



HAL
open science

Remaillage adaptatif et contrôle d erreurs en quantité d intérêt pour la modélisation numérique de la propagation des ondes élastiques

Bing Tie

► **To cite this version:**

Bing Tie. Remaillage adaptatif et contrôle d erreurs en quantité d intérêt pour la modélisation numérique de la propagation des ondes élastiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592833

HAL Id: hal-00592833

<https://hal.science/hal-00592833>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remaillage Adaptatif et Contrôle d'Erreurs en Quantité d'Intérêt pour la Modélisation Numérique de la Propagation des Ondes Elastiques

B. Tie

LMSSMat (UMR8579 CNRS), Ecole Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, 92290 Châtenay-Malabry, France, bing.tie@ecp.fr

Résumé — On présente ici nos résultats récents sur le remaillage adaptatif et le contrôle d'erreurs en quantité d'intérêt pour la modélisation numérique de la propagation des ondes élastiques. La stratégie numérique est développée dans le cadre la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps. L'estimation *a posteriori* des erreurs pour le problème direct et le problème adjoint est obtenue par la méthode des résidus locaux. Différentes quantités d'intérêt locales en espace-temps sont proposées et utilisées pour des structures industrielles de grande taille.

Mots clefs — Remaillage adaptatif, erreurs en quantité d'intérêt, propagation des ondes élastiques.

1 Introduction

A l'heure actuelle, l'intérêt de l'adaptativité numérique n'est plus à démontrer : Des stratégies adaptatives intelligemment conçues sont des outils extrêmement puissants pour construire des modèles numériques avec une qualité contrôlée et un coût numérique optimisé. Néanmoins, malgré des avancées remarquables dans le domaine de recherche et des besoins grandissants dans l'industrie pour les méthodes adaptatives, les problèmes dynamiques constituent encore un domaine de défi pour la modélisation numérique adaptative. L'objectif de cette contribution est de présenter nos travaux de recherche récents sur la modélisation par éléments finis adaptatifs pour la propagation des ondes élastiques, et plus particulièrement le développement des outils numériques pour le remaillage adaptatif et le contrôle d'erreurs en quantité d'intérêt.

Notre solveur adaptatif est développé dans le cadre variationnel de la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps ([3]). Ce dernier garantit la stabilité inconditionnelle même si le maillage d'éléments finis évolue continuellement en temps, ce qui présente un intérêt indéniable. En effet, l'interpolation des champs de déplacement et de vitesse entre deux maillages successifs est incluse dans la formulation variationnelle de manière naturelle comme des termes qui introduisent un amortissement numérique. En plus, cet amortissement numérique permet de filtrer des bruits numériques de hautes fréquences, ce qui permet une meilleure précision pour l'intégration en temps et une capture sans oscillations numériques des fronts d'ondes. Ceci constitue évidemment un très grand avantage pour des problèmes industriels que l'on traite et qui impliquent des ondes de chocs initiés par des charges mobiles supersoniques.

Beaucoup de travaux ont été effectués pour le développement des techniques de l'estimation *a posteriori* d'erreurs utilisant la norme globale énergétique classique ou plus récemment utilisant des normes "localisées" en quantité d'intérêt ([2],[4],[5]). Parmi les méthodes classiques pour l'estimation *a posteriori* d'erreurs, une méthode des résidus locaux est considérée et utilisée ici ([1],[6]). Cette méthode est couplée à l'approche classique qui définit un état adjoint pour représenter les erreurs de discrétisation. L'état adjoint est la solution d'un problème adjoint défini en fonction des quantités d'intérêt à contrôler. En élastodynamique, les problèmes adjoints sont en fait des problèmes qui remontent dans le temps, seul le second membre des problèmes adjoints diffère du problème direct initial. Ici, on propose d'estimer les erreurs de discrétisation du problème direct en résolvant des problèmes résiduels locaux sur des patches d'éléments finis, qui sont plus fins que le maillage initial sur lequel les erreurs doivent être évaluées. Cette même technique est appliquée pour estimer les

erreurs de discrétisation du problème adjoint. En combinant ces deux estimations, des indicateurs d'erreurs en quantité d'intérêt sont obtenus.

Différentes quantités d'intérêts, globale ou locales, sont considérées ici, des stratégies adaptatives sont définies et enfin des exemples numériques sont présentés.

