



HAL
open science

Calcul multi échelle des structures hétérogènes viscoélastiques linéaires: une approche simplifiée

A. B. Tran, Julien Yvonnet, Qi-Chang He, F. Toutlemonde, J. Sanahuja

► To cite this version:

A. B. Tran, Julien Yvonnet, Qi-Chang He, F. Toutlemonde, J. Sanahuja. Calcul multi échelle des structures hétérogènes viscoélastiques linéaires: une approche simplifiée. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592832

HAL Id: hal-00592832

<https://hal.science/hal-00592832>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calcul multi échelle des structures hétérogènes viscoélastiques linéaires: une approche simplifiée

A. B. Tran^{1,2}, J. Yvonnet¹, Q-C. He¹, C. Toulemonde², J. Sanahuja²

¹ Laboratoire MSME, UMR 8208 CNRS, Université Paris-Est Marne-la-Vallée, F77454, France, {anh-binh.tran, julien.yvonnet, qi-chang.he}@univ-mlv.fr

² Département MMC, EDF R&D, F77818, France, {anh-binh.tran, julien.sanahuja, charles.toulemonde}@edf.fr

Résumé — Une nouvelle méthode multi échelle permettant le calcul des structures composées de matériaux hétérogènes, viscoélastiques linéaires, est présentée. Par rapport aux approches proposées jusqu'à présent dans ce cadre, la technique n'utilise ni la transformée de Laplace ni calculs couplés à deux échelles. L'idée principale est de construire une représentation discrète du tenseur relaxation effectif par une méthode d'interpolation à partir de calculs préliminaires par éléments finis sur un VER. A l'échelle macroscopique, la loi de comportement peut être calculée numériquement par le biais d'un produit de convolution faisant intervenir le tenseur discret interpolé par rapport au temps. La méthode est appliquée à l'étude du fluage de structures en béton.

Mots clés — Homogénéisation numérique, viscoélasticité linéaire, méthodes multi échelle.

1 Introduction

Nous proposons une méthode multi échelle numérique pour calculer la réponse de structures hétérogènes dont les phases de la microstructure sont viscoélastiques linéaires [1]. Jusqu'à présent, les méthodes proposées dans la littérature peuvent se classer en plusieurs catégories : a) les méthodes basées sur la transformée de Laplace, permettant dans l'espace complexe d'appliquer les concepts de l'homogénéisation linéaire [2] ; b) les méthodes impliquant des calculs de type éléments finis couplés à deux échelles [3] ; c) des approches basées sur un principe variationnel incrémental [4]. Afin d'éviter les problèmes numériques liés à la transformée de Laplace inverse et les coûts de calculs importants dans les différentes approches évoquées, nous introduisons une méthode simple, basée sur la construction d'un tenseur de relaxation effectif $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ associé au Volume Élémentaire Représentatif (VER) de la microstructure, dont la morphologie et le comportement des phases sont connus. Ce tenseur est calculé numériquement et stocké à chaque pas de temps. Une méthode d'interpolation permet de construire une représentation continue de $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$. Pour évaluer la réponse d'une structure composée du matériau hétérogène, des algorithmes implicites sont développés en utilisant les valeurs discrètes de $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ dans l'expression du produit de convolution. Nous appliquons la méthode à l'étude du fluage des structures en béton. Au travers de différents exemples 2D et 3D, nous montrons la précision et la convergence de la méthode. Des comparaisons de temps de calculs et de capacité mémoire sont effectués entre cette approche et une technique de type calculs multi niveaux (FE² [5]).

2 Échelle microscopique

Dans ce travail, on suppose que le comportement des phases de la microstructure est de type Maxwell généralisé, bien que ce choix ne soit pas une restriction à l'application de la méthode. Les algorithmes implicites permettant la résolution de ce type de problème sont classiques et peuvent être trouvés dans [6] et [7]. A cette échelle, l'objectif est de calculer numériquement le tenseur de relaxation effectif associé à la microstructure pour plusieurs temps discrets. On peut montrer que le comportement effectif d'un composite dont les phases sont linéaires viscoélastiques est lui-même linéaire viscoélastique (voir [8, 9]).

