



**HAL**  
open science

## Conception d'une Enveloppe Plissée Pliable-Dépliable

David Dureisseix, Francesco Gioia, René Motro, Bernard Maurin

► **To cite this version:**

David Dureisseix, Francesco Gioia, René Motro, Bernard Maurin. Conception d'une Enveloppe Plissée Pliable-Dépliable. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592843

**HAL Id: hal-00592843**

**<https://hal.science/hal-00592843v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Conception d'une Enveloppe Plissée Pliable-Dépliable

D. Dureisseix<sup>1</sup>, F. Gioia<sup>2</sup>, R. Motro<sup>3</sup>, B. Maurin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LaMCos, INSA de Lyon, France, david.dureisseix@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> Dipartimento di Architettura Costruzioni e Strutture, Università Politecnica delle Marche, Ancone, Italie, francesco.gioia@gmail.com

<sup>3</sup> LMGC, Université Montpellier 2, France, {rene.motro, bernard.maurin}@univ-montp2.fr

**Résumé** — Des concepts utilisés en origami sont ici employés pour générer des surfaces plissées pliables-dépliables en visant de possibles applications en architecture et au génie civil. Après avoir proposé des méthodes de caractérisation de ces surfaces, des formes nouvelles sont présentées à partir de déclinaisons géométriques des modules de « Miura-Ori ». On peut ainsi générer des surfaces plissées non totalement développables, et donc rigides, éventuellement à simple courbure une fois déployées. Les cinématiques de pliage-dépliage associées sont également analysées et présentées.

**Mots clefs** — Structure plissée, pliabilité.

### 1 Introduction

Les techniques d'origami et de pliage de papier peuvent avoir des applications dans le cas de structures devant offrir des propriétés de pliabilité-dépliability. Leur forme peut ainsi être transformée pour passer d'un état déployé, lié à un besoin, vers un état plus « compacté » (et vice-versa). Dans le cas de l'origami, des plis sont générés sur une feuille de papier, ou sur toute autre surface développable, afin de pouvoir modifier sa forme selon des aspirations d'ordre ludique ou artistique. Les concepts relatifs à ces techniques ont toutefois été depuis peu importés vers d'autres disciplines pour être appliqués à la conception de structures pliables-dépliables ; c'est par exemple le cas pour l'industrie aérospatiale. Une disposition judicieuse des plis permet en effet des mécanismes de pliage très efficaces. Elle reprend souvent l'arrangement des plis issu de géométrie simples, comme dans le cas des modules dits de « Miura-Ori » et de « Yoshimura » basés sur le plan ou le cylindre.

L'objectif de cette communication est de présenter une application liée à la conception de systèmes pliables-dépliables pour le génie civil ou l'architecture (FIG. 1). Dans ces domaines, la contrainte de transformation de forme est en effet généralement associée à des exigences en termes de rigidité et de résistance minimales pour la structure déployée. Nous avons pour cela choisi d'étudier le cas de systèmes pliables mais non totalement développables. Ce type de structures peut en effet être à même de satisfaire de telles exigences sur le comportement mécanique du fait de l'impossibilité de les transformer facilement en une surface plane.

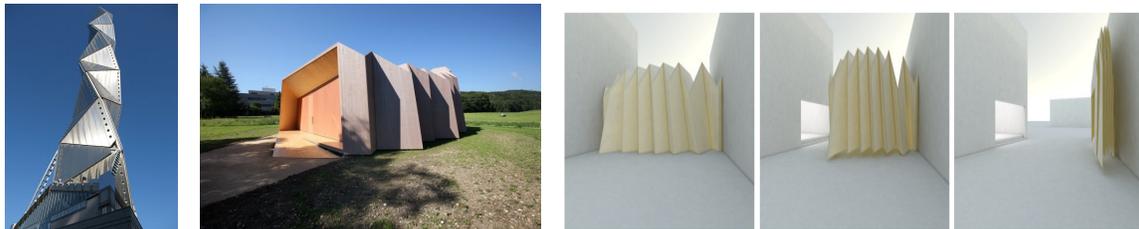


FIG. 1 – Différents usages du pli en architecture : Art Tower Mito (Arata Isozaki, 2006), Chapelle St Loup (Localarchitecture / Hani Buri, Yves Weinand / Danilo Mondada, 2008 [2]), projet de galerie pliable (Tomohiro Tachi, 2009)