2 Problème modèle et méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps

On considère un problème modèle élastodynamique pour une structure $\Omega \in \mathfrak{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3) et pour un intervalle d'observation en temps $\mathfrak{S} =]0, T[$. Par soucis de simplicité, on suppose que le seul chargement extérieur auquel la structure est soumise est une force volumique f .

2.1 Formulation variationnelle espace-temps à deux champs

Dans le cadre de la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps à deux champs, la formulation variationnelle pour ce problème modèle défini dans le domaine espace-temps $S = \Omega \times \mathfrak{S}$ est la suivante :

Trouver $U = (u, v) \in V(S) \times V(S)$, tel que pour tout $W = (w_u, w_v) \in L^2(\mathfrak{S}; V(\Omega)) \times L^2(\mathfrak{S}; V(\Omega))$, on a :

$$B(U, W) = F(W) \quad (1)$$

où $V(S)$ est un espace approprié de fonctions définies sur le domaine espace-temps S et $V(\Omega)$ est l'espace classique de Sobolev des champs cinématiquement admissibles. Notons par $(\bullet, \bullet)_S$ l'intégration sur S du produit scalaire ou contracté pour deux champs vectoriels ou tensoriels, les formes bilinéaire et linéaire $B(\bullet, \bullet)$ et $F(\bullet)$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} B(U, W) &= (\rho \partial_t v, w_v)_S + (\sigma(\partial_t u), \varepsilon(w_u))_S + (\sigma(u), \varepsilon(w_v))_S - (\sigma(v), \varepsilon(w_u))_S \\ &\quad + (\rho v(0^+), w_v(0^+))_\Omega + (\sigma(u(0^+)), \varepsilon(w_u(0^+)))_\Omega \\ F(W) &= (f, w_v)_S + (\rho v(0^-), w_v(0^-))_\Omega + (\sigma(u(0^-)), \varepsilon(w_u(0^-)))_\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

où ρ est la masse volumique, $\partial_t(\bullet)$ la dérivation par rapport au temps et $(u(0^-), v(0^-))$ les conditions initiales en vitesse et en déplacement.

2.2 Formulation variationnelle discontinue en temps à deux champs

En discrétisant l'intervalle en temps \mathfrak{S} en N sous intervalles $\wp : 0 = t_0 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$, le domaine espace-temps S est subdivisé en N tranches espace-temps : $S_n = \Omega \times \mathfrak{S}_n$ avec $\mathfrak{S}_n =]t_{n-1}, t_n[$. La méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps transforme le problème variationnel (1) en celui suivant : Trouver $U_\wp \in V_\wp(S) \times V_\wp(S)$, tel que pour tout $W_\wp \in V_\wp(S) \times V_\wp(S)$, on a :

$$B_\wp(U_\wp, W_\wp) = F(W_\wp) \quad (3)$$

où $V_\wp(S)$ contient des fonctions qui peuvent être discontinues entre deux tranches espace-temps successives, c'est-à-dire qu'à l'instant t_n , et on a $V(S) \subset V_\wp(S) \subset L^2(\mathfrak{S}; V(\Omega))$. En notant par $[\bullet(t)]$ le saut en temps à l'instant t , la forme bilinéaire $B_\wp(\bullet, \bullet)$ pour ces fonctions discontinues en temps est définie comme suit :

$$B_{\varphi}(U_{\varphi}, W_{\varphi}) = B(U_{\varphi}, W_{\varphi}) + \sum_{n=1}^{N-1} ((\rho[v_{\varphi}(t_n)], w_{v,\varphi}(t_n^+))_{\Omega} + (\sigma([u_{\varphi}(t_n)]), \varepsilon(w_{u,\varphi}(t_n^+)))_{\Omega}) \quad (4)$$

Finalement, en notant par $\|U_{\varphi}(t)\|_{tot}^2 = \|v_{\varphi}(t)\|_M^2 + \|u_{\varphi}(t)\|_K^2$ l'énergie totale, qui est la somme des énergies cinétique $\|v_{\varphi}(t)\|_M^2$ et élastique $\|u_{\varphi}(t)\|_K^2$ intégrées sur Ω à l'instant t , la norme associée à la forme bilinéaire B_{φ} est la suivante :

$$\|U_{\varphi}\|_{B_{\varphi}}^2 = B_{\varphi}(U_{\varphi}, U_{\varphi}) = \frac{1}{2} (\|U_{\varphi}(T^-)\|_{tot}^2 + \|U_{\varphi}(0^+)\|_{tot}^2) + \sum_{n=1}^{N-1} \| [U_{\varphi}(t_n)] \|_{tot}^2 \quad (5)$$