Ce comportement peut être exprimé par le biais d'un produit de convolution :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}(t) &= \int_{-\infty}^t \bar{\Gamma}_{ijkl}(t-s) \frac{d\bar{\epsilon}_{kl}(s)}{ds} ds, \\ &= \int_0^t \bar{\Gamma}_{ijkl}(t-s) \frac{d\bar{\epsilon}_{kl}(s)}{ds} ds + \bar{\Gamma}_{ijkl}(t) \bar{\epsilon}_{kl}(0),\end{aligned}\quad (1)$$

où $\bar{\sigma}_{ij}(t) = \langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega}$ et $\bar{\epsilon}_{ij}(t) = \langle \epsilon_{ij} \rangle_{\Omega}$ avec $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ étant l'opérateur de moyenne sur le domaine Ω . Dans l'équation (1), $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ est un tenseur de relaxation effectif dont la forme ne peut être définie explicitement dans le cas général, en fonction de la morphologie et des lois de comportement dans les différentes phases. Nous proposons dans ce travail de construire numériquement ce tenseur. En choisissant

$$\bar{\epsilon}_{ij}(t) = H(t) \bar{\epsilon}_{ij}^0, \quad (2)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside et $\bar{\epsilon}_{ij}^0$ est un tenseur de déformation constant, l'équation (1) devient

$$\bar{\sigma}_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \bar{\Gamma}_{ijkl}(t-s) \bar{\epsilon}_{kl}^0 \delta(s) ds, \quad (3)$$

où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac. En utilisant la propriété :

$$\int_{-\infty}^t f(t-s) \delta(s) ds = f(t), \quad (4)$$

on obtient finalement

$$\bar{\Gamma}_{ijkl}(t) = \frac{\bar{\sigma}_{ij}(t)}{\bar{\epsilon}_{kl}^0}, \quad \text{avec } \bar{\epsilon}_{kl}(t) = H(t) \bar{\epsilon}_{kl}^0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (5)$$

En résumé, le calcul de $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ nécessite d'appliquer plusieurs chargements élémentaires de type échelon sur les bords du VER et de stocker les valeurs des contraintes moyennes au cours du temps. On note χ_p^{ijkl} les composantes de $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ à l'instant t_p . La détermination de χ_q^{ijkl} n'implique que 3 calculs en temps pour un problème 2D et 6 calculs pour un problème 3D. Par exemple, on peut choisir $\bar{\epsilon}_{kl}^0$ en 2D par :

$$\bar{\epsilon}_{11}^0 = 10^{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{\epsilon}_{22}^0 = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{\epsilon}_{12}^0 = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

L'intervalle du temps microscopique $\mathcal{T} = [0, t^{max}]$ est discrétisé en plusieurs instants $t^q = (q-1)\Delta t$ avec $q = 1, 2, \dots, n$; t^{max} étant le temps maximal considéré et Δt le pas du temps à l'échelle microscopique. Pour chaque chargement élémentaire, on calcule χ_q^{ijkl} à chaque instant t^q puis on stocke les valeurs de χ_q^{ijkl} pour les calculs à l'échelle macroscopique.

3 Échelle macroscopique

Une fois les calculs préliminaires réalisés et le tenseur de relaxation effectif identifié, il est possible de calculer la loi de comportement macroscopique dans le but de mener un calcul de structure composée du matériau hétérogène. L'algorithme est présenté ci-dessous.

3.1 Représentation continue du tenseur de relaxation effectif

En vue de pouvoir évaluer continument le tenseur de relaxation effectif $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$, une transformation $\bar{\Gamma}_{ijkl} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est introduite, définie par :

$$\bar{\Gamma}_{ijkl}(t) \simeq \sum_{p=1}^M \phi_p^{ijkl}(t) \chi_p^{ijkl}, \quad (7)$$

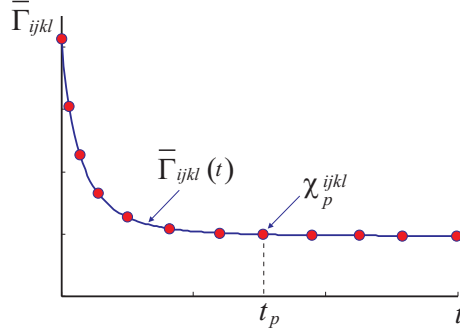


FIG. 1 – Valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif χ_p^{ijkl} et interpolation continue $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$.

où $\phi_p^{ijkl}(t)$ sont des fonctions d'interpolation dans le domaine temporel et M indique le nombre de fonctions d'interpolation non nulles à l'instant t . Différents choix sont possibles pour ces fonctions, nous utilisons dans ce travail des fonctions spline cubiques, permettant de réduire le nombre de points d'échantillonnage tout en maintenant une bonne représentation de la fonction interpolée.