Dans un second temps, des configurations géométriques innovantes sont présentées à partir d'une « généralisation » des modules de Miura-Ori (plats et développables). Les possibilités d'assemblages de ceux-ci ont déjà été montrées ainsi que la génération de formes courbes. Nous mettons toutefois en

avant la possibilité de créer d'autres modules par des modifications qui génèrent des surfaces avec des propriétés de non développabilité et, éventuellement, de simple courbure. Les assemblages de ces modules font ensuite l'objet d'études permettant de caractériser leurs cinématiques de pliage, soit pour des configurations planes, soit pour des formes à simple courbure.

## 2 Géométrie et angle de pliage

Les surfaces à concevoir sont seulement différentiables par morceaux, aussi le plan tangent ne peut pas être défini en tout point. Par analogie avec le pliage rigide (*rigid folding*), nous négligerons l'épaisseur des surfaces (plaques) qui seront connectées l'une à l'autre par des articulations parfaites. Ces plaques seront aussi supposées planes et leurs cotés des segments droits [6]. De façon plus générale, elles auraient pu être considérées comme des surfaces développables [7], [8] en modélisant la flexion de ces surfaces, ce qui est indispensable dans les cas des plis courbes [9], [10], [11], [12]. Cet aspect est cependant hors du champ de cet article dans lequel les cotés restent des segments droits.

### 2.1 Orientation et angles de pliages

Une surface plissée  $\Omega$  est définie comme une surface connexe simple composée de faces polygonales planes. On suppose cette surface orientable, de normale unitaire  $n_i$  pour chaque face  $F_i$ ,  $i = 1 \dots n$  (FIG. 2).

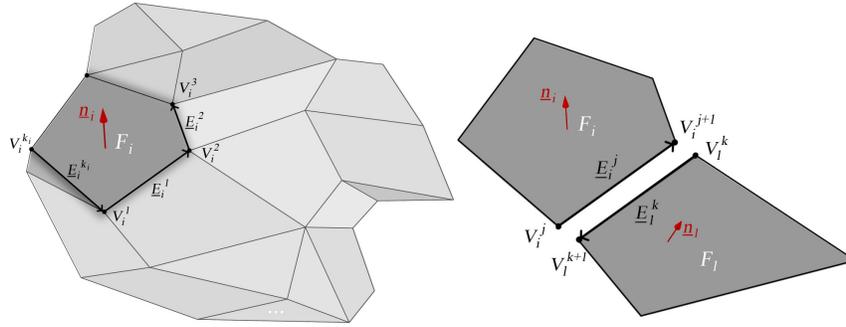


FIG. 2 – Définition d'une configuration et orientation de sa surface

De plus, pour chaque face  $F_i$ , en orientant les cotés, un secteur angulaire associé à deux cotés adjacents est noté  $\theta_i^j \in [0, 2\pi]$ . Enfin, l'angle entre deux normales de faces adjacentes  $F_i$  et  $F_l$  est noté  $a_{il} \in [0, \pi]$  :

$$a_{il} = \arccos (n_i \cdot n_l) \quad (1)$$

### 2.2 Pliabilité

La pliabilité globale, c'est-à-dire les états successifs de  $\Omega$  obtenus en changeant continument les angles de pliage et en respectant la planéité des faces, la connectivité de l'assemblage et sans interpénétration des faces, est toujours une question ouverte. Cependant, la condition dite locale de pliabilité (une condition nécessaire) est établie au voisinage de chaque sommet (ou coin)  $O$ , intersection de  $p$  plis (FIG. 3) dans [13] :

$$p \text{ est pair et } \sum_{m=1}^p (-1)^m \theta_m \in \{0, 2\pi, -2\pi\} \quad (2)$$

La contrainte de pliabilité globale est une contrainte forte pour la conception de l'assemblage de

faces. Pour un assemblage non dépliable (rigide), la nécessité d'avoir une réserve de rigidité est plus facilement réalisable [6], [14].