3 Estimation *a posteriori* d'erreurs de discrétisation en quantités d'intérêt globale ou locales

3.1 Erreur de discrétisation et problème résiduel pour l'erreur

Le problème variationnel discontinu en temps (3) est ensuite discrétisé successivement dans chaque tranche espace-temps avec des éléments finis espace-temps et les erreurs de discrétisation sont :

$$E_{\varphi,h} = U - U_{\varphi,h} = U - U_{\varphi} + U_{\varphi} - U_{\varphi,h} \quad (6)$$

Dans cette contribution, seule l'erreur de discrétisation du problème variationnel discontinu en temps (3), notée $E_h = U_{\varphi} - U_{\varphi,h}$, est considérée. Il s'agit en effet de l'erreur de discrétisation en espace, et celle en temps $E_{\varphi} = U - U_{\varphi}$ est supposée bien contrôlée en utilisant une discrétisation en temps φ suffisamment fine. En fait, la méthode de Galerkin espace-temps est dotée d'un amortissement numérique qui filtre les bruits numériques en hautes fréquences et permet d'avoir une précision d'ordre 3 en temps. Mais pour filtrer uniquement les bruits HF et éviter que le domaine d'intérêt en fréquence soit filtré, il faut que la discrétisation en temps soit suffisamment fine ([3],[6]).

A cause de la linéarité du problème modèle, il est facile de montrer que l'erreur E_h est la solution du problème résiduel suivant :

Trouver $E_h = (e_u, e_v) \in V_{\varphi}(S) \times V_{\varphi}(S)$, tel que pour tout $W_{\varphi} \in V_{\varphi}(S) \times V_{\varphi}(S)$, on a :

$$B_{\varphi}(E_h, W_{\varphi}) = R_{\varphi,h}(W_{\varphi}) \quad (7)$$

où l'opérateur résiduel $R_{\varphi,h}(\bullet) = F(\bullet) - B_{\varphi}(U_{\varphi,h}, \bullet)$ est une forme linéaire dans l'espace dual de $V_{\varphi}(S)$, qui ne dépend que de la solution discrétisée $U_{\varphi,h}$. Le problème résiduel pour l'erreur E_h est exactement le même que le problème variationnel initial discontinu en temps (3) avec un second membre différent. Par conséquent, il ne peut pas être résolu complètement et est utilisé pour construire des stratégies pour tirer des estimations plus fiables possibles sur l'erreur E_h .

3.2 Représentation d'erreurs par états adjoints

Aujourd'hui, il est bien connu que la définition d'un problème adjoint, et par conséquent d'un état adjoint qui est sa solution, permet de relier des quantités d'intérêt, définies comme une forme linéaire $G(\bullet)$, aux sources d'erreurs $R_{\varphi,h}(\bullet)$ ([1],[2],[4],[5]). En effet, la formulation variationnelle du problème adjoint discontinu en temps est la suivante :

Trouver $\Psi_{\varphi} \in V_{\varphi}(S) \times V_{\varphi}(S)$, tel que pour tout $W_{\varphi} \in V_{\varphi}(S) \times V_{\varphi}(S)$, on a :

$$B_{\varphi}(W_{\varphi}, \Psi_{\varphi}) = G(W_{\varphi}) \quad (8)$$

Il s'agit en fait d'un problème qui remonte dans le temps et qui a pour les conditions initiales imposées à l'instant final T^- ([1],[4]). Le choix de la forme linéaire en quantités d'intérêt $G(\bullet)$ permet d'extraire des informations globale ou locale selon besoin. Lorsque l'on s'intéresse à l'erreur dans tout le domaine spatial Ω à l'instant final T^- , $G(\bullet)$ est définie comme suit :

$$G(W) = (\rho e_v(T^-), w_v(T^-))_{\Omega} + (\sigma(e_u(T^-)), \varepsilon(w_u(T^-)))_{\Omega} \quad (9)$$

ce qui permet d'écrire l'équation suivante et d'encadrer l'erreur dans la norme globale ([1]) :

$$\|E_h\|_{\text{tot}}^2 = R_{\varphi,h}(\Psi_{\varphi}) \leq C(h, \varphi) \|R_{\varphi,h}\| \quad (10)$$