3.2 Algorithme pour l'échelle macroscopique

L'intervalle de temps macroscopique $\bar{T} = [0, \bar{t}^{max}]$, avec \bar{t}^{max} étant le temps maximal de simulation, est discrétisé en plusieurs instants \bar{t}^i , avec $\bar{t}^i = (i-1)\bar{\Delta t}$, $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$ et $\bar{\Delta t}$ le pas de temps macroscopique. A noter que \bar{t}^{max} et $\bar{\Delta t}$ peuvent être différents de t^{max} et Δt de l'échelle microscopique.

L'expression des contraintes dans l'équation (1) à l'instant \bar{t}^{n+1} est exprimée par :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{n+1} &= \int_0^{\bar{t}^{n+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) \frac{d\bar{\epsilon}_{kl}(s)}{ds} ds + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\epsilon}_{kl}^{(0)} \\ &= \sum_{m=0}^n \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) \frac{d\bar{\epsilon}_{kl}(s)}{ds} ds + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\epsilon}_{kl}^{(0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

En utilisant l'approximation suivante

$$\frac{d\bar{\epsilon}_{kl}(t)}{dt} \simeq \frac{\bar{\epsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\epsilon}_{kl}^m}{\bar{\Delta t}}, \quad \text{for } t \in [\bar{t}^m, \bar{t}^{m+1}], \quad (9)$$

la contrainte à l'instant \bar{t}^{n+1} est donnée par

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{n+1} &= \sum_{m=0}^n \left\{ \left(\frac{\bar{\epsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\epsilon}_{kl}^m}{\bar{\Delta t}} \right) \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) ds \right\} + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\epsilon}_{kl}^{(0)} \\ &= \sum_{m=0}^n (\bar{\epsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\epsilon}_{kl}^m) A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1}) + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\epsilon}_{kl}^{(0)}, \end{aligned} \quad (10)$$

où

$$A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1}) = \frac{1}{\bar{\Delta t}} \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) ds = \frac{1}{\bar{\Delta t}} \sum_{p=1}^M \chi_p^{ijkl} \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \phi_p^{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) ds. \quad (11)$$

A noter que, dans l'expression au dessus, l'intégrale peut être calculée analytiquement, car ne fait intervenir que les fonctions d'interpolation $\phi_p^{ijkl}(t)$ connues explicitement.

On considère un domaine $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ associé à une structure à l'échelle macroscopique de contour $\partial\bar{\Omega}$. Le bord se décompose en deux parties disjointes et complémentaires $\partial\bar{\Omega}_u$ et $\partial\bar{\Omega}_F$ où les conditions aux limites de types Dirichlet et Neumann sont imposées, respectivement. A l'instant \bar{t}^{n+1} , on a :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^{n+1} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{sur } \bar{\Omega}, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}^{n+1} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}^{n+1} \quad \text{sur } \partial\bar{\Omega}_F, \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{v}}^{n+1} \quad \text{sur } \partial\bar{\Omega}_u, \quad (14)$$

où \mathbf{b} une force volumique, \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal au bord du domaine orienté vers l'extérieur du domaine $\bar{\Omega}$; $\bar{\mathbf{f}}^{n+1}$ et $\bar{\mathbf{v}}^{n+1}$ sont des forces imposées et des déplacements imposés sur le bord du domaine à l'instant \bar{t}^{n+1} , respectivement. La formule faible associée aux équations (12-14) est donnée par :

Trouver $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$, $\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{v}}^{n+1}$ sur $\partial\bar{\Omega}_u$ et $\bar{\mathbf{u}}^{n+1} \in H^1(\bar{\Omega})$ tel que

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta\mathbf{u}) d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\bar{\Omega} + \int_{\partial\bar{\Omega}_f} \bar{\mathbf{f}}^{n+1} \cdot \delta\mathbf{u} d\bar{\Gamma} \quad (15)$$

$\forall \delta\mathbf{u} \in H_0^1(\bar{\Omega})$ et $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur $\partial\bar{\Omega}_u$; où $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$ est le vecteur des déplacement macroscopiques d'un point dans $\bar{\Omega}$ à l'instant \bar{t}^{n+1} .