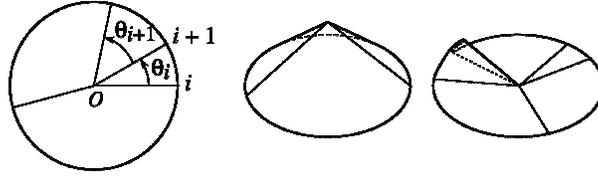


FIG. 3 – Illustration de la pliabilité locale, pour un état déplié plat (à gauche), et deux états non plats (au centre et à droite)

### 2.3 États pliés et dépliés

Pour décrire l'évolution possible des angles de pliages et des différentes configurations pendant une opération de pliage ou de dépliage, nous proposons un descripteur global du mouvement,  $G_\Omega$  pour une configuration  $\Omega$  admissible :

$$G_\Omega = \frac{1}{q} \sum_{ij} \frac{a_{ij}}{\pi} \quad (3)$$

où  $q$  est le nombre de cotés communs et d'angles de pliages de l'assemblage. Comme  $a_{ij} \in [0, \pi]$ , on obtient  $0 \leq G_\Omega \leq 1$ . Ainsi  $G_\Omega = 0$  correspond à toutes les faces coplanaires ( $\forall ij, a_{ij} = 0$  : c'est l'état déplié plat) et  $G_\Omega = 1$  correspond à toutes les faces recouvrantes ( $\forall ij, a_{ij} = \pi$  : état plié plat). L'état déplié  $\Omega'$  est celui qui minimise  $G_\Omega$  pour toutes les configurations admissibles, et l'état plié  $\Omega''$  est celui qui le maximise. S'il existe un unique chemin continu entre l'état plié et l'état déplié, la surface plissée possède un unique trajet de pliage.

### 2.4 Classification

La description d'un trajet de pliage est assez explicite avec l'évolution des configurations décrite par les valeurs de  $G_\Omega$ . Les valeurs extrêmes permettent de définir :

- une surface plissée développable : l'état déplié plan  $G_{\Omega'} = 0$ ,
- une surface plissée non développable :  $G_{\Omega'} > 0$ ,
- une surface plissée pliable à plat : l'état plié plan  $G_{\Omega''} = 1$ ,
- une surface plissée non pliable à plat :  $G_{\Omega''} < 1$ ,

ainsi que quatre possibles combinaisons (FIG. 4) où le cas  $G_{\Omega'} = G_{\Omega''}$  correspond à une surface rigide. En particulier, le module dit de « Miura-Ori » permet de paver un plan qui correspond à une surface développable et pliable à plat [16], [17] avec un unique trajet de pliage. Cependant, pour la conception d'une enveloppe pliable-dépliable, qui demande à la fois une grande efficacité de pliage (état plié compact) ainsi qu'une capacité de rigidité une fois dépliée, le deuxième critère n'est pas atteint. Une solution consiste alors à modifier le module initial pour éviter sa dépliabilité jusqu'à un état plan. Il existe déjà plusieurs généralisations du module Miura-Ori [4], [5] mais elles ne permettent pas d'atteindre le niveau d'efficacité recherché car elles restent développables.

L'objectif de la conception qui suit est ainsi de modifier le module Miura-Ori pour annuler sa développabilité, tout en conservant son efficacité de pliage, pour obtenir une surface plissée non développable et pliable à plat. L'état déplié pave alors un plan « épais ». Nous verrons aussi qu'une autre modification engendrera une surface épaisse à simple courbure, un cylindre « épais », augmentant encore la rigidité du système déplié tout en préservant sa pliabilité à plat.