Lorsque l'on s'intéresse à des quantités locales, d'autres formes linéaires en quantités d'intérêt peuvent être utilisées. Par exemple, ici on propose d'utiliser les formes linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} G(W) &= (\rho r(f_c; t - \tau) k_{\varepsilon}(x - \xi) e_v, w_v)_S + (\sigma(r(f_c; t - \tau) k_{\varepsilon}(x - \xi) e_u), \varepsilon(w_u))_S \\ G(W) &= (\rho r(f_c; t - \tau) \delta(x - \xi) e_v, w_v)_S \end{aligned} \quad (11)$$

qui permettent d'extraire l'erreur au point espace-temps (ξ, τ) . Dans (11), $r(f_c; t - \tau)$ est une fonction du type signal de Ricker centrée à τ en temps et à f_c en fréquence, $k_{\varepsilon}(x - \xi)$ est une fonction « bulle » à support très petit proposée dans [5] et $\delta(x - \xi)$ la fonction dirac au point ξ .

Notons par $\Psi_{\varphi,h}$ la solution d'éléments finis du problème adjoint (8), $E_h^{\Psi} = \Psi_{\varphi} - \Psi_{\varphi,h}$ est donc l'erreur de discrétisation de l'état adjoint, alors le résultat suivant est immédiat grâce à la propriété d'orthogonalité entre l'erreur et l'espace d'éléments finis utilisé :

$$\begin{aligned} G(E_h) &= B_{\varphi}(E_h, E_h^{\Psi}) \\ &= B_{\varphi}(sE_h, \frac{E_h^{\Psi}}{s}) = \frac{1}{4} \|sE_h + \frac{E_h^{\Psi}}{s}\|_{B_{\varphi}}^2 - \frac{1}{4} \|sE_h - \frac{E_h^{\Psi}}{s}\|_{B_{\varphi}}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

L'utilisation d'une constante de mise à l'échelle s dans (12) a été proposée dans [5] afin d'améliorer l'encadrement de l'erreur. Par conséquent, il est possible d'obtenir une estimation *a posteriori* pour les quantités d'intérêt locales si l'estimation *a posteriori* a été effectuée pour les erreurs directe E_h et adjointe E_h^{Ψ} pour le problème initial et le problème adjoint. Or après un changement de variable $\Psi_{\varphi}^*(T - t) = -\Psi_{\varphi}(t)$, le problème adjoint (8) devient :

Trouver $\Psi_{\varphi}^* \in V_{\varphi}(S) \times V_{\varphi}(S)$, tel que pour tout $W_{\varphi} \in V_{\varphi}(S) \times V_{\varphi}(S)$, on a :

$$B_{\varphi}(\Psi_{\varphi}, W_{\varphi}) = -G(W_{\varphi}) \quad (13)$$

il peut donc être résolu comme le problème initial direct dans le sens d'évolution du temps.

3.3 Indicateurs d'erreurs en quantités d'intérêt locales

Pour obtenir les indicateurs d'erreurs en quantités d'intérêt locales, on calcule d'abord des estimations d'erreurs du problème initial direct et du problème adjoint de la même manière dans le sens d'évolution du temps. Pour ceci, on utilise l'approche proposée dans [6] qui consiste, sur un maillage plus fin que le maillage initial de finesse h , à subdiviser le problème résiduel global en de problèmes résiduels locaux définis sur des petits patches d'éléments finis. On obtient ainsi des

indicateurs d'erreurs locaux par élément pour les erreurs directe E_h et adjointe E_h^Ψ . En associant les deux erreurs localement par un produit simple dans chaque élément, on peut établir des cartes d'erreurs pour les quantités d'intérêt locales considérées.

4 Stratégies de remaillage adaptatif

En utilisant des cartes d'erreurs, qui évoluent dans le temps, des cartes de taille d'élément fini sont construites et le remaillage adaptatif est effectué au cours du calcul transitoire de manière complètement automatique. Si on veut contrôler l'erreur dans tout le domaine spatial Ω à l'instant final T^- dans la norme globale (9), la gestion du schéma adaptatif est simple car l'estimation *a posteriori* de l'erreur directe peut-être effectuée au fur et à mesure du calcul transitoire :