En substituant (10) dans (15) et en posant $\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta\mathbf{u})]_{ij}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} A_{ijkl}^{(n,n+1)}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^{n+1} d\bar{\Omega} &= \int_{\bar{\Omega}} \delta u_i b_i d\bar{\Omega} + \int_{\partial\bar{\Omega}_f} \delta u_i \bar{f}_i^{n+1} d\bar{\Gamma} \\ &- \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\bar{\Omega}} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1}) (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^{m+1} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^m) d\bar{\Omega} \\ &+ \int_{\bar{\Omega}} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} A_{ijkl}^{(n,n+1)}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^n d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^{(0)} d\bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (16)$$

En introduisant l'approximation des éléments finis standards, on obtient, à l'instant \bar{t}^{n+1} , un système des équations linéaires :

$$\bar{\mathbf{K}}^{n+1} \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_{ext}^{n+1} - \bar{\mathbf{f}}_V^{n+1}, \quad (17)$$

avec

$$\bar{\mathbf{K}}^{n+1} = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T [\mathbf{A}]^{(n,n+1)} \mathbf{B} d\bar{\Omega}, \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{ext} = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\bar{\Omega} + \int_{\partial\bar{\Omega}_f} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}^{n+1} d\bar{\Gamma}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_V^{n+1} &= \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T [\mathbf{A}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1})] ([\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m+1}] - [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^m]) d\bar{\Omega} \\ &- \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T [\mathbf{A}^{(n,n+1)}(\bar{t}^{n+1})] [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n] d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T [\bar{\Gamma}(\bar{t}^{n+1})] [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(0)}] d\bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (20)$$

Dans les équations ci-dessus, $[\mathbf{A}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1})]$, $[\bar{\Gamma}(\bar{t}^{n+1})]$ sont les formes matricielles des tenseurs de quatrième ordre $A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1})$ et $\bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1})$; $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n]$ est la forme vectorielle du tenseur de deuxième ordre $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$.

Nous notons que le vecteur $\bar{\mathbf{f}}_V^{n+1}$ dans l'équation (20) dépend de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(0)}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1$, ..., $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$. Contrairement aux algorithmes récursifs [6], il est nécessaire ici de stocker toutes les déformations macroscopiques de tous les éléments du domaine $\bar{\Omega}$, pour tous les instants considérés. Ceci peut s'avérer être lourd en ressource mémoire lorsque le maillage macroscopique de la structure est très fin et le pas du temps macroscopique trop petit. Cependant, comme montré dans les exemples numériques de la section 4, la méthode proposée reste moins coûteuse que les autres approches telles que la méthode multi-niveaux [5, 3].

3.2.1 Résumé de l'algorithme

Les principales étapes de l'algorithme lié à l'échelle macroscopique sont résumées ci-dessous.

TANT QUE $t < T$, T étant le temps maximal de simulation,

1. A l'instant \bar{t}^{n+1} , connaissant en chaque point d'intégration, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^q$, $q = 1, 2, \dots, \bar{n}$:

BOUCLE sur les points d'intégration du maillage macroscopique

(a) Calculer la matrice élémentaire $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$ et le vecteur élémentaire $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^e$ en utilisant (18)-(19).

(b) Calculer le vecteur élémentaire $\bar{\mathbf{f}}_V^{e,n+1}$ en utilisant (20).

(c) Assembler $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$, $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^e$ et $\bar{\mathbf{f}}_v^{e,n+1}$.

FIN

2. Résoudre le système d'équations linéaires (17), calculer et stocker $\bar{\mathbf{e}}_{kl}^{n+1}$ pour tous les points d'intégration du domaine macroscopique.
3. Retourner à l'étape 1.

FIN

4 Exemples numériques

4.1 Test de validation à l'échelle microscopique

Cet exemple a pour but de comparer les résultats obtenus par la méthode proposée et un calcul direct par éléments finis pour un chargement temporel quelconque sur le VER. Nous étudions la microstructure illustrée dans la figure 2.a contenant 100 inclusions circulaires positionnées dans un domaine carré de côté L . Les rayons des inclusions sont tirés suivant une loi de probabilité uniforme avec $r_{min} = 0.0193L$ et $r_{max} = 0.0595L$. Un critère de non pénétration est implémenté. La fraction volumique des inclusions est de 0.4425. Dans cet exemple, les matériaux de la matrice et des inclusions sont linéaires, viscoélastiques et isotropes. La matrice est caractérisée par le modèle de Maxwell généralisé avec une branche élastique et 5 branches visco-élastiques, les inclusions étant décrites par le même modèle avec une branche élastique et 4 branches visco-élastiques (voir la figure 2.c) et détails des paramètres dans [1]. Un maillage contenant 109948 éléments triangulaires linéaires est choisi pour la discrétisation du VER.