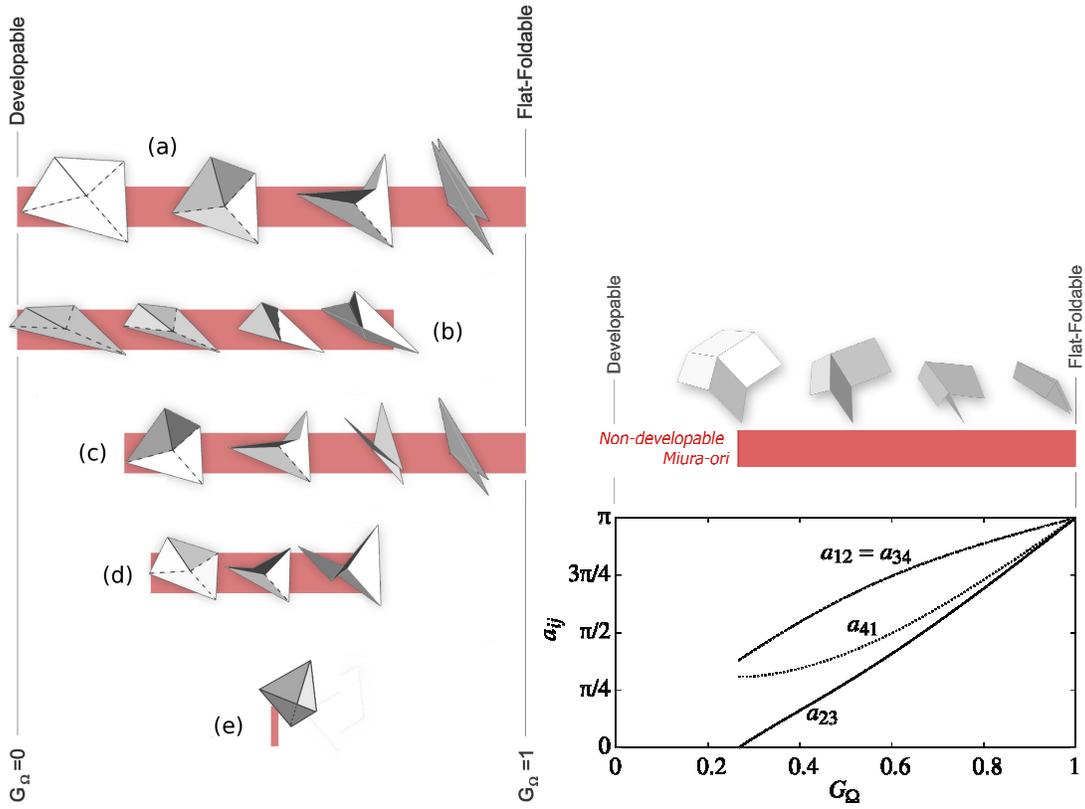


FIG. 4 – Classification et exemples de surfaces plissées (à gauche) : (a) développable et pliable à plat, (b) développable mais non pliable à plat, (c) non développable et pliable à plat, (d) non développable et non pliable à plat, (e) rigide. Trajet de pliage pour le module non développable (à droite, pour  $\alpha = \pi/3$  et  $\beta = \pi/10$ )

### 3 Module généralisé et son trajet de pliage

Le module Miura-Ori est composé d'un motif rhomboédrique répétitif qui pave le plan, FIG. 5(a). Il est défini par un paramètre angulaire  $\alpha$  et une longueur de côté  $l$ . Il satisfait à la condition de pliabilité locale (les secteurs angulaires forment une somme de  $2\pi$ ). Un unique mécanisme fini existe qui permet de passer de l'état développé à l'état plié plan [18], [19]. Nous proposons alors de modifier deux secteurs angulaires pour obtenir une somme égale à  $2\pi + 2\beta$ , FIG. 5(b), qui vérifie la condition de pliabilité locale, mais plus celle de développabilité.

