HAL
open science

Modélisation discrète des mouvements de foule. Application à l'interaction foule-structure.

Philippe Pécol, Stefano Dal Pont, Silvano Erlicher, Pierre Argoul

To cite this version:

Philippe Pécol, Stefano Dal Pont, Silvano Erlicher, Pierre Argoul. Modélisation discrète des mouvements de foule. Application à l'interaction foule-structure.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592834

HAL Id: hal-00592834

https://hal.science/hal-00592834

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Modélisation discrète des mouvements de foule. Application à l'interaction foule-passerelle

P. Pécol[1], S. Dal Pont[2], S. Erlicher[3], P. Argoul[1]

[1] *Université Paris-Est, Laboratoire Navier (ENPC/IFSTTAR/CNRS), Ecole des Ponts ParisTech, France, {philippe.pecol,pierre.argoul}@enpc.fr*
[2] *Université Paris-Est, IFSTTAR/ENPC, France, dalpont@lcpc.fr*
[3] *IOSIS Industries, France, silvano.erlicher@enpc.fr*

Résumé — L'objectif de ce travail est de modéliser le mouvement des piétons en considérant les interactions locales piéton-piéton et piéton-obstacle ainsi qu'un couplage piéton-passerelle pour gérer le phénomène de synchronisation. Le modèle de Frémond utilisé pour représenter le mouvement 2D des grains est adapté à la foule par l'introduction de forces sociales et de vitesses souhaitées. Concernant le couplage piéton-structure, une équation différentielle de Kuramoto permet de gérer l'évolution de la phase des piétons. Des simulations numériques sur la passerelle du Millénium sont commentées.

Mots clés — Assemblée de grains, foule, contact, interaction foule-structure, synchronisation.

1 Introduction

Plusieurs passerelles, construites récemment selon des critères architecturaux d'élancement et de légèreté, telles que la passerelle du Millénium à Londres et la passerelle de Solferino à Paris, se sont montrées sensibles à l'excitation induite par le passage de piétons. Plusieurs campagnes de mesures expérimentales ont permis de mieux comprendre ce phénomène : la foule se déplaçant sur une passerelle lui impose une excitation latérale qui a une fréquence proche de $1Hz$. Lorsqu'un mode latéral de vibration du pont, souvent le premier, a une fréquence proche de cette valeur, un phénomène de résonance est activé, entraînant l'augmentation de l'amplitude des oscillations de la passerelle. Si le nombre de piétons est faible, l'amplitude des oscillations reste faible et les piétons continuent à marcher comme ils le feraient sur un sol rigide. Par contre, si ce nombre dépasse un certain nombre critique, l'amplitude des oscillations devient suffisamment grande pour que les piétons soient incités à changer leur manière de marcher afin de conserver leur équilibre, notamment leur fréquence de marche, jusqu'au moment où il s'initie une synchronisation en fréquence entre piétons et structure. La densité de la foule est un autre facteur influençant le comportement du piéton. En effet, pour une foule de faible densité, chaque individu peut marcher librement comme s'il était seul. Au contraire, si la densité de la foule est élevée, chaque piéton a une marche contrainte par son entourage qui l'oblige à marcher au même rythme que les autres. Cette synchronisation piéton-piéton existe aussi sur sol rigide. Actuellement, très peu d'études prennent en compte ces deux types de synchronisation simultanément.
Dans cette communication, une première partie concerne la représentation de la foule. Pour prendre en compte le mouvement d'oscillation d'un individu pendant la marche, une force sinusoïdale représentant l'action du piéton sur le sol est utilisée. Cette force permet de définir l'accélération des oscillations de chaque piéton autour de sa trajectoire. Pour exprimer l'accélération de chaque piéton selon sa trajectoire, le modèle de Frémond [8, 9] utilisé pour représenter le mouvement 2D des grains rigides permet de gérer les interactions locales piéton-piéton et piéton-obstacle, et son adaptation à la foule [18, 19] donne une trajectoire souhaitée à chaque piéton. Dans une seconde partie, le modèle d'interaction foule-structure est exprimé dans le cas des oscillations latérales d'une passerelle. La synchronisation de la fréquence de marche de chaque piéton avec la fréquence d'oscillation latérale du système "foule-passerelle" est réalisée grâce à l'utilisation d'une équation différentielle de type Kuramoto permettant de gérer la phase de la force de marche de chaque piéton. Dans une dernière partie, des résultats de simulations numériques sont présentés sur l'exemple de la travée Nord de la passerelle du Millénium.

