

Une stratégie X-FEM globale-locale stabilisée avec contact-frottement dédiée à la fissuration 3D

Anthony Gravouil, Emilien Pierres, Marie-Christine Baietto

▶ To cite this version:

Anthony Gravouil, Emilien Pierres, Marie-Christine Baietto. Une stratégie X-FEM globale-locale stabilisée avec contact-frottement dédiée à la fissuration 3D. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592840

HAL Id: hal-00592840 https://hal.science/hal-00592840v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une stratégie X-FEM globale-locale stabilisée avec contact-frottement dédiée à la fissuration 3D.

A. Gravouil¹, E. Pierres¹, M.-C Baietto¹

¹ LaMCoS, INSA Lyon, France, {anthony.gravouil}@insa-lyon.fr

Résumé — Une stratégie X-FEM globale-locale stabilisée est appliquée à la simulation quasi-statique de fissures 3D non-planes avec contact / frottement interfacial. Une formulation faible à trois champ permet une discrétisation indépendante entre la structure et la fissure. En outre, un solveur non linéaire stabilisé est proposé et permet de résoudre dans un cadre unifié le contact unilatéral, l'adhérence, le glissement, avec un taux de convergence optimisé. La robustesse et la précision de la méthode sont montrées à travers une application 3D de fissuration sous sollicitation de fretting.

Mots clés — Contact frottant, condition de stabilité LBB, XFEM, fissuration 3D.

1 Introduction

La fissuration par fatigue est un problème fréquent qui impose des contrôles à intervalles réguliers et des étapes de maintenance coûteuses. L'importance de cette problématique a favorisé le développement de nouvelles méthodes afin de prédire le comportement de fissures. La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée en mécanique de la rupture. Toutefois, elle pose un certain nombre de difficultés associées à la construction d'un maillage très fin d'éléments singuliers en pointe de fissure et aux étapes de remaillage et d'interpolation des champs lorsque la fissure se propage. La prise en compte de fissures tridimensionnelles non planes et la modélisation des problèmes de grandes tailles sont longtemps restées inenvisageables. Récemment, la méthode des éléments finis étendus X-FEM [6], a permis de lever certains verrous de la simulation numérique de la propagation des fissures. Cette méthode permet de modéliser les fissures de façon implicite (indépendamment du maillage éléments finis) et ainsi de lever les difficultés liées au remaillage et à la projection de champs lors de la propagation des fissures. De plus, grâce aux enrichissements asymptotiques en pointe de fissure, la solution du problème à précision donnée est obtenue pour des maillages environ 10 fois plus grossiers que ceux utilisés avec la MEF [5, 4, 3]. D'autre part, des modèles multi-échelles basés sur des techniques multi-grilles [7, 10] ou de décomposition de domaine ont été proposés afin de prendre en compte de façon optimale les différentes échelles mises en jeu (structure, fissure). L'aptitude de la X-FEM à représenter des géométries complexes en 3D à l'aide de fonctions de niveau [4, 2] et la possibilité de pouvoir y intégrer des lois de comportement matériaux complexes [3] en font un outil privilégié pour la simulation de la propagation des fissures. La prise en compte du contact avec frottement entre les faces de fissures est une étape importante qui permet une évaluation plus précise des facteurs d'intensité de contraintes sous sollicitations en mode mixte. Mais cela pose un certain nombre de difficultés. Les phénomènes physiques mis en jeu font intervenir des échelles spatiales qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeur, celle de la structure, celle de la fissure et celle des non-linéarités à l'interface. Une solution de contact précise requiert une discrétisation spatiale de l'interface adaptée à la dimension caractéristique du problème local [11]. Cette discrétisation spatiale de l'interface, généralement dépendante du maillage éléments finis sous-jacent, nécessite un raffinement local du maillage en volume. Cette étape peut s'avérer délicate, voire prohibitive pour les problèmes tridimensionnels. D'autre part, plusieurs travaux ont mis en évidence des difficultés liées à l'instabilité de la solution de contact due à un non respect de la condition inf-sup LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi). Ces instabilités se caractérisent par des oscillations des efforts d'interface. À partir de l'étude des différentes formulations utilisées, un modèle X-FEM à deux échelles globale-locale, avec contact et frottement interfacial a été proposé afin de répondre aux exigences listées ci-dessus. Il est basé sur une formulation faible mixte à trois champs. Il autorise des maillages incompatibles [8] et permet une description pertinente aux échelles globale de la structure et locale des fissures. L'interface est considérée comme une structure autonome avec ses propres variables, sa propre discrétisation indépendante du maillage de la structure. Cette stratégie permet d'optimiser la finesse de la discrétisation de l'interface en augmentant le nombre de points d'intégration par sous-découpage des éléments d'interface, indépendamment du maillage éléments finis sous jacent et d'obtenir une description adaptée à l'échelle des non linéarités de contact et frottement locales. Une méthode de stabilisation de la formulation du problème a été proposée dans le cadre du solveur non linéarie LATIN [9]. Le solveur stabilisé NLLA (Non Locking LATIN) permet de s'affranchir des éventuelles oscillations numériques de la solution de contact et améliore grandement le taux de convergence de la méthode itérative. Des exemples bidimensionnels et tridimensionnels ont mis en évidence les bonnes propriétés de convergence, la précision élevée et les gains en temps CPU (jusqu'à 75%). L'ensemble de ces outils numériques a été mis en oeuvre au sein du code de calcul ELFE_3D développé au laboratoire LaMCoS.