Une analyse géométrique permet de caractériser le mécanisme, en exprimant les différents angles de pliages en fonction d'un seul, par exemple :  $a_{34} = a_{12}$  et

$$\tan(a_{23}/2) = \frac{-\cos a_{12} \cos \alpha \sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\sin a_{12} \sin(\alpha + \beta)} \quad (4)$$

$$\cos a_{41} = \frac{\cos^2(\alpha + \beta) - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos a_{23}}{\sin^2(\alpha + \beta)} \quad (5)$$

Pour des valeurs admissibles des paramètres de conception  $\alpha$  et  $\beta$ , ces relations sont monotones, et pour  $a_{23} \in [0, \pi]$ , on obtient  $a_{12} \in [a_{12}^*, \pi]$  avec  $\cos a_{12}^* = \tan \alpha / \tan(\alpha + \beta)$ . Le trajet de pliage est unique et décrit avec un unique paramètre. Il est représenté sur la FIG. 4 (en bas à droite).

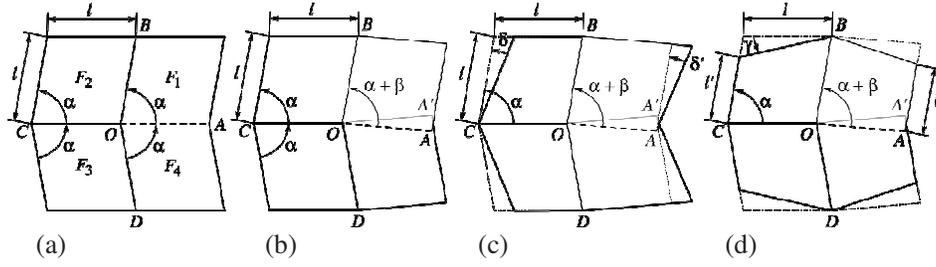


FIG. 5 – Modifications du module Miura-Ori (a) pour générer un module non développable à courbure moyenne nulle (b). Modifications pour générer des surfaces plissées à simple courbure : (c) pour surface courbée dans une première direction, (d) pour une surface courbée dans une seconde direction

### 3.1 Caractéristiques

Lors du mouvement de pliage, le module peut être confiné entre deux plans parallèles et le déploiement du module se réalise dans deux directions (celles de duplication du module en vu du pavage) parallèles à ces plans. On peut ainsi définir deux coefficients d'expansion du module dans ces plans,  $e_x$  et  $e_y$ . Leur expression est :

$$e_x = \frac{\sin(\xi/2)}{\sin(\xi''/2)} \text{ et } e_y = \cos(a_{23}/2) \quad (6)$$

avec  $\cos \xi = -\cos a_{12} \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos(\alpha + \beta)$  et  $\cos \xi'' = -\cos(\alpha + \beta) / \cos \alpha$ . Leurs évolutions le long du trajet de chargement sont présentées sur la FIG. 6(a) pour plusieurs valeurs des paramètres de conception.

Une autre caractéristique est « l'épaisseur » de la surface moyenne FIG. 6(b), c'est-à-dire la distance entre les deux plans précédents pour l'état déplié :

$$t = (1 + \cos \alpha) \cos(\xi''/2) \quad (7)$$

Bien que pour  $\alpha = \pi/4$  et  $\beta = \pi/2$  l'épaisseur soit maximale, la surface couverte (projection du module sur les plans précédents) est relativement petite. Cette surface est donnée par :

$$A = 4 \sin(\xi''/2) \quad (8)$$

Suivant l'application visée, un compromis doit ainsi être réalisé. Par exemple sur la FIG. 6(c), le produit de la surface couverte par l'épaisseur est déterminé ; cela permettant éventuellement d'optimiser ce volume équivalent.

### 3.2 Assemblage du module

Le long du trajet de pliage, les cotés deux à deux opposés d'un module ont le même angle de pliage et restent parallèles entre eux. Aussi, ces cotés se déduisent l'un de l'autre par translation et les modules peuvent alors s'assembler de façon modulaire par des translations périodiques dans ces deux directions. Un plan épais entier peut donc être pavé et cet assemblage conserve les propriétés du module : trajet de pliage unique, mécanisme à un seul degré de mobilité, non développabilité, pliage à plat, mêmes évolutions des coefficients d'expansion et de l'épaisseur. Le déploiement s'opère ainsi dans deux directions orthogonales différentes. La FIG. 7 (à gauche) illustre le trajet de pliage d'un assemblage 3x3 (modélisé avec Grasshopper®, un éditeur graphique intégré à Rhino3D®).