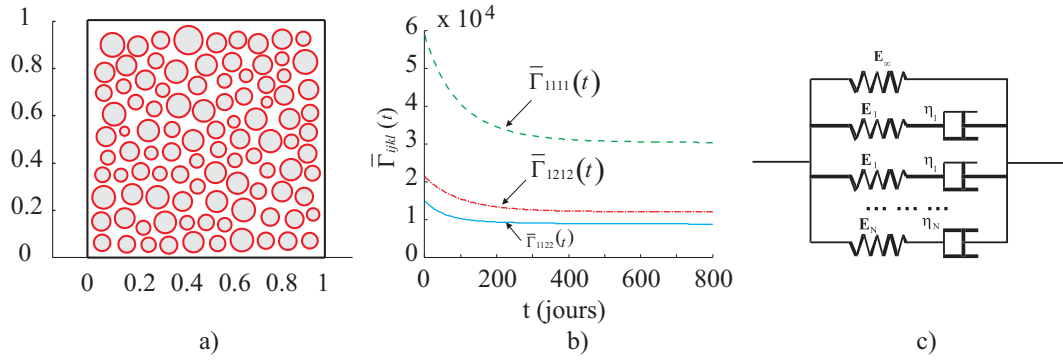


FIG. 2 – a) Géométrie du VER contenant 100 inclusions circulaires ; b) Composants du tenseur de relaxation effectif ; c) Modèle de Maxwell généralisé.

Nous appliquons la procédure décrite dans la section 3.1 pour calculer le tenseur de relaxation effectif du VER. Des composantes de ce tenseur sont illustrées dans la figure 2.b.

Nous imposons une déformation associée à $\bar{\mathbf{e}}_{kl}(t)$ sur le bord du VER et calculons $\bar{\sigma}_{ij}(t)$ par homogénéisation dans le cas du calcul FEM direct. Des conditions de périodicité sont imposées par le biais de multiplicateurs de Lagrange. Les résultats sont comparés avec l'approche proposée et présentés dans la figure 4. Nous avons alors choisi $\bar{\mathbf{e}}_{kl}(t) = \bar{\mathbf{e}}_{kl}^0 F(t)$ avec $\bar{\mathbf{e}}_{kl}^0$ donné par

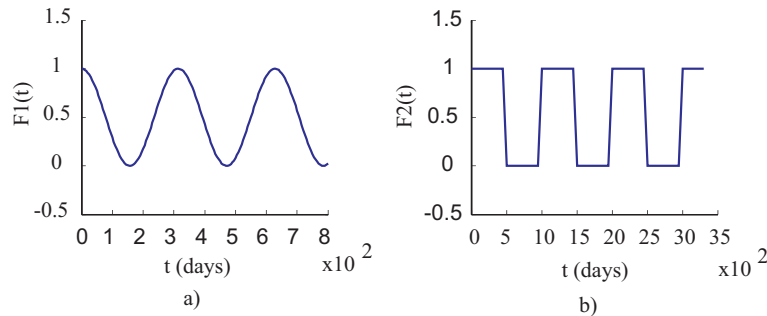


FIG. 3 – La $F(t)$ en fonction du temps : a) $F_1(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{t}{50}))$, b) $F_2(t) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{\lfloor \frac{t}{500} \rfloor})$.

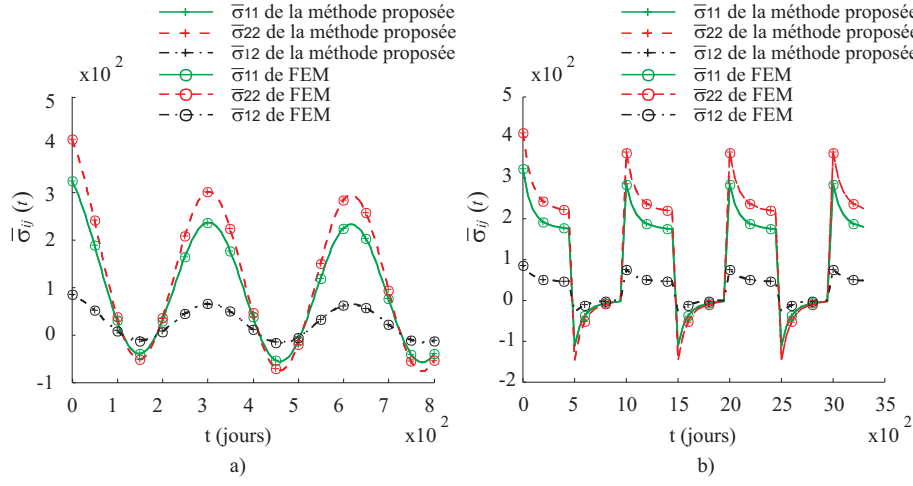


FIG. 4 – Comparaison entre la méthode proposée et un calcul direct par éléments finis avec a) $F(t) = F_1(t)$ b) $F(t) = F_2(t)$.