2 Problème de référence et formulation X-FEM globale-locale avec stabilisation

Nous considérons un corps fissuré Ω où le contact et le frottement peut se produire le long des lèvres la fissure Γ_c^+ et Γ_c^- . Sous l'hypothèse des petites perturbations, nous supposons que l'interface $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$ est une entité autonome avec son propre comportement éventuellement non linéaire.



FIGURE 1 - Définition du problème global-local associé à une structure fissurée

Ce problème de fissuration est divisé en un problème global (échelle de la structure $\Omega \setminus \Gamma_c$) et un problème local (l'échelle de la fissure Γ_c) (voir figure (1)). Le problème global est défini avec ses propres variables primales et duales, **u** et σ respectivement le champ de déplacement et le tenseur des contraintes de Cauchy. Le problème local est également défini avec ses propres variables primales et duales, **w** et **t** respectivement le champ de déplacement et d'effort d'interface. **n** est la normale unitaire extérieure à $\Omega \setminus \Gamma_c$ et **n**_c la normale unitaire extérieure à Γ_c .

Nous considérons la formulation forte quasi-statique du problème global à un instant t donné $t \in [0; T]$ suivante :

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \mathrm{dans} \ \Omega \backslash \Gamma_c \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{s} \quad \text{sur } \partial_{\boldsymbol{\sigma}}\Omega \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{sur } \partial_{\mathbf{u}} \Omega \tag{3}$$

où s et v sont respectivement les efforts imposés sur $\partial_{\sigma}\Omega$ et les déplacements imposés sur $\partial_{u}\Omega$, et **f** les actions à distance éventuelles. Les deux problèmes globaux et locaux obéissent à une loi de comportement éventuellement non linéaire respectivement en volume ou d'interface :

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, u_i, t) \quad \text{dans } \boldsymbol{\Omega} \backslash \boldsymbol{\Gamma}_c \tag{4}$$

$$\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}(\mathbf{w}, w_i, t) \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{5}$$

où u_i et w_i sont les variables internes respectivement du problème global et local, et t un instant donné. De plus, le couplage entre les problèmes global et le local est intégré sur les variables primales et duales :

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \boldsymbol{\Gamma}_c \tag{7}$$

Les équations (1,2,3,6,7) correspondent à la formulation forte du modèle de fissuration avec contact / frottement (la loi non-linéaire d'interface est par exemple de type Coulomb). Comme cela à déjà été montré dans [8], la formulation faible à trois champs suivante pour un instant donné $t \in [0; T]$ peut être introduite :

$$0 = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{*}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^{*} d\Omega + \int_{\partial_{\boldsymbol{\sigma}}\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}^{*} dS + \int_{\Gamma_{c}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}^{*} dS + \int_{\Gamma_{c}} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{w}^{*} dS + \int_{\Gamma_{c}} (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\lambda}^{*} dS \forall \mathbf{u}^{*} \in \mathcal{U}_{0}, \forall \mathbf{w}^{*} \in \mathcal{W}, \forall \boldsymbol{\lambda}^{*} \in \boldsymbol{\Lambda}, \forall t \in [0; T]$$

$$(8)$$

et est équivalente à la formulation forte précédente (1,2,3,6,7) (voir [8]). Ici, les espaces fonctionnels ne sont pas précisés. Cette formulation faible (8) permet une formulation X-FEM globale-locale couplant les échelles de la structure (globale), de la fissure et celle des non-linéarités d'interface (locale).