2 Représentation de la foule

Nous souhaitons modéliser le chargement dynamique de la foule sur une structure vibrante afin d'étudier le phénomène de synchronisation piéton-structure. Le corps humain, qui est un système mécanique très complexe, composé de plusieurs parties en interaction réciproque, peut être modélisé suivant le degré de raffinement souhaité et les objectifs à atteindre. Dans [10], chaque partie du squelette du corps humain est représentée par un corps rigide connecté aux autres par des ressorts et amortisseurs et avec des couples qui imposent le mouvement relatif entre les corps rigides de façon à reproduire l'action de la marche. Dans [17, 21], le corps humain est schématisé comme un ensemble de masses, ressorts et amortisseurs, et chaque partie du modèle représente grossièrement une certaine partie du corps dans le but de reproduire la force verticale d'impact d'un pied sur le sol pendant un pas.
Le corps humain peut être aussi représenté simplement par une seule masse en interaction avec le sol. C'est l'expression de la force échangée entre l'individu et le sol qui différencie les modèles. Erlicher et al. [7] ont proposé un oscillateur auto-entretenu à un degré de liberté capable de prédire avec précision la force latérale générée par un piéton. Dans [1, 20], l'action du piéton sur une passerelle est représentée par une force latérale sinusoïdale de module 35N et dont la phase totale est gérée par une équation différentielle de type Kuramoto. Bodgi [2] s'est inspirée de ce modèle pour réaliser le couplage piéton-structure. Les connaissances de la trajectoire de chaque piéton et de son effet sur la structure sont suffisantes pour notre étude sur la synchronisation. Nous représentons alors un piéton i par une masse m_i, i.e. la masse totale de son corps, supposée concentrée au centre de gravité du piéton et soumise à la force d'inertie, à la gravité et à la force échangée entre le piéton et le sol. Dans un repère Galiléen $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, le principe fondamental de la dynamique appliqué à chaque piéton i donne :

$$m_i\, \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{abs}}(\mathbf{q_i}, t) + \mathbf{F_i}(\mathbf{q_i}, t) = m_i \mathbf{g} \tag{1}$$

où le point superposé indique la dérivation par rapport au temps ; $\mathbf{g}$ est le vecteur de l'accélération de gravité ; $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{abs}}(\mathbf{q_i}, t)$ est l'accélération absolue de m_i ; et $\mathbf{q_i}$ est la position du piéton i dans le repère Galiléen ; et $\mathbf{F_i}(\mathbf{q_i}, t)$ est la force échangée par le piéton i avec le sol.
L'expression de cette accélération absolue est :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{abs}}(\mathbf{q_i}, t) &= \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{ent}}(\mathbf{q_i}, t) + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{rel}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{cor}}(t) \\ &= \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{ent}}(\mathbf{q_i}, t) + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{tr}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{osc}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{cor}}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

où $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{ent}}(\mathbf{q_i}, t)$, $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{rel}}(t)$ et $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{cor}}(t)$ sont respectivement les accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis de m_i ; $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{tr}}(t)$ est l'accélération du piéton i selon sa trajectoire moyenne par rapport au sol ; $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{osc}}(t)$ est l'accélération des oscillations du piéton autour de sa trajectoire moyenne, oscillations dues à sa façon naturelle de marcher.
Nous choisissons de négliger l'accélération de Coriolis de chaque piéton i, $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{cor}}(t) = \mathbf{0}$. Dans la suite, nous donnons les expressions de $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{tr}}(t)$ et $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{osc}}(t)$ qui composent l'accélération relative du piéton i. Pour cela, nous considérons le sol rigide et nous nous plaçons dans le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

2.1 Expression de $\ddot{\mathbf{u}}_i^{osc}(t)$

Lorsqu'un piéton se déplace en marchant sur un sol rigide, son centre de gravité oscille autour de sa trajectoire moyenne. Ainsi, pour définir l'accélération des oscillations du piéton i autour de sa trajectoire $\ddot{\mathbf{u}}_i^{osc}(t)$, nous considérons le cas où le piéton marche sur place. Nous supposons que les forces $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{osc}}(t)$ appliquées par les deux jambes du piéton sur le sol fixe sont identiques. L'équation (1) dans le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ devient :

$$m_i\, \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{osc}}(t) + \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{osc}}(t) = \mathbf{0} \tag{3}$$

Comme chaque piéton marche sur un plan, la force appliquée par le piéton i sur le sol a une composante normale $\mathbf{F}_{N,i}^{osc}$ et une composante tangentielle $\mathbf{F}_{T,i}^{osc}$ à son mouvement. Nous supposons que chaque piéton exerce une force sinusoïdale sur la passerelle [2, 20]. Comme la fréquence de $\mathbf{F}_{T,i}^{osc}$ est le double de la fréquence de $\mathbf{F}_{N,i}^{osc}$ [2], l'expression de $\mathbf{F}_i^{osc}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{osc}(t) &= F_{T,i}^{osc}(t)\mathbf{e}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{tr}}(t) + F_{N,i}^{osc}(t)\mathbf{e}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{tr},\perp}(t) \\ &= T_i \sin(2\phi_i(t))\, \mathbf{e}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{tr}}(t) + N_i \sin(\phi_i(t))\mathbf{e}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{tr},\perp}(t) \end{aligned} \tag{4}$$