$$\bar{\epsilon}_{kl}^0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (21)$$

et $F(t)$ telle que

$$F(t) = F_1(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{t}{500}\right) \right), \quad (22)$$

$$F(t) = F_2(t) = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{\lfloor \frac{t}{500} \rfloor} \right), \quad (23)$$

où $\lfloor x \rfloor$ indique la fonction partie entière (le plus grand entier inférieur ou égal à x). Les fonctions $F(t)$ sont illustrées dans la figure 3. Nous observons un très bon accord entre la solution obtenue par la méthode proposée et la solution FEM de référence pour chaque choix de fonction $F(t)$.

4.2 Barrage en 3D

Dans cet exemple, un model simple de barrage en 3D est étudié. L'objectif est de déterminer le comportement en fluage du barrage soumis à la pression de l'eau. La géométrie du problème est illustrée dans la figure 5.a. Les dimensions du barrage (voir la figure 5.b) sont données par $b_1 = 1.5 \text{ m}$, $b_2 = 3 \text{ m}$, $H = 10 \text{ m}$ et $l = l_{BM} = 20 \text{ m}$. Les faces $BCDE$, $MNPQ$ et $CDPQ$ sont encastées. La pression de l'eau varie linéairement de 0 à la surface de l'eau à qgH en base avec $q = 1000 \text{ kg/m}^3$ et g étant l'accélération de la gravité. La pression de l'eau est imposée sur la surface $BCQM$. Des maillages tétraédriques contenant 3370, 28181 and 435661 éléments sont utilisés pour analyser la convergence du problème.

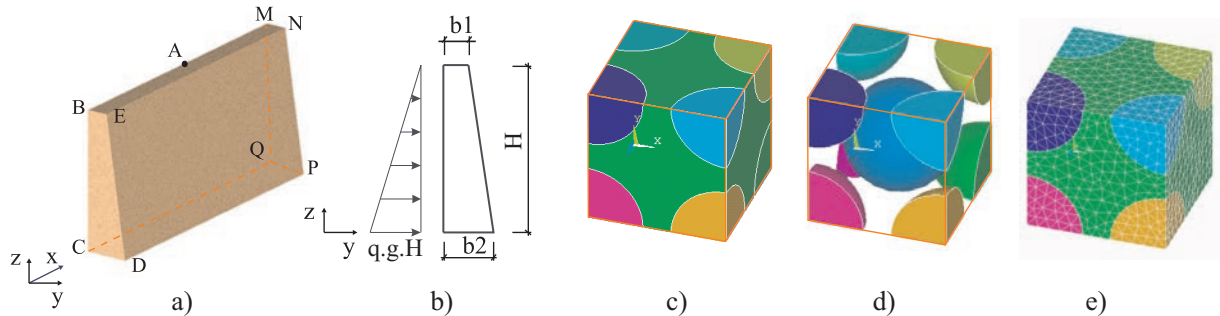


FIG. 5 – a) Modèle tri-dimensionnel de barrage ; b) Section transversale du barrage et distribution de pression de l'eau ; c) Géométrie du VER ; d) Inclusions du VER ; e) Maillage conforme du VER.