Dans cet article nous couplons cette formulation avec le solveur non-linéaire LATIN ([8]), ainsi qu'une stratégie de stabilisation des efforts d'interface. En effet, le respect de la condition de stabilité LBB de la formulation mixte n'est pas toujours assuré. L'efficacité numérique du procédé de stabilisation présenté ci-après est notamment exposé dans [1] ainsi qu'une argumentation théorique du respect de cette condition.

Nous introduisons un opérateur de stabilisation sur la condition de couplage faible entre les champs U et W à la fois au premier et au second membre du système linéarisé [8]. Ici, la discrétisation en espace est effectuée par la méthode X-FEM en présence de fissures (enrichissement discontinu le long des lèvres et enrichissement asymptotique en front de fissure avec représentation de la géométrie de l'interface par deux fonctions de niveaux (voir [4, 10]). Le système linéarisé peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{u\lambda} \\ 0 & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\lambda} \\ -\mathbf{K}_{u\lambda}^{T} & \mathbf{K}_{w\lambda}^{T} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{\Lambda}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_{w\lambda} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{ww} \cdot \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}_{i} \end{pmatrix}$$
(9)

où $\mathbf{K}_{\lambda\lambda}$ est l'opérateur de stabilisation défini par :

$$\mathbf{K}_{\lambda\lambda} = -\mathbf{k}_{\Lambda} \int_{\Gamma_c} \Psi_i' \Psi_j' \, dS \tag{10}$$

L'opérateur de stabilisation local peut être appliqué sur le problème de contact normal ou/et tangentiel :

$$\mathbf{k}_{\Lambda} = \begin{bmatrix} k_{\Lambda,N} & 0\\ 0 & k_{\Lambda,T} \end{bmatrix}$$
(11)

En pratique, on choisit les deux termes égaux $\xi = k_{\Lambda,N} = k_{\Lambda,T}$. Dans les exemples suivants, le paramètre de stabilisation suivant sera utilisé :

$$\varepsilon = \frac{1}{\xi} \tag{12}$$

On peut noter que ces deux paramètres peuvent être optimisés séparément. Par exemple, sous condition de glissement, la stabilisation de la composante normale de traction permet également de stabiliser la composante tangentielle, puisque cette dernière est simplement égale à la première, multiplié par le coefficient de frottement. Toutefois, dans des conditions d'adhérence, les deux composantes de traction sont indépendantes l'une de l'autre. Ainsi, on pourrait imaginer d'optimiser automatiquement les paramètres de stabilisation normale et tangentielle en fonction de l'état du contact.

Aussi, on peut noter que cette méthode de stabilisation est effectuée pour un solveur non-linéaire, et donc cet opérateur supplémentaire ne modifie pas la solution du problème. En effet, à convergence

 $\mathbf{K}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}_i - \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}_{i+1}$ tend alors vers 0 pour un niveau donné de précision. De plus, on peut montrer que l'optimisation du paramètre de stabilisation ξ influe grandement sur la vitesse de convergence du solveur non-linéaire NLLA (Non Locking LATIN) (voir [1]).

3 Cas d'une structure plane avec interface horizontale sollicitée en compression

A travers les différents exemples présentés ci-après, nous illustrons les propriétés de stabilité du solveur NLLA et son efficacité comparées au solveur SLA (solveur LATIN non stabilisé).



FIGURE 2 – (a) Géométrie, conditions aux limites et chargement pour le problème 1 et (b) représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{U} (×10⁴).