où T_i (resp. N_i) est l'amplitude maximale de $F_{T,i}^{osc}$ (resp. $F_{N,i}^{osc}$) ; $\mathbf{e_i^{tr}}$ (resp. $\mathbf{e_i^{tr,\perp}}$) est le vecteur directeur unitaire tangent (resp. normal) au mouvement du piéton i, $\mathbf{e_i^{tr}} = \frac{\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{i}^{\mathbf{tr}}(t)}{\|\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{i}^{\mathbf{tr}}(t)\|}$ avec $\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{i}^{\mathbf{tr}}(t)$ la vitesse du piéton i selon sa trajectoire moyenne par rapport au sol ; et $\phi_i(t)$ est la phase totale de la force de marche générée par le piéton i sur le sol, tel que $\dot{\phi}_i(t) = \omega_i$ où ω_i est la fréquence angulaire latérale de sa marche libre.
D'après (3) et (4), $\ddot{\mathbf{u}}_i^{osc}(t)$ est déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\ddot{\mathbf{u}}_i^{osc}(t) = -\frac{1}{m_i}\left(T_i \sin(2\phi_i(t))\,\mathbf{e_i^{tr}}(t) + N_i \sin(\phi_i(t))\mathbf{e_i^{tr,\perp}}(t)\right) \tag{5}$$

2.2 Expression de $\ddot{\mathbf{u}}_\mathbf{i}^{\mathbf{tr}}(t)$

Pour déterminer l'accélération $\ddot{\mathbf{u}}_\mathbf{i}^{\mathbf{tr}}(t)$ de chaque piéton i selon sa trajectoire moyenne, nous devons contrôler les mouvements des N piétons dans le plan en prenant en compte les interactions locales piéton-piéton et piéton-obstacles. Nous utilisons le modèle de foule microscopique présenté dans [18, 19] pour obtenir $\ddot{\mathbf{u}}_\mathbf{i}^{\mathbf{tr}}(t)$. Il est fondé sur le modèle proposé par Frémond [8, 9] pour modéliser le mouvement de grains rigides, et adapté à la foule.
Dans une première partie, nous présentons le modèle de Frémond. Il est basé sur la théorie des collisions des corps rigides et s'inspire des travaux de Moreau [15]. Les aspects numériques ont été développés dans [5, 6].
Dans ce modèle, l'ensemble des N particules est considéré comme un système déformable constitué de solides indéformables. Chaque particule i est rigide, circulaire, de rayon r_i et de masse m_i. Nous introduisons : $\Delta_{ij}(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}})$ la vitesse relative de déformation entre deux particules i et j, $\Delta_{ij}(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}) = \dot{\mathbf{u}}_i^{\mathbf{tr}}(t) - \dot{\mathbf{u}}_j^{\mathbf{tr}}(t)$; $\mathbf{M}$ la matrice de masse des particules de dimension $2N \times 2N$; $\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}$ le vecteur vitesse de dimension $2N$, ${}^t\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}} = ({}^t\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{1}^{\mathbf{tr}}, {}^t\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{2}^{\mathbf{tr}}, ..., {}^t\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{N}^{\mathbf{tr}})$; les indices $-$ et $+$ référant aux valeurs avant et après collisions ; $\mathbf{f}^{ext}$ (resp. $\mathbf{f}^{int}$) le vecteur des forces extérieures (resp. intérieures) appliquées sur le système, de dimension $2N$. Les équations de mouvement du système sont :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}(t) = -\mathbf{f}^{int}(t) + \mathbf{f}^{ext}(t) \quad \text{presque partout} \tag{6}$$

$$\mathbf{M}\left(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+}(t) - \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-}(t)\right) = -\mathbf{p}^{int}(t) + \mathbf{p}^{ext}(t) \quad \text{partout} \tag{7}$$

L'équation (6) est appliquée presque partout, excepté à l'instant de la collision où elle est remplacée par l'équation (7). La vitesse des particules en collision est discontinue et nous introduisons dans l'équation (7) des percussions $\mathbf{p^{int}}$ et $\mathbf{p^{ext}}$, respectivement intérieures et extérieures au système. Par définition, ces percussions ont la dimension d'une force multipliée par un temps. Les percussions $\mathbf{p^{int}}$ sont inconnues ; elles prennent en compte les interactions dissipatives entre les particules en collision (percussions dissipatives), et les forces de réaction permettant d'éviter le chevauchement entre particules (percussions réactives). Frémond [8, 9] montre que les percussions intérieures sont définies en dualité avec la vitesse de déformation à l'instant de l'impact $\frac{\Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+})+\Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-})}{2}$, dans le sens du travail des forces intérieures. $\mathbf{p^{int}}$ dépend de $\frac{\Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+})+\Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-})}{2}$, et Frémond [8, 9] utilise un pseudopotentiel de dissipation Φ (fonction convexe [14]) définie par : $\Phi = \Phi^{diss} + \Phi^{reac}$, où Φ^{diss} et Φ^{reac} sont deux pseudopotentiels qui définissent les percussions intérieures dissipatives et réactives respectivement, pour exprimer ces quantités :

$$\mathbf{p^{int}} \in \partial\Phi\left(\frac{\Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+}) + \Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-})}{2}\right) \tag{8}$$