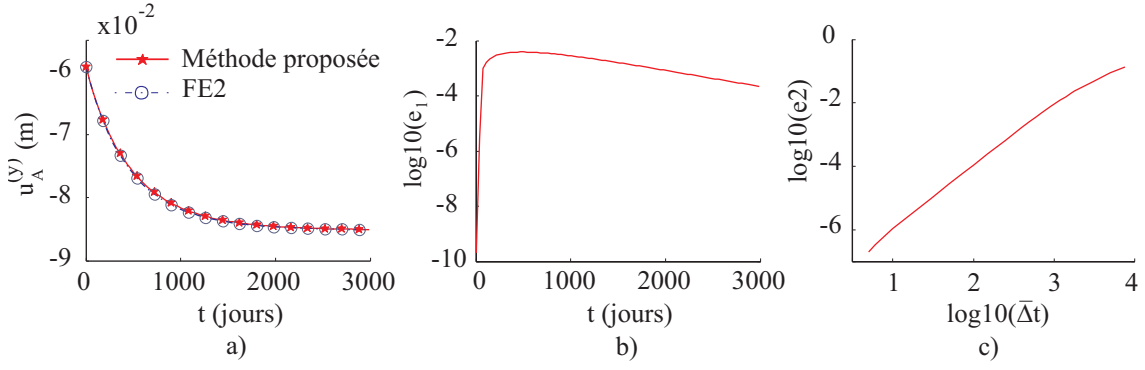


FIG. 6 – a) Composante y du déplacement du point A de la structure ; comparaison entre la solution de la méthode proposée et celle de référence (FE^2) ; b) Evolution de l’erreur relative $e_1(t)$ durant la simulation ; c) Relation entre l’erreur relative $e_2(\bar{\Delta}t)$ et le pas du temps macroscopique $\bar{\Delta}t$.

Le matériau est hétérogène et caractérisé par un VER représenté dans la figure 5.c, 5.d. Des inclusions sphériques sont disposées sur un réseau cubique centré dans le VER. Le rayon des sphères est de $0.4L$, L étant la dimension du cube. La fraction volumique des inclusions est de 0.5362 . Les matériaux de la matrice et des inclusions sont isotropes. La matrice est viscoélastique linéaire et caractérisés par un modèle de comportement de Maxwell généralisé avec 5 branches viscoélastiques et une branche élastique [1]. Les inclusions sont élastiques. Un maillage conforme de 2561 tétraèdres linéaires est utilisé pour la discrétisation du VER (voir la figure 5.e).

Afin de fournir une solution de référence, la méthode FE^2 a été implémentée. Nous analysons $u_A^{(y)}(t)$ et $u_{A,FE2}^{(y)}(t)$, les composants y de déplacement du point A localisé au milieu du segment BM (voir la figure 5.a) pour la méthode proposée et FE^2 , respectivement. Le résultat correspondant est indiqué dans la figure 6.a. Nous constatons un bon accord entre la solution de référence et la nouvelle méthode proposée. La figure 6.b montre la relation entre l’erreur relative e_1 définie par :

$$e_1 = \frac{|u_A^{(y)}(t) - u_{A,FE2}^{(y)}(t)|}{|u_{A,FE2}^{(y)}(t)|}. \quad (24)$$

et le pas du temps à l’échelle macroscopique $\bar{\Delta}t$. Dans cette comparaison, nous avons choisi la même valeur pour le pas du temps à l’échelle macroscopique $\bar{\Delta}t$ que pour celui de l’échelle microscopique Δt .

La convergence de la solution par rapport au temps macroscopique est également étudiée et présentée dans la figure 6.c où l’erreur relative e_2 est définie par :

$$e_2(\bar{\Delta}t) = \frac{\int_0^T |u_A^{(y)}(t) - u_{A,ref}^{(y)}(t)| dt}{\int_0^T |u_{A,ref}^{(y)}(t)| dt}. \quad (25)$$

La solution de référence $u_{A,ref}^{(y)}(t)$ est obtenue avec petit pas de temps très fin $\bar{\Delta}t_{ref} = 3$ jours.

L’analyse de la convergence par rapport à la taille du maillage macroscopique est effectuée et illustrée dans la figure 7.a.

La consommation de mémoire pour les deux méthodes sont indiquées dans le tableau 7.c. Pour $\log_{10}(\bar{\Delta}t) \geq 1$, c’est à dire, $e_2 \geq 10^{-6}$ dans la figure 6.c, la méthode proposée utilise beaucoup moins de mémoire qu’une méthode multi niveaux classique. La comparaison du temps de calcul total des deux méthodes est également considérée dans le tableau 1 où N_{mi} et N_{ma} sont les nombres d’éléments du maillage de l’échelle microscopique et macroscopique, respectivement. Nous soulignons ici que, par rapport à une méthode multi niveaux, le gain en temps de calcul est de l’ordre de plusieurs centaines.

