian methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31 :547-572, 1991.
- [7] G. A. Dilts. *Moving least squares particle hydrodynamics - I : consistency and stability*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44 :1115-1155, 1999. .
- [8] R.A. Gingold, J.J. Monaghan. *Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181 :375-389, 1977.
- [9] D.M. Goto et al. *Investigation of the fracture and fragmentation of explosively driven rings and cylinders*, International Journal of Impact Engineering, 35 :1547-1556, 2008.
- [10] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 2004.
- [11] B. Maurel, A. Combescure. *An SPH shell formulation for plasticity and fracture analysis in explicit dynamic*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 76 :949-971, 2008.
- [12] B. Maurel, S. Potapov, S. Fabis, A. Combescure. *Full SPH fluid-shell interaction for leakage simulation in explicit dynamics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 80 :210-234, 2009.
- [13] V.P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot. *Meshless methods : A review and computer implementation aspects*, Mathematics and Computers in Simulation, 79 :763-813, 2008.
- [14] A. Ruzinek et al., *Experimental and numerical study on the perforation process of mild steel sheets subjected to perpendicular impact by hemispherical projectiles*, International Journal of Impact Engineering, 36 :565-587, 2009.
- [15] J.W. Swegle, D.L. Hicks, Y. Chen. *Stabilizing SPH with conservative smoothing*, SANDIA, Report N°SAN94-1932, 1994.
- [16] T. Timm. *Beschuss von flüssigkeitsgefüllten Behältern*, PhD Thesis, Karlsruhe University, Germany, 2003.