où l'opérateur ∂ est le sous différentiel qui généralise la dérivée des fonctions convexes [9]. Le pseudopotentiel Φ^{diss} est choisi quadratique : $\Phi^{diss} = \frac{K}{2}\left(\frac{\Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+})+\Delta(\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-})}{2}\right)^2$ où K est un coefficient de dissipation. Ce choix permet de retrouver les résultats classiques du coefficient de restitution. D'autres choix de Φ^{diss} permettent de trouver une grande variété de comportement après impact [3, 9].
Le problème dans l'équation (7) est de trouver $\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+}$. Pour trouver la vitesse des particules après collision $\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+}$, le problème de minimisation sous contrainte suivant doit être résolu :

$$\boxed{\dot{\mathbf{v}} = \underset{\dot{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^{2N}}{\arg\min}\ \left[{}^t\dot{\mathbf{w}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{w}} + \Phi(\Delta\dot{\mathbf{w}}) - {}^t(2\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p^{ext}})\mathbf{M}\dot{\mathbf{w}}\right]} \tag{9}$$

où la solution est $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+} + \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-}}{2}$.
L'existence et l'unicité de la solution sont démontrés dans [6, 8, 9] et le problème de minimisation (9) est numériquement résolu en utilisant un schéma "time-stepping" et l'algorithme classique d'Uzawa [6]. Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de contact, l'équation (6) donne directement la valeur réelle de $\ddot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}(t)$. Lorsqu'un contact est détecté, l'équation (7) donne une valeur approchée de $\ddot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}(t)$ après la détermination de $\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+}$:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}(t) \simeq \frac{\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},+}(t) - \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr},-}(t)}{h} \tag{10}$$

où h est le pas de temps choisi pour le schéma numérique.

Dans une seconde partie, nous expliquons comment le modèle de mouvement de grains rigides de Frémond est adapté à la foule. La première étape est de donner une trajectoire souhaitée à chaque grain. La stratégie du chemin le plus court pour se déplacer d'un point à un autre [13] est implémentée avec un algorithme de Fast Marching et est utilisée pour obtenir la direction désirée, $\mathbf{e}^{\mathbf{tr}}_{\mathbf{d},\mathbf{i}}(t)$, d'un individu i. Cette direction dépend de l'espace d'évolution (obstacles, etc.), du temps et des caractéristiques de l'individu (genre, âge, pressé ou pas, etc.). Elle est définie par : $\mathbf{e}^{\mathbf{tr}}_{\mathbf{d},\mathbf{i}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}_{\mathbf{d},\mathbf{i}}(t)}{\|\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}_{\mathbf{d},\mathbf{i}}\|}$, où $\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}_{\mathbf{d},\mathbf{i}}(t)$ est la vitesse souhaitée du piéton i.
L'amplitude $\|\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}_{\mathbf{d},\mathbf{i}}\|$ de la vitesse souhaitée représente l'allure à laquelle le piéton i veut se déplacer sur la structure considérée. Elle dépend de la longueur de pas souhaitée $L_{step,0,i}$ du piéton i et de la fréquence angulaire latérale ω_i de sa marche libre souhaitée [2] :

$$\|\dot{\mathbf{u}}^{tr}_{d,i}\| = \frac{L_{step,0,i}}{\pi}\omega_i \tag{11}$$

La seconde étape est d'introduire les vitesses souhaitées de chaque piéton i dans le modèle de mouvement de grains pour obtenir le modèle de foule. Pour cela, nous posons : $\mathbf{f}^{ext}(t) = \mathbf{f}^{ext}_a(t)$, où la force d'accélération extérieure $\mathbf{f}^{ext}_a(t)$ [11] permet de donner la direction souhaitée et l'intensité de la vitesse de chaque piéton. Chaque composante générique $\mathbf{f}^{ext}_{a,i}(t)$ de la force : ${}^t\mathbf{f}^{ext}_a = ({}^t\mathbf{f}^{ext}_{a,1}, {}^t\mathbf{f}^{ext}_{a,2}, \ldots, {}^t\mathbf{f}^{ext}_{a,N})$ de dimension $2N$, est associé au piéton i et a pour expression :

$$\mathbf{f}^{ext}_{a,i}(t) = m_i \frac{\|\dot{\mathbf{u}}^{tr}_{d,i}\|\mathbf{e}^{tr}_{d,i}(t) - \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{tr}}_i(t)}{\tau_i} \tag{12}$$

où τ_i est un temps de relaxation, permettant au piéton de retrouver sa vitesse souhaitée après contact. Plus la valeur de τ_i est petite, plus l'agressivité du piéton pour retrouver sa vitesse désirée est grande [12, 19].
Le comportement du piéton peut être enrichi avec l'ajout d'autres forces sociales extérieures [12, 16] dans $\mathbf{f}^{ext}(t)$ afin qu'il soit le plus réaliste possible (forces socio-psychologique, attractive, pour former des groupes, etc.).