- Boucle de la discrétisation en tranche espace-temps :
 - Résolution dynamique sur un maillage M_h
 - Estimation de l'erreur directe E_h
 - Définition de la carte de taille d'élément fini
 - Remaillage pour obtenir un nouveau maillage M_h ,
 - Résolution dynamique sur M_h , puis aller à la tranche espace-temps suivante

En revanche, si on veut contrôler l'erreur liée à certaines quantités d'intérêt locales, il faut estimer sur tout intervalle de temps les erreurs directe E_h et adjointe E_h^Ψ , ce qui pourrait entraîner un surcoût numérique important. Ici, on propose d'utiliser un maillage de fond M^* sur lequel l'estimation d'erreur est effectué pour tout l'intervalle du temps pour définir une carte de taille d'élément fini qui évolue en temps. Puis, un calcul avec un remaillage adaptatif respectant cette carte de taille est effectué :

- Phase d'estimation d'erreurs (sur M^*) : Boucle de la discrétisation en tranche espace-temps :
 - Résolution dynamique
 - Estimation des erreurs directe E_h et adjointe E_h^Ψ
 - Définition de la carte de taille d'élément fini (t_n), puis aller à la tranche espace-temps suivante
- Phase de résolution dynamique : Boucle de la discrétisation en tranche espace-temps :
 - Remaillage en respectant la carte de taille à l'instant t_n
 - Résolution dynamique, puis aller à la tranche espace-temps suivante

5 Exemples numériques

Comme exemples numériques, on présente ici l'application de notre approche à la modélisation de la propagation d'ondes élastique dans des structures minces.

5.1 Cartes d'erreurs globales et locale pour les ondes de choc dans une plaque élastique orthotrope

Le premier exemple considère la propagation d'ondes de choc dans une plaque de grande taille. Le matériau constituant la plaque est élastique orthotrope et les ondes de choc de quasi-pression, quasi-cisaillement et de flexion sont générées par une charge mobile supersonique. On s'intéresse à des quantités locales au point P (FIG. 1).

FIG. 2 montre des cartes d'erreurs pour le problème direct, le problème adjoint en norme globale et celles par rapport aux quantités d'intérêt locales considérées. On constate l'erreur directe E_h est

concentrée autour du front d'ondes de choc, formant le fameux cône de Mach qui est moins net que dans le cas de l'élasticité isotrope. Pour le problème adjoint, le plaque est soumise à une charge ponctuelle au point P et remonte dans le temps. Les cartes d'erreurs pour les quantités d'intérêt locales, qui est une sorte de combinaison des cartes des erreurs directe et adjointe, indiquent des zones de raffinement moins importantes que celles indiquées par les cartes de l'erreur directe, ce qui montre un intérêt si l'on veut optimiser le modèle numérique vis-à-vis des quantités d'intérêt locales.

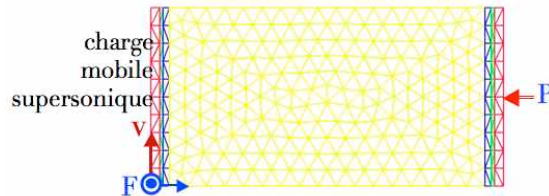


FIG. 1 – Exemple 1 : Plaque soumise à une charge mobile F de compression supersonique