Comme premier exemple, on considère un domaine carré Ω de dimensions $(0.1m \times 0.1m)$ (sous l'hypothèse des déformations planes) coupé en son milieu par un interface Γ et soumis à une contrainte de compression uniforme P=1 *MPa* (cf. Figure 2.a). Des conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sur la partie inférieure ($u_X = u_Y = 0$) et supérieure ($u_X=0$). Le matériau est supposé homogène, isotrope, élastique linéaire. Le module de Young est égal à E=206 *GPa* et le coefficient de Poisson à v=0.3. Le coefficient de forttement de l'interface est égal à $\mu_{\Gamma} = 0.2$. Le maillage est constitué de 722 élements finis linéaires triangulaires. Le champ de déplacement **U** est représenté Figure 2.b. La solution de contact le long de l'interface est relativement uniforme. Dans ce cas, un raffinement de l'interface n'est pas nécessaire Γ .

Les champs discrétisés d'interface primal et dual sont d'ordre 0 (avec 1 point d'intégration usr chaque face d'un élément d'interface). D'après l'indicateur d'erreur local η ([11]), le problème de contact est résolu avec une précision de 10⁻⁴. La figure 4 représente l'évolution du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre cette précision pour une plage de valeurs de la direction de recherche *k* (cette plage est estimée classiquement à partir du rapport entre le module de Young et la longueur de la fissure [11]), en comparaison avec le coefficient de stabilisation ε . On peut ainsi noter q'un taux de convergence optimal (61 itérations) est obtenu pour une direction de recherche $k = 2.10^{+13}$ Pa.m⁻¹ et un coefficient de stabilization $\varepsilon = 1.10^{+14}$ Pa.m⁻¹. Une attention spéciale est apportée au champ de force d'interface **T**.

L'effort d'interface **T** est représenté Figure 3 pour le maillage de triangles en utilisant les solveurs SLA X-FEM (non stabilisé) et NLLA X-FEM (stabilisé) respecitvement. Dans le premier cas, des oscillations sont observées dues au non-respect de la condition LBB. Dans le second cas, aucune oscillation n'est observée. Ce résultat illustre les bonnes propriétés de stabilité du solveur non-linéaire NLLA proposé dans le cas d'un problème bi-dimensionnel avec contact unilatéral. Aussi, le nombre d'itérations varie fortement en fonction de la valeur de la direction de recherche. Cependant, si la valeur de k est



FIGURE 3 – Effort d'interface T en utilisant un maillage de triangles : (a) modèle SLA X-FEM et (b) modèle NLLA X-FEM.



FIGURE 4 – nombre d'itérations à convergence (erreur $\eta = 10^{-4}$ pour différentes valeurs de la direction de recherche *k* et le paramètre de stabilisation ε en utilisant le maillage de triangles.



 $\label{eq:FIGURE 5-Evolution de l'erreur η pour des maillages de triangles (ou quadrangles non présenté ici) avec les solveurs non-linéaires SLA-X-FEM et NLLA-X-FEM.$

définie correctement on fonction du rapport évoqué précédemment, et que la valeur de ε est approximativement du même ordre de grandeur, alors le taux de convergence de la méthode est quasi optimale. Afin de compléter l'analyse de performance, l'efficacité du solveur SLA X-FEM (voir [8]) et du solveur NLLA X-FEM introduit ici sont comparés. La figure 5 montre l'évolution de l'erreur η pour chaque méthode. Ainsi, la méthode NLLA réduit significativement le coût de calcul numérique : 94 % de gain en coût de calcul est obtenu pour le maillage avec triangles.

4 Application à la fissuration 3D sous sollicitation de fretting-fatigue

Le but ici est d'appliquer la stratégie précédente afin d'illustrer le potentiel de la méthode numérique NLLA X-FEM dans le cas d'une application tridimensionnelle issue de l'ingénierie avec prise en compte d'un état de contact / frottement interfacial complexe. Ainsi, le phénomène de fissuration issu d'un chargement de fatigue-fretting dépend fortement de l'état de contact entre les lèvres des fissures. La méthode proposée est capable de prendre en compte plusieurs fissures simultanément avec un haut niveau de précision, sans oscillations numériques parasites à l'interface des fissures, quelquesoit l'amplitude du glissement et en gardant un coût de calcul numérique raisonnable.