3 Interaction foule-passerelle

Nous considérons la marche de N piétons sur une passerelle de longueur L et de largeur l, dont le mouvement est gouverné par ses oscillations latérales. Plusieurs hypothèses sont faites : le tablier de la passerelle est plan et horizontal ; l'axe principal longitudinal de la passerelle est rectiligne, selon $\mathbf{e_1}$; les oscillations de la passerelle sont dans le plan horizontal ; les oscillations longitudinales sont négligées ; les déplacements du tablier sont supposés constant selon $\mathbf{e_2}$, vecteur directeur unitaire du mouvement latéral de la passerelle ; les déplacements latéraux du tablier sont petits.
Ainsi on définit un système de coordonnées cartésiennes avec l'axe x parallèle à l'axe principale, l'axe z vertical et l'axe y orienté en accord avec les deux autres ; la structure a un comportement géométriquement linéaire ; et le déplacement latéral de la passerelle a pour expression : $\mathbf{U}(\mathbf{q},t) = U_y(x,t)\mathbf{e}_2$.
La réponse d'une structure linéaire peut être décomposée en la somme de réponses modales. Pour la composante latérale, en se limitant aux N_m premiers modes, nous trouvons :

$$U_y(x,t) = \sum_{j=1}^{N_m} \psi_j(x) U_{y,j}(t) \tag{13}$$

où $\psi_j(x)$ est la $j^{ème}$ forme modale et $U_{y,j}(t)$ est la $j^{ème}$ coordonnée modale du déplacement latéral de la passerelle.
Nous introduisons une nouvelle hypothèse. L'excitation latérale du piéton due à la marche a une fréquence toujours proche de $0.9-1\ Hz$, ainsi on accepte que seulement le mode latéral, avec la fréquence la plus proche de celle de la marche, soit suffisant pour représenter correctement la dynamique de la passerelle :

$$U_y(x,t) \simeq \psi_1(x)U_y(t) \tag{14}$$

où $U_y(t) = A_y(t)\sin(\psi_{str}(t))$ est le déplacement modal latéral de la passerelle avec la phase instantanée $\psi_{str}(t)$ et l'amplitude instantanée $A_y(t)$, et $\psi_1(x)$ est la première forme modale latérale de la passerelle normée par : $\max(\psi_1(x)) = 1$.

L'équation de la dynamique de la passerelle projetée sur son premier mode latéral de vibration s'écrit :

$$M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = \sum_{i=1}^{N}\psi_1(x_i)F_{y,i}(x_i,t) \tag{15}$$

où M_{str}, C_{str} et K_{str} sont respectivement la masse, l'amortissement et la raideur modales du premier mode latéral de la passerelle et où $F_{y,i}(x_i,t)$ est la projection selon y de $\mathbf{F_i}(x_i,t)$ présent dans l'équation (1).
L'accélération d'entraînement présente dans l'équation (2) est déterminée par :

$$\ddot{\mathbf{u}}^{\mathbf{ent}}(x,t) = \psi_1(x)\ddot{U}_y(t)\mathbf{e}_2 \tag{16}$$

Le phénomène de synchronisation peut être vu comme une adaptation de la fréquence de la force générée par un piéton sur le tablier de la passerelle à la fréquence du système "piétons-structure". Nous choisissons d'utiliser une équation différentielle de Kuramoto [20], dans laquelle nous introduisons la forme modale $\psi_1(x)$, pour gérer l'évolution de la phase totale $\phi_i(x_i,t)$ (cf Eq. (4)) de la force de marche générée par le piéton i sur la structure. Cette équation différentielle permet à la fréquence angulaire instantanée du piéton de converger vers celle de la structure :

$$\frac{\partial\phi_i(x_i,t)}{\partial t} = \omega_i + \varepsilon_i\, A_y(t)\psi_1(x_i)\sin(\psi_{str}(t) - \phi_i(x_i,t) + \alpha) \tag{17}$$

où ε_i quantifie la sensibilité du piéton i aux oscillations de la passerelle, sa valeur ayant été estimée par Strogatz [20] en comparant ses simulations numériques (sans forme modale) avec des résultats expérimentaux réalisés sur la passerelle du Millénium [4] ; et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ [2, 20] permet d'avoir la force latérale exercée par le piéton i sur le sol en phase avec la vitesse latérale de la passerelle lorsqu'il y a synchronisation.
Pour une marche sur un sol rigide, l'équation précédente se réduit à : $\dot{\phi}_i(t) = \omega_i$.
Ainsi l'expression de $F_{y,i}(x_i,t)$ est la suivante :

$$F_{y,i}(x_i,t) = -m_i\psi_1(x_i)\ddot{U}_y(t) - m_i\ddot{u}^{tr}_{y,i}(t) + T_i\sin(2\phi_i(x_i,t))\sin(\theta_i(t)) + N_i\sin(\phi_i(x_i,t))\cos(\theta_i(t)) \tag{18}$$

où $\theta_i(t)$ est l'angle formé par $\mathbf{e_i^{tr}}(t)$ et la direction $\mathbf{e_1}$ de l'axe longitudinal de la passerelle .