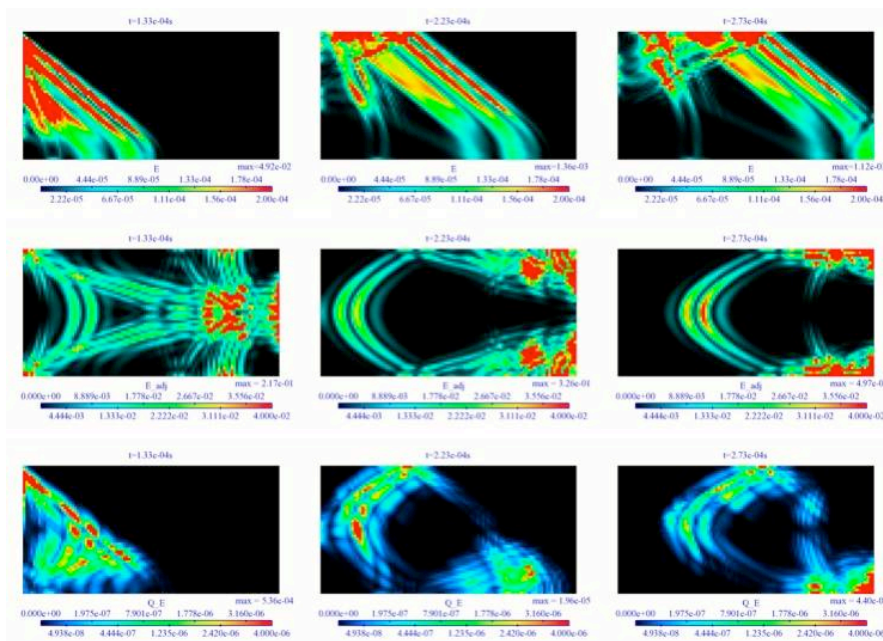


FIG. 2 – Exemple 1. Variation dans le temps des cartes d'erreurs dans une plaque soumise à une charge mobile supersonique. Sont présentés : les indicateurs de l'erreur directe E_h (haut) et de l'erreur adjointe E_h^Ψ (milieu) en norme globale, et en quantité d'intérêt (bas) en norme locale

5.2 Cartes d'erreurs globales et locale pour les ondes de choc dans une structure cylindrique en coque

Le deuxième exemple considère la propagation d'ondes de choc d'origine pyrotechnique dans un ACU (Adaptateur de Charges Utiles) d'Ariane 5. L'ACU est composé de coque composite sandwich en nid d'abeille. On s'intéresse à des quantités locales aux deux points A_1 et A_2 (FIG. 3), où sont attachés des équipements électroniques. Afin d'éviter que les équipements soient endommagés, il faut contrôler les niveaux de vibration générés par les ondes de choc dues à la découpe pyrotechnique lors de la séparation d'étage de du largage de la coiffe durant le vol.

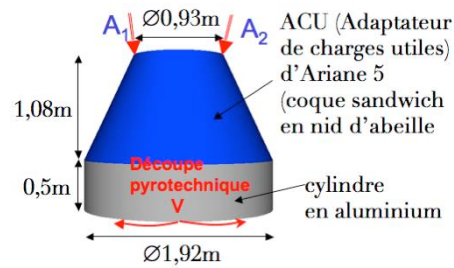


FIG. 3 – Exemple 2 : Adaptateur de charges utiles soumis à une découpe pyrotechnique supersonique

Comme pour le premier exemple, FIG. 4 montre des cartes d'erreurs pour le problème direct, le problème adjoint en norme globale et celles par rapport aux quantités d'intérêt locales considérées. On constate des phénomènes similaires et l'intérêt des cartes d'erreurs liées à des quantités d'intérêt locales.

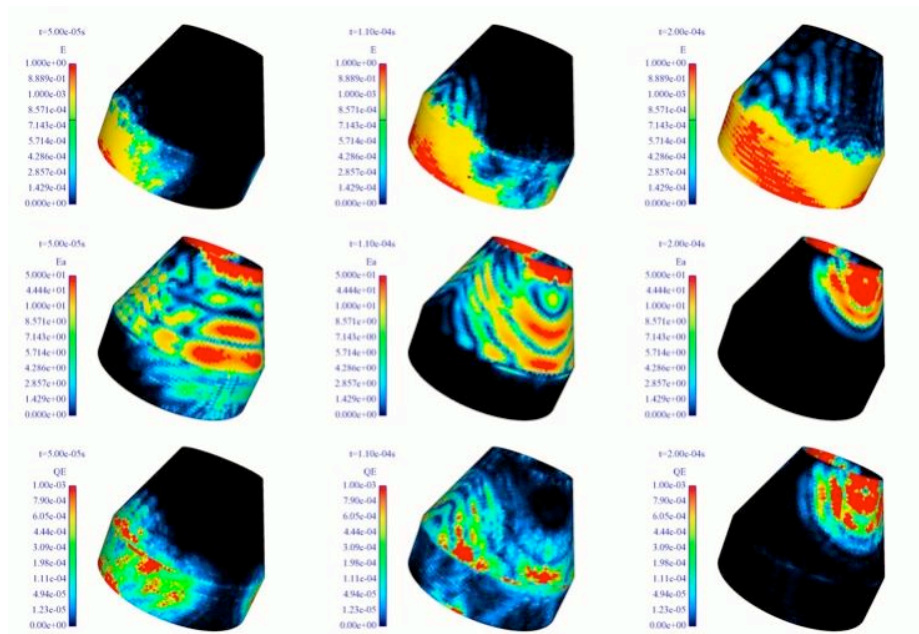


FIG. 4 – Exemple 2. Variation dans le temps des cartes d'erreurs dans une structure coque cylindrique soumise à une découpe pyrotechnique supersonique à sa base. Sont présentés : les indicateurs de l'erreur directe E_h (haut) et de l'erreur adjointe E_h^Ψ (milieu) en norme globale, et en quantité d'intérêt (bas) en norme locale

5.3 Remaillage adaptatif

On présente ici le remaillage adaptatif pour l'exemple 2, qui est piloté par les cartes de l'erreur directe E_h (FIG. 5).