5 Conclusions

Nous avons présenté dans ce travail une méthode multi-échelle pour le calcul de la réponse des structures faites de matériaux viscoélastiques linéaires hétérogènes. Contrairement aux méthodes basées sur

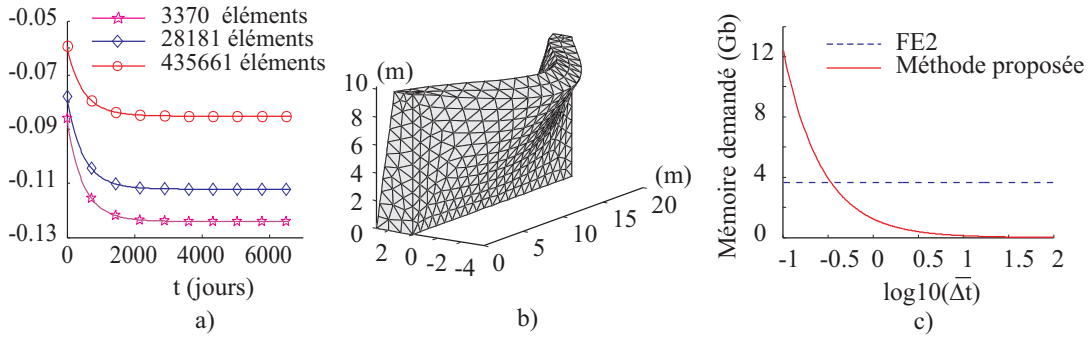


FIG. 7 – a) Composante horizontale du déplacement du point A pour un pas du temps macroscopique constant $\bar{\Delta}t=36$ jours ; b) Illustration du barrage déformé ; c) Relation entre le mémoire consommée pour les deux méthodes et le pas du temps macroscopique $\bar{\Delta}t$.

TAB. 1 – Temps de calcul pour la méthode proposée et FE² pour la structure de barrage en 3-D.

$\bar{\Delta}t$ (d)	N_{ma}	N_{mi}	T (d)	T^{mi} (min)	T^{ma} (min)	T^{tot} (min)	$T_{FE^2}^{tot}$ (min)	$\frac{T^{tot}}{T_{FE^2}^{tot}}$
36	3370	2561	7650	3.21	5.95	9.15	2840	310
36	6865	8117	7650	20.58	10.25	30.83	6342	206

la transformée de Laplace, notre méthode opère directement dans le domaine temporel. La méthode fait intervenir deux étapes. Tout d'abord, des calculs des éléments finis sont réalisés sur un VER associé à la microstructure. Les composants du tenseur de relaxation effectif sont échantillonnés pour les différents instants dans le domaine temporel. Dans la seconde étape où les calculs sont effectués sur la structure macroscopique, la loi de comportement effective est exprimée comme un produit de convolution, faisant intervenir le tenseur de relaxation calculé précédemment, et une procédure d'interpolation est utilisée pour évaluer numériquement l'intégrale de cette convolution. Les deux étapes sont réalisées séparément. Une fois le tenseur de relaxation effectif calculé et stocké, des calculs des structures peuvent être réalisés sans résoudre de nouveaux problèmes à l'échelle microscopique. Enfin, la mise en œuvre de cette méthode est simple et facile à intégrer aux outils numériques des éléments finis existants. Les différents exemples numériques étudiés ont démontré la robustesse, l'efficacité et la précision de notre méthode.

Références

- [1] A.B. Tran, J. Yvonnet, Q.-C. He, C. Toulemonde, J. Sanahuja, *A simple computational homogenization method for structures made of heterogeneous viscoelastic materials*, soumis.
- [2] A. Matzenmiller, S. Gerlach, *Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber-matrix bonding*, *Computat. Mater. Sci.*, 29 (3) :283-300, 2003.
- [3] B. Kurnatowski, A. Matzenmiller, *Finite element analysis of viscoelastic composite structures based on a micromechanical material model*, *Computat. Mater. Sci.*, 43 :957-973, 2008.
- [4] N. Lahellec, P. Suquet, *Effective behavior of linear viscoelastic composites : A time-integration approach*, *Int. J. Solids. Struct.*, 44 :507-529, 2007.
- [5] F. Feyel, *Multiscale FE² elastoviscoplastic analysis of composites structures*, *Comput. Mater. Sci.*, 16 :344-354, 1999.
- [6] J.C. Simo, T.J.T Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer, 1998.
- [7] M. Kaliske, H. Rothert, *Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains*, *Comput. Mech.* (1997), 19(3) :228-239.
- [8] Z. Hashin, *Viscoelastic behavior of heterogeneous media*, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* (1965), 32 :630-636.
- [9] Z. Hashin, *Complex moduli of viscoelastic composites - I. General theory and application to particulate composites*, *Int. J. Solids Struct.* (1970), 6 :539-552.