Pour prendre en compte les oscillations de la structure dans le modèle de mouvement de foule, l'amplitude de la vitesse désirée du piéton i de l'équation (11) est modifiée. Cette amplitude notée $\|\dot{\mathbf{u}}^{tr}_{d,i}\|_{mod}(x_i,t)$ dépend de $A_y(t)$, $\psi_1(x_i)$ et $\psi_{str}(t)$ à travers la longueur de pas instantanée $L_{step,i}(x_i,t)$, et de la fréquence angulaire instantanée $\frac{\partial\phi_i(x_i,t)}{\partial t}$ du piéton i :

$$\|\dot{\mathbf{u}}^{tr}_{d,i}\|_{mod}(x_i,t) = \frac{L_{step,i}(x_i,t)}{\pi}\frac{\partial\phi_i(x_i,t)}{\partial t} \tag{19}$$

Nous proposons deux expressions de la longueur de pas instantanée du piéton i [18] :

$$L_{step,i}(x_i,t) = \begin{cases} L_{step,0,i} & \text{sans décélération} \\ \text{ou} & \\ L_{step,0,i}\max\left(0, 1 - \frac{A_y(t)\psi_1(x_i)}{A_{max,i}}\right) & \text{avec décélération} \end{cases} \tag{20}$$

où $A_{max,i}$ est l'amplitude maximale du déplacement latéral de la passerelle que le piéton i peut supporter. Lorsqu'on choisit que les piétons décélèrent en fonction du déplacement latéral de la passerelle, le piéton i s'arrête de marcher quand $A_y(t)\psi_1(x_i)$ atteint $A_{max,i}$.

4 Simulations

Les essais réalisés par Arup [4] sur la travée Nord de la passerelle du Millénium ont montré que lorsque la fréquence moyenne des piétons est égale à la fréquence modale de la structure seule (1.03 Hz), le nombre critique de piétons N_c à partir duquel la synchronisation en fréquence entre une partie de la foule et la structure risque de se déclencher est : $N_c = 166$ piétons. Nous avons essayé de retrouver ce résultat avec le modèle d'interaction proposé précédemment.
Nous considérons le cas où les piétons traversent la travée Nord de la passerelle du Millénium de Londres et présentons les résultats obtenus dans le cas où les piétons sont sensibles au déplacement latéral de la passerelle. Pour chaque simulation, le nombre de piétons sur la structure est constant et les piétons se déplacent tous suivant la même direction. Lorsqu'un piéton sort par un côté de la passerelle, un piéton similaire entre par l'autre côté avec une position aléatoire le long de l'axe y. Les différents paramètres utilisés dans les simulations sont répertoriés dans le tableau 1.

Paramètres concernant les piétons		Paramètres concernant la passerelle	
symbole	valeur	symbole	valeur
r_i	répartition aléatoire dans $[0.2m,\ 0.25m]$	L	81 m
m_i	$500\pi r_i^2\ kg$	l	4 m
$L_{step,0,i}$	distribution normale : moyenne 0.71 m écart type 0.071 m	M_{str}	113000 kg
N_i	35 N	C_{str}	11000 $kg\ s^{-1}$
T_i	120 N	K_{str}	4730000 $kg\ s^{-2}$
ω_i	distribution normale : moyenne $2\pi \times 1.03\ rad\ s^{-1}$ écart type $2\pi \times 0.094\ rad\ s^{-1}$	$U_{y,0}$	0 m
$A_{max,i}$	0.2 m	$\dot{U}_{y,0}$	0 $m.s^{-1}$
$\phi_{0,i}$	répartition aléatoire dans $[-\pi,\ \pi]$ avec pour valeur moyenne 0	$\psi_1(x)$	avec forme modale : $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ sans forme modale : 1
ε_i	16 $m^{-1}.s^{-1}$ (estimée dans [20] sans forme modale)		

TABLE 1 – Paramètres utilisés dans les simulations.

Nous avons réalisé des simulations de 600 secondes en considérant les nombres de piétons suivant : N = 100, 150, 170, 180, 210, 250, 300 et 400. Pour chaque nombre de piétons, nous avons étudié l'influence de la forme modale et de la décélération des piétons (cf Eq. (20)) sur le déclenchement de la synchronisation. Pour chaque cas étudié, plusieurs simulations ont été réalisées avec des tirages différents des paramètres. Pour chaque simulation où les dernières secondes de simulation correspondent à l'état stationnaire, la synchronisation a été atteinte.
La figure 1 montre des exemples de résultats de non synchronisation et de synchronisation, obtenus dans le cas suivant : sans forme modale et sans décélération. Les figures 1 a. et b. présentent un cas de non synchronisation obtenu avec 100 piétons traversant la structure. Le déplacement latéral de la passerelle reste très faible et les piétons ne synchronisent pas leur fréquence de marche avec celle du système "piétons-passerelle". Les figures 1 c. et d. montrent un cas de synchronisation obtenu avec 300 piétons traversant la structure. Le déplacement latéral de la passerelle atteint 0.15 m et les piétons synchronisent leur fréquence de marche avec celle du système "piétons-passerelle".
Le tableau 2 illustre les premiers résultats trouvés sur le phénomène de synchronisation. Il donne le nombre d'essais où le phénomène de synchronisation est détecté par rapport au nombre d'essais effectués, en fonction du nombre de piétons présents sur la passerelle et de la prise en compte ou non de la forme modale et de la décélération des piétons. On retrouve que lorsque la forme modale n'est pas prise en compte, i.e. le piéton à l'extrémité de la travée ressent les mêmes oscillations que celui qui est à mi-travée, la synchronisation est favorisée. Le nombre de piétons se synchronisant est plus élevé, par conséquent l'amplitude de la force engendrée par les piétons aussi. Nous remarquons aussi que la prise en compte de la décélération défavorise la synchronisation uniquement lorsque la forme modale est