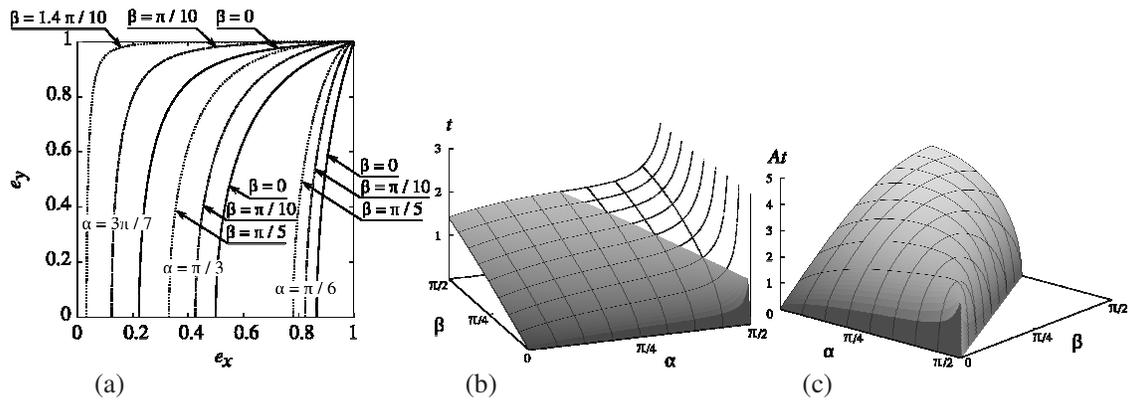


FIG. 6 – Caractéristiques du module modifié : (a) coefficients d’expansion pour différentes valeurs des paramètres de conception, (b) épaisseur et (c) volume équivalent