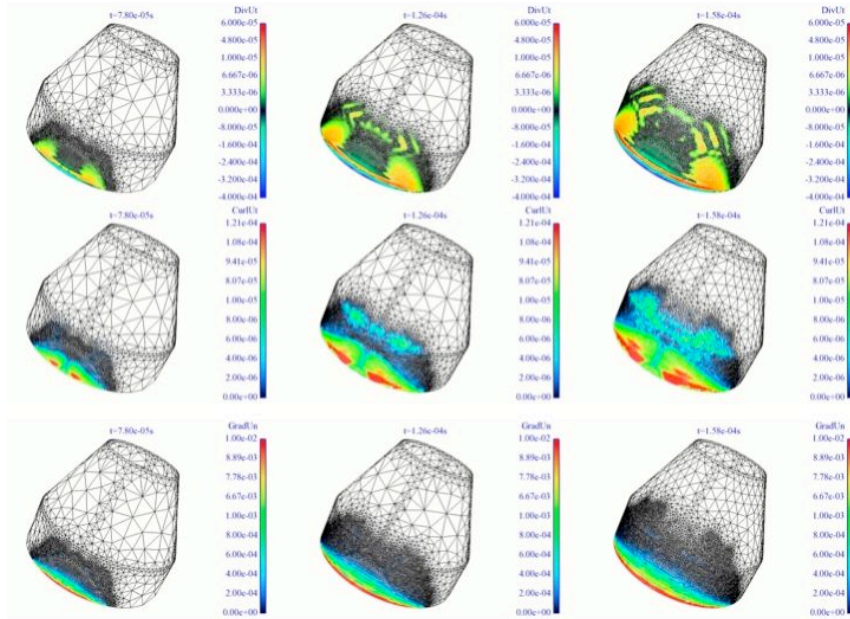


FIG. 5 – Exemple 2. Remaillage adaptatif piloté par les cartes de l’erreur directe E_h . Sont présentés (sur les maillages adaptatifs) : les ondes de membrane de pression (haut) et les ondes de membrane de cisaillement (milieu) et les ondes de flexion

6 Conclusion

On a présenté ici nos résultats récents sur le remaillage adaptatif et le contrôle d’erreurs en quantité d’intérêt pour la modélisation numérique de la propagation des ondes élastiques. Notre approche est développée dans le cadre de la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps, qui permet d’unifier dans un cadre naturel l’estimation d’erreurs en espace et en temps. Mais seule l’erreur de discrétisation en espace a été considérée dans ce travail. Les indicateurs locaux *a posteriori* des erreurs pour le problème direct et le problème adjoint sont obtenus par la méthode des résidus locaux. Des cartes de raffinement vis-à-vis des quantités d’intérêt locales sont ensuite construites pour mieux optimiser le modèle numérique. Nous avons proposé différentes quantités d’intérêt locales en espace-temps et notre approche est appliquée aux structures industrielles de grande taille.

Références

- [1] D. Aubry, D. Lucas and B. Tie. *Adaptive strategy for transient/coupled problems. Applications to thermoelasticity and elastodynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 176, pages 41-51, 1999.
- [2] P. Ladevèze. *Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems*, C. R. Mecanique vol. 334, pages 399-407, 2006.
- [3] C. Johnson. *Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 107, pages 117-129, 1993.
- [4] N. Parès, P. Diez and A. Huerta. *Bounds of functional outputs for parabolic problems. Part I: Exact bounds of the discontinuous Galerkin time discretization*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 197, pages 1641-1660, 2008.
- [5] S. Prudhomme and J.T. Oden. *On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 176, pages 313-331, 1999.
- [6] B. Tie, D. Aubry and A. Boullard. *Adaptive computation for elastic wave propagation in plate/shell structures under moving loads*, European J. Comput. Mech., vol. 12(6)}, pages 717-736, 2003.