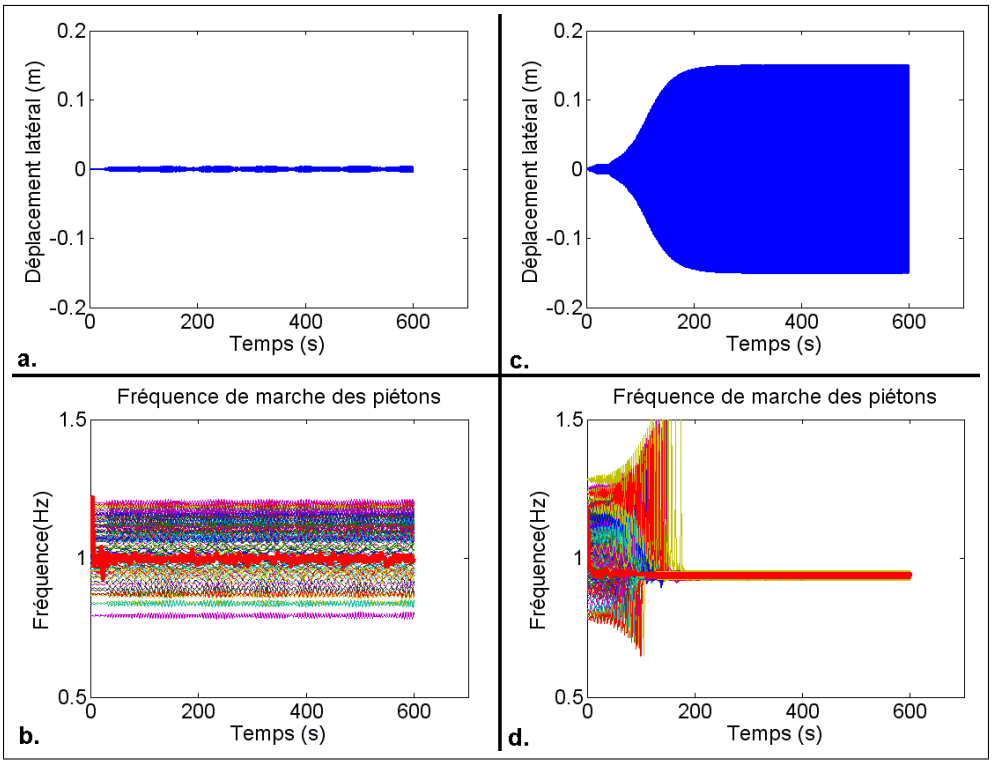

FIGURE 1 – Mise en évidence du phénomène de synchronisation dans le cas sans forme modale et sans décélération. Les figures a. et b. (resp. c. et d.) présentent les résultats obtenus avec 100 piétons (resp. 300 piétons) - a. et c. représentent l'évolution dans le temps du déplacement latéral de la passerelle ; b. et d. représentent l'évolution dans le temps des fréquences de marche des piétons sur la structure. La courbe rouge en gras représente la fréquence instantanée du système "piétons-passerelle"

Nombre de piétons	Nombre d'essais : effectués / synchronisés			
	Sans forme modale		Avec forme modale	
	Sans DEC	Avec DEC	Sans DEC	Avec DEC
100	5 / 0	4 / 0	4 / 0	3 / 0
150	5 / 3	3 / 2	4 / 0	3 / 0
170	5 / 3	3 / 2	4 / 0	3 / 0
180	5 / 3	3 / 3	4 / 0	3 / 0
210	4 / 4	3 / 3	4 / 0	3 / 0
250	4 / 4	3 / 3	4 / 2	2 / 0
300	4 / 4	4 / 4	4 / 2	2 / 1
400		1 / 1	1 / 1	1 / 1

TABLE 2 – Résultats obtenus sur le phénomène de synchronisation. (DEC signifie "décélération")

prise en compte. Si l'on s'intéresse au nombre critique, en ne prenant pas en compte la forme modale, nous retrouvons le résultat donné par Abrams dans [1], autour de 150 piétons. La prise en compte de la forme modale donne un nombre critique autour de 250 piétons. Cette valeur importante de N_c vient certainement d'un choix de ε_i non adapté à la situation avec forme modale.