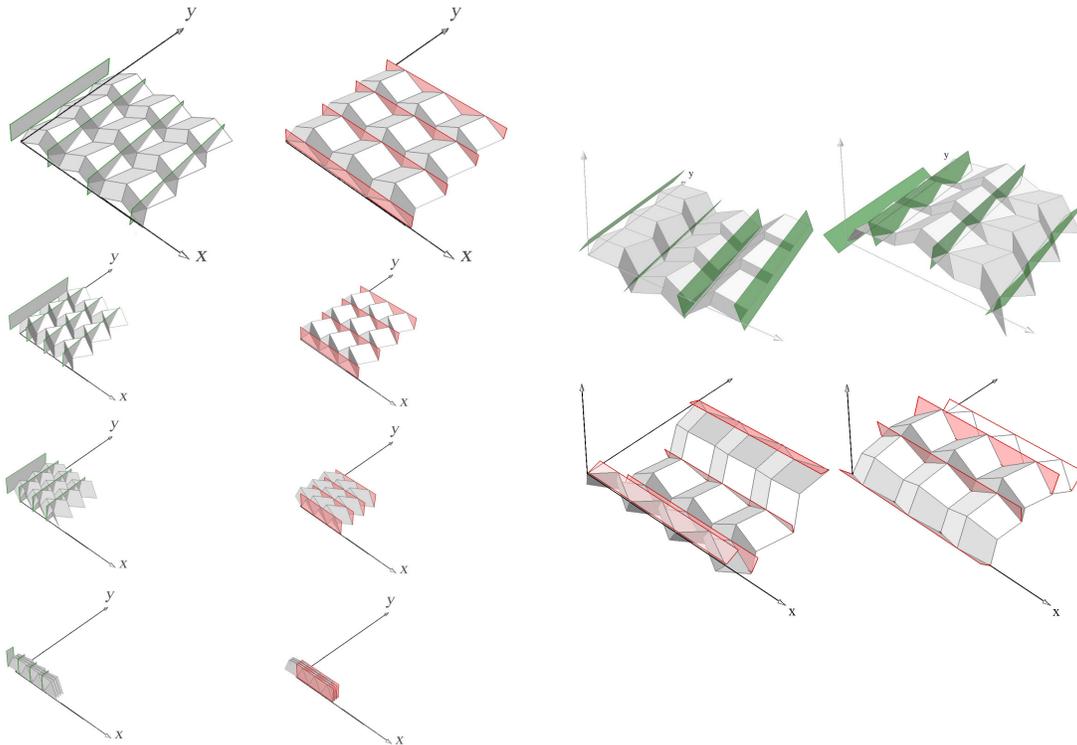


FIG. 7 – Trajet de pliage d’un assemblage 3x3 (à gauche) à deux réseaux de plans orthogonaux. Quatre différents assemblages 3x3 (à droite) permettant d’obtenir des surfaces plissées à simple courbure.

#### 4 Surfaces plissées à simple courbure

Afin d’obtenir des assemblages proches de surfaces à simple courbure, une autre modification est à présent utilisée en impliquant un paramètre supplémentaire, FIG. 5(c) et (d) : un angle  $\delta$  ou bien un angle  $\gamma$ . Dans le cas d’un pavage plan, deux réseaux de plans d’assemblage restaient parallèles et mutuellement orthogonaux. Ici, ces deux réseaux orthogonaux sont associés à des éléments parallèles pour l’un et radiaux pour l’autre (FIG. 7, à droite). On peut de plus montrer que, dans ce cas, les propriétés de pavage restent valides et que l’assemblage préserve les propriétés des modules eux-mêmes. La FIG. 8 montre ainsi le trajet de pliage d’un cylindre complet.