FIGURE 6 – (a) Aire de contact de fretting circulaire avec une zone de glissement annulaire (rayon c) et deux fissures semi-elliptiques non-planes. (b) Séries de coupes métallographiques du spécimen fissuré et (c) reconstruction 3D des fissures de fretting observées (La fissure 1 est la plus profonde, et la fissure 2 la plus courte). P= 120 N, Qmax= 95 N, a= 171 μ m, c/a=0.52, coefficient de frottement sphère / plan μ =0.92

L'éprouvette utilisée pour l'expérience de fretting est modélisée par un domaine parallélépipédique en acier élastique linéaire de dimensions ($25\text{mm} \times 16\text{mm} \times 4\text{mm}$) avec les caractéristiques matériaux suivantes E = 210GPa et v = 0.3. Les conditions aux limites de Dirichlet $u_Z = 0$ sont imposées sur la surface inférieure et les mouvements de corps rigides sont bloqués. Le maillage global ($8 \times 5 \times 2\text{mm}^3$) est constitué de 46266 tétraèdres. Il est localement structuré et raffiné au voisinage de la zone de contact afin de capturer précisément les gradients de contraintes et de déformations en sous-couche (cf. figure 7). Les éléments au voisinage de la zone de contact ont une longueur caractéristique de 12 μ m et 1000 μ m sur le bord du domaine. Autrement-dit, il s'agit d'un maillage 3D non-structuré multi-échelles avec un rapport d'échelle proche de 100. La solution de contact deux corps sphère / plan (chargement de fretting), i.e. la distribution de pression p(x,y) et les contraintes tangentielles q(x,y,t_n), sont calculées dans une étape préliminaire et utilisées comme données d'entrée dans le modèle X-FEM avec fissure (voir [9]). 25 pas de temps sont utilisés ici afin de décrire les cycles de fatigue.

La forme des fissures est extraite des essais pour lesquels 70000 cycles de fretting ont été effectués (voir figure 6). La fissure 1 est située à la position $x = -170 \ \mu m$ par rapport au plan médian (y=0). La fissure 1 a une longueur de 691 μm par rapport à la surface extérieure et 246 μm de profondeur (≈ 25 éléments finis). La fissure 2 est située à la position $x = +170 \ \mu m$ par rapport au plan médian (y=0). La



FIGURE 7 – maillage de l'éprouvette $8x5x2mm^3$ (46266 tétraèdres) raffiné au voisinage de la zone de contact et discrétisation des éléments d'interface sur les fissures : 902 paires de points d'intégration.

fissure 2 a une longueur de 603 μ m de longueur en surface et 96 μ m de profondeur (≈ 10 éléments finis). La reconstruction des images 3D des fissures observées expérimentalement a été effectuée par fonctions de niveaux [9]. Ici, seulement 2 fonctions de niveaux sont nécessaires afin de décrire les fissures 1 et 2.



FIGURE 8 – représentation amplifiée du champ de déplacement global U, chargement de contact T, sglissement $-[W_T]$ et ouverture $[W_N]$ entre les faces des fissures aux instants 1, 4 et 7 du cycle de fretting.

La discrétisation de l'interface associé aux fissures est raffinée en utilisant la méthode X-FEM globale-locale présentée précédemment en correspondance avec le maillage éléments finis en volume. La taille caractéristique des éléments d'interface est de l'ordre de $l_c = 7 \mu m$. Une distribution de 902 points de Gauss par fissure est obtenue (cf. Figure 7.b). Une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb est considérée le long des lèvres des fissures avec un coefficient de frottement de $\mu_{\Gamma} = 0.5$. Ce problème tridimensionnel avec fissures non-planes frottantes et chargement de fretting-fatigue est résolu avec le solveur non-linéaire stabilisé NLLA X-FEM. Une précision de 10^{-4} est imposée en utilisant un indicateur d'erreur local spécifique η ([11]). Les valeurs de la direction de recherche et le coefficient de stabilisation sont respectivement $k = 1^{+14}$ Pa.m⁻¹ et $\varepsilon = 1^{+12}$ Pa.m⁻¹. Ici, il y a encore matière à amélioration afin d'optimiser le taux de convergence en fonction de la direction de recherche et du paramètre de stabilisation. Les solutions globales et locales du problème, ie le champ de déplacement global **U**, les forces de contact **T**, le glissement $-[\mathbf{W}_T] = \mathbf{W}_T^- - \mathbf{W}_T^+$ et l'ouverture $[\mathbf{W}_N] = \mathbf{W}_N^+ - \mathbf{W}_N^-$ entre les lèvres

des fissures sont représentés figure 8.