5 Conclusion

Cet article présente un modèle discret 2D de mouvement de foule sur sol rigide obtenu à partir de l'adaptation d'un modèle granulaire basé sur la théorie des collisions des corps rigides développé par Frémond. Ce modèle est ensuite adapté à l'interaction foule-passerelle. Une équation différentielle de type Kuramoto est utilisée pour gérer l'évolution de la phase totale de la force de marche générée par chaque piéton.

L'application du modèle d'interaction sur la travée Nord de la passerelle du Millénium montre que, lorsque le paramètre de sensibilité des piétons aux oscillations de la structure est le même pour les cas sans et avec forme modale, la prise en compte de la forme modale modifie la valeur du nombre critique. D'autres simulations sont en cours pour valider complètement les observations réalisées. Deux études sont en projet : déterminer l'influence sur le phénomène de synchronisation, de la valeur du déphasage, entre la force latérale exercée par les piétons sur le sol et la vitesse latérale de la passerelle, et comparer les valeurs de l'amplitude stationnaire du déplacement latéral de la passerelle lorsqu'il y a synchronisation avec celles données par Bodgi ou Strogatz.

Références

[1] D.M. Abrams. *Two coupled oscillator models : the Millenium bridge and the chimera state*, PhD thesis, Cornell University, 2006.

[2] J. Bodgi. *Synchronisation piétons-structure : Application aux vibrations des passerelles souples*, PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.

[3] C. Cholet. *Chocs de solides rigides*, PhD thesis, Université Paris VI, 1998.

[4] P. Dallard, A.J. Fitzpatrick, A. Flint, A. Low, R.M. Ridsdill-Smith. *The millenium bridge london - problems and solutions*, The Structural Engineer, Vol. 79/8, pp. 12-17, 2001

[5] S. Dal Pont, E. Dimnet. *A theory for multiple collisions of rigid solids and numerical simulation of granular flow*, Int.J.Solids and Structures, Vol. 43/20, pp. 6100-6114, 2006.

[6] S. Dal Pont, E. Dimnet. *Theoretical approach to instantaneous collisions and numerical simulation of granular media using the A-CD^2 method*, Communications in Applied Mathematics and Computational Science -Berkeley, Vol. 3/1, pp. 1-24, 2008.

[7] S. Erlicher, A. Trovato, P. Argoul. *Modeling the lateral pedestrian force on a rigid floor by a self-sustained oscillator*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 24, pp. 1579-1604 , 2010.

[8] M. Frémond. *Rigid bodies collisions*, Physics Letters A, Vol. 204, pp. 33-41, 1995.

[9] M. Frémond. *Collisions*, Edizioni del Dipartimento di Ingegneria Civile dell' Università di Roma Tor Vergata, 2007.

[10] M.S. Garcia. *Stability, scaling and chaos in passive-dynamics gait models*, PhD thesis, Cornell University, 1999.

[11] D. Helbing, P. Molnar. *Social force model for pedestrian dynamics*, Physical Review E, Vol. 51, pp. 4282-4286, 1995.

[12] D. Helbing, I. Farkas, T. Vicsek. *Simulating dynamic features of escape panic*, Nature, Vol. 407, pp. 487-490, 2000.

[13] R. Kimmel, J.A. Sethian. *Fast marching methods for computing distance maps and shortest paths*, Technical Report 669, CPAM, University of California, Berkeley, 1996.

[14] J.J. Moreau. *Sur les lois du frottement, de la viscosité et de la plasticité*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol. 271, pp. 608-611, 1970.

[15] J.J. Moreau. *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, Non Smooth Mechanics and Applications, CISM Courses and Lectures, J.J. Moreau and P.-D. Panagiotopoulos, eds., Vol. 302, pp. 1-82, 1988.

[16] M. Moussaid, N. Perozo, S. Garnier, D. Helbing, G. Theraulaz. *The Walking Behaviour of Pedestrian Social Groups and Its Impact on Crowd Dynamics*, PLoS ONE, Vol. 4, 2010.

[17] B.M Nigg, W. Liu. *The effect of the muscle stiffness and damping on simulated impact force peaks during running*, Journal of Biomechanics, Vol. 32, pp. 849-856, 1999

[18] P. Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. *Modelling crowd-structure interaction*, Mécanique & Industries, EDP Sciences, Vol. 11, No. 6, pp. 495-504, 2010, DOI : 10.1051/meca/2010057

[19] P. Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. *Discrete approaches for crowd movement modelling*, European Journal of Computational Mechanics, Volume special issue "Structure and System Dynamics", 20 pages, submitted for publication, 2010.

[20] S. Strogatz, D. Abrams, A. McRobie, B. Eckhardt, E. Ott. *Theoretical mechanics : Crowd synchrony on the Millenium bridge*, Nature, Vol. 438, pp. 43-44, 2005.

[21] A.A. Zadpoor, A.A. Nikooyan, A.R. Arshi. *A model-based parametric study of impact force during running*, Journal of Biomechanics, Vol. 40, pp. 2012-2021, 2007