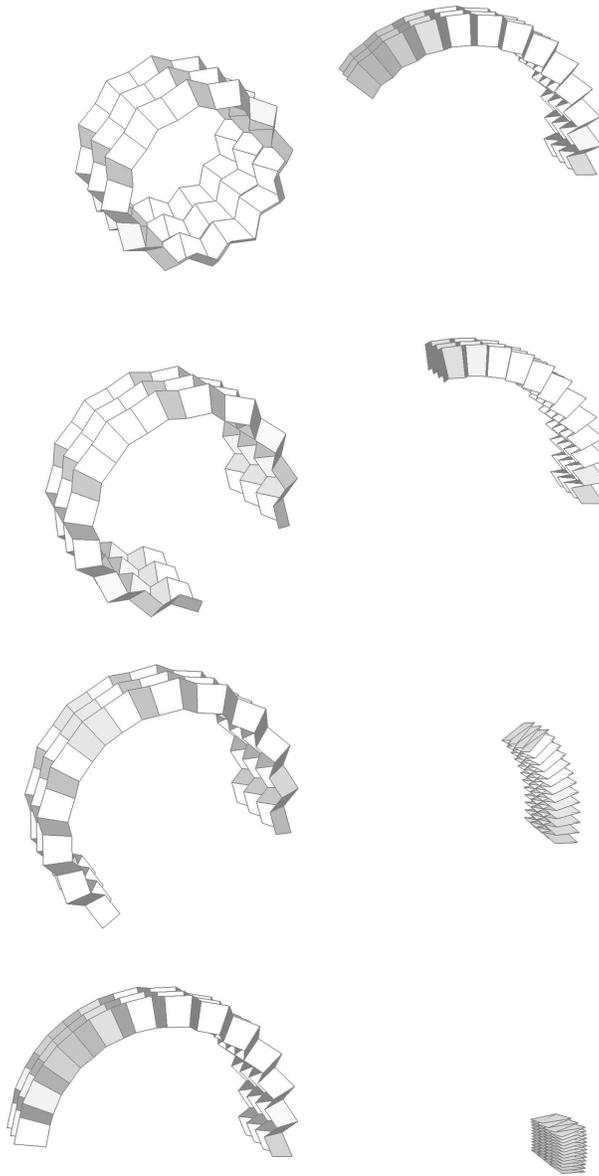


FIG. 8 – Trajet de pliage d'un cylindre épais

## 5 Conclusions et perspectives

Il est possible de concevoir, pour toute courbe bidimensionnelle, une surface à simple courbure, pliable-dépliable. Dans la classification ici proposée, ces surfaces sont appelées surfaces plissées non développables et pliables à plat. Leurs caractéristiques permettent d'envisager une utilisation en génie civil et en architecture, par exemple pour la construction de structures temporaires ou de toits escamotables, en association avec une motorisation adéquate et un verrouillage en position dépliée. La condition de pliabilité globale doit cependant être vérifiée (par exemple par simulation), et les contraintes technologiques comme l'épaisseur des panneaux n'ont pas été discutées dans les présents travaux. Pour vérifier les critères de rigidité, des simulations par éléments finis et des essais sur maquettes sont en cours de validation.

## Références

- [1] Delarue, J.-M., and J.-F., B., 1986. *Figuration graphique et recherche structurale. Constructions plissées*. Tech. Rep. 411/87, École Nationale Supérieure d'Architecture de Paris-Villemin – A.D.R.I. 1.
- [2] Buri, H. U., and Weinand, Y., 2008. “Die provisorische Kapelle von St. Iou”. *Bulletin Schweizerische Arbeitsgemeinschaft für Holzforschung* (2), pp. 16–20.
- [3] El Smaili, A., and Motro, R., 2007. “Foldable / unfoldable curved tensegrity systems by finite mechanism activation”. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 48(3), pp. 153–160.
- [4] Hoberman, C., 1993. *Curved pleated sheet structures*. US Patent 5234727.
- [5] Tachi, T., 2009. “Generalization of rigid-foldable quadrilateral-mesh origami”. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 50(3), pp. 173–179.
- [6] Stotz, I., Gouaty, G., and Weinand, Y., 2009. “Iterative Geometric Design for Architecture”. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 50(1), pp. 11–20.
- [7] Demaine, E. D., Demaine, M. L., Hart, V., Price, G. N., and Tachi, T., 2009. “(Non)existence of pleated folds: How paper folds between creases”. In *7th Japan Conference on Computational Geometry and Graphs*. To appear (available at <http://arxiv.org/abs/0906.4747>).
- [8] Duncan, J. L., Duncan, J. P., Sowerby, R., and Levy, B. S., 1981. “Folding without distortion: Curved-line folding of sheet metal”. *Sheet Metal Industries*, 58(7), pp. 527–533.
- [9] Dacorogna, B., Marcellini, P., and Paolini, E., 2008. “Lipschitz-continuous local isometric immersions: Rigid maps and origami”. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 90(1), pp. 66–81.
- [10] Dacorogna, B., Marcellini, P., and Paolini, E., 2010. “Origami and partial differential equations”. *Notices of the American Mathematical Society*, 57(5), pp. 598–606.
- [11] Kilian, M., Flöry, S., Chen, Z., Mitra, N. J., Sheffer, A., and Pottmann, H., 2008. “Curved folding”. *ACM Transactions on Graphics*, 27(3), pp. 1–9.
- [12] Koschitz, D., Demaine, E. D., and Demaine, M. L., 2008. “Curved crease origami”. In *Advances in Architectural Geometry*, pp. 29–32.
- [13] Demaine, E. D., and O’Rourke, J., 2008. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, New York, USA.
- [14] Buri, H. U., and Weinand, Y., 2010. “Origami aus brettsperholz”. *DETAIL Zeitschrift für Architektur + Baudetail, Serie 2010(10)*, pp. 1066–1068.
- [15] Cantarella, J. H., Demaine, E. D., Iben, H. N., and O’Brien, J. F., 2004. “An energy-driven approach to linkage unfolding”. In *20th Annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 134–143.
- [16] Miura, K., and Pelligrino, S., 2001. *Structural concepts and their theoretical foundations*. Unpublished booklet.
- [17] Miura, K., 2009. “The science of Miura-ori: A review”. In *4th International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, R. J. Lang, ed., A K Peters, pp. 87–100.
- [18] Hull, T., 2006. *Project Origami*. A K Peters.
- [19] Huffman, D. A., 1976. “Curvature and creases: a primer on paper”. *IEEE Transactions on Computers*, C-25(10), pp. 1010–1019.