5 Conclusions

Dans cet article, une technique de stabilisation générale est proposée dans le cadre d'une formulation mixte à trois champs. Cette approche est inspirée des techniques de stabilisation utilisées en mécanique des fluides (par exemple formulations en pression et vitesse), ou en élasticité linéaire avec des formulation mixtes à trois champs de type Hu-Washizu [1]. en effet, il est bien établi que la stabilité et la convergence optimale des formulations mixtes est assez difficile à obtenir. Dans ce but, un terme de pénalité est introduit dans la formulation mixte à trois champs discrétisée afin de stabiliser le champ de forces de contact (très similaire à la stabilisation de la pression pour le problème de Stokes). Des tentatives avaient déjà été effectuées avec succès pour des formulations mixtes à deux champs avec des multiplicateurs de Lagrange pour des problèmes de contact sans frottement avec X-FEM, et également une méthode de pénalité pour les problèmes de contact frottants [13]. Ici, le procédé de stabilisation est effectué dans le cadre général d'une formulation mixte à trois champs pour traiter dans un cadre unifié à la fois les problèmes de contact sans ou avec frottement et dans une approche X-FEM globale / locale, permettant une modélisation intrinsèque de l'interface avec ses propres variables primales et duales et sa propre discrétisation indépendamment du maillage en volume. Ceci est notamment adapté aux applications issues de l'ingénierie comme les problèmes de fissuration de fatigue tridimensionnels avec états de contacts complexes le long des lèvres des fissures.

Références

- [1] A. Gravouil, E. Pierres, M.C. Baietto. *Stabilized global-local X-FEM for 3D non-planar frictional crack using relevant meshes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Submitted in October 2010.
- [2] M. Duflot. A study on the representation of cracks with level sets, Int. J. Numer. Methods Eng, 1261–1302, 2007.
- [3] T. Elguedj, A. Gravouil, A. Combescure. A mixed augmented Lagrangian-extended finite element method for modelling elastic-plastic fatigue crack growth with unilateral contact, Int. J. Numer. Methods Eng, 1569–1597, 2007.
- [4] A. Gravouil, N. Moes, T. Belytschko. *Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets Part 2 : Level set update*. Int. J. Numer. Methods Eng, 2569–2586, 2002.
- [5] N. Moes, A. Gravouil, T. Belytschko. *Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets Part I : Mechanical model*. Int. J. Numer. Methods Eng., 2549–2568, 2002.
- [6] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko. A Finite Element method for crack growth without remeshing. Int. J. Numer. Methods Eng, 131–150, 1999.
- [7] J.-C Passieux, A. Gravouil, J. Réthoré, M.-C. Baietto. *Direct estimation of generalized SIF using a three-scale concurrent multigrid X-FEM*. Int. J. Numer. Methods Eng., DOI: 10.1002/nme.3037, 2010.
- [8] E. Pierres, M.-C. Baietto, A. Gravouil. A two-scale eXtended Finite Element Method for modeling 3D crack growth with interfacial contact, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1165–1177, 2010.
- [9] E. Pierres, M.-C. Baietto, A. Gravouil. *3D experimental and X-FEM frictional contact fatigue crack model. Prediction of fretting problems.* Comptes Rendus Mecaniques, submitted for review. 2011.
- [10] J. Rannou, A. Gravouil, M.-C. Baietto Dubourg. A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. Int. J. Numer. Methods Eng., 1641–1669, 2008.
- [11] R. Ribeaucourt, M.-C Baietto Dubourg, A. Gravouil. A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled XFEM/LATIN method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3230–3247, 2007.
- [12] Ladeveze P., Nonlinear Computational Structural Mechanics New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. Springer-Verlag, 220 p., 1999.
- [13] LIU F., BORJA R., Stabilized low-order finite elements for frictional contact with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37-40), 2456-2471, 2010.