

## Problèmes de contact pour des particules en écoulement cisailé

N. Verdon<sup>1</sup>, P. Laure<sup>1</sup>, A. Lefebvre-Leopot<sup>2</sup>, L. Lobry<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire J.-A. Dieudonné, CNRS UMR 6621, Université de Nice-Sophia Antipolis, {nicolas.verdon, patrice.laure}@unice.fr

<sup>2</sup> CMAP, Ecole Polytechnique, aline.lefebvre@polytechnique.edu

<sup>3</sup> LPMC, Université de Nice-Sophia Antipolis, laurent.lobry@unice.fr

**Résumé** — Cet article présente une modélisation du contact entre particules solides dans un écoulement cisailé afin d'éviter le problème du recouvrement. Le modèle développé permet de retrouver la réversibilité des équations de Stokes et peut s'adapter facilement aux calculs de suspensions denses.

**Mots clés** — suspension, contact, modèle de contact visqueux, interaction fluide-structure

### 1 Modèle numérique

Cette étude a été menée à l'aide de la méthode des domaines fictifs [1, 2]. On considère ici un domaine de calcul  $\Omega$  correspondant à un domaine fluide dans lequel se trouvent des inclusions solides. L'approche des domaines fictifs consiste à décomposer le domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_f$  et  $\Omega_s$  pour respectivement les phases fluide et solide. L'interface fluide/solide est déterminée à l'aide d'une fonction caractéristique  $\mathbb{I}$  [3] et la viscosité  $\eta$  est alors définie à l'aide de la relation de mélange suivante :

$$\eta = \mathbb{I}\eta_s + (\mathbb{E} - \mathbb{I})\eta_f \quad (1)$$

où  $\mathbb{I} = 1$  si  $\mathbf{x} \in \Omega_s$  et 0 sinon,  $\eta_f$  est la viscosité fluide et  $\eta_s \simeq r\eta_f$  est la viscosité solide qui joue le rôle d'un facteur de pénalisation ( $r \approx 10^3$ ).

Négligeant les forces inertielles et de gravité, le problème fluide/structure est gouverné par les équations de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0 \\ \nabla \cdot (2\eta_f \dot{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p\mathbf{E}) & = 0 \\ [[\mathbf{u}]]_{\Gamma_s} & = 0 \quad \text{and} \quad [[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]]_{\Gamma_s} = 0 \\ \mathbf{u} & = \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{sur la frontière extérieure } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse fluide,  $\dot{\varepsilon}(\mathbf{u})$  le tenseur taux de déformation,  $\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_f \dot{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p\mathbf{E}$  le tenseur des contraintes et  $p$  la pression. On précise également que la notation  $[[f]]_{\Gamma_s}$  indique le saut de la fonction scalaire  $f$  à l'interface  $\Gamma_s$ . Patankar *et al.* [2] ont proposé d'étendre les équations de Stokes au domaine solide en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  correspondant à la condition de rigidité  $\dot{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0$  dans  $\Omega_s$ . Cela revient à considérer le tenseur des contraintes sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_s \dot{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p\mathbf{E} + \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \quad (3)$$

L'expression (3) permet donc d'écrire une formulation faible du problème sur tout le domaine  $\Omega$  :

$$\forall (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\mu}) \in H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega_s) \quad \begin{cases} 0 & = \int_{\Omega} 2\eta \dot{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \dot{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega_s} \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \dot{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \\ 0 & = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ 0 & = \int_{\Omega_s} \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{\mu}) : \dot{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \end{cases} \quad (4)$$

qui est résolue à l'aide de la méthode du Lagrangien augmenté et d'un algorithme d'Uzawa.

Connaissant la vitesse, solution des équations (4), le déplacement des particules est effectué en utilisant une approche lagrangienne, dans notre cas la position  $\mathbf{X}_i$  de la particule  $i$  au temps  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  est calculée à l'aide d'un schéma d'Adams-Bashfort d'ordre 2 :

$$\mathbf{X}_i(t^{n+1}) = \mathbf{X}_i(t^n) + \frac{\Delta t}{2} [3\mathbf{u}(\mathbf{X}_i(t^n), t^n) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_i(t^{n-1}), t^{n-1})] \quad (5)$$

C'est dans cette phase de mise à jour des positions des particules que peut intervenir le phénomène de recouvrement, c'est-à-dire que la distance  $D_{ij}$  entre deux particules  $i$  et  $j$  peut devenir négative. Afin d'éviter ce phénomène, on introduit un modèle de contact *gluey* ou *visqueux* [4, 5]. Il s'agit d'un modèle prédicteur-correcteur dans lequel la vitesse  $\mathbf{u}^*$  solution de (4) est corrigée de telle sorte qu'elle vérifie le non-recouvrement. On doit donc résoudre :

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^*|^2 = \min_{\mathbf{v} \in K(\mathbf{X}^n, \gamma_{ij}^n)} \frac{1}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{u}^*|^2 \quad (6)$$

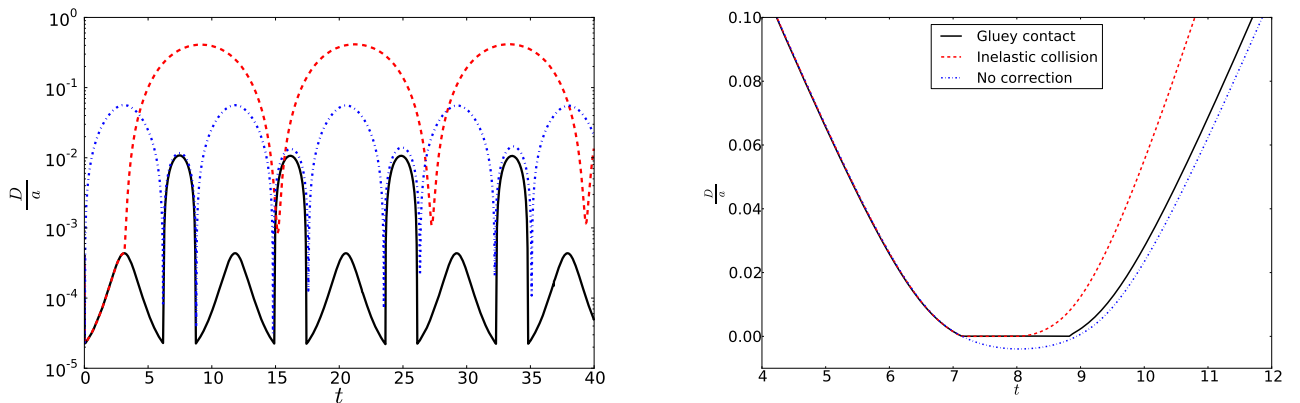
où  $K$  est l'espace des vitesses admissibles défini par

$$K(\mathbf{X}^n, \gamma_{ij}^n) = \left\{ \mathbf{v} \mid \begin{array}{l} D_{ij}^n + \Delta t (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{e}_{ij}^n \geq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n = 0 \\ D_{ij}^n + \Delta t (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{e}_{ij}^n \leq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n < 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

Le contact entre deux particules  $i$  et  $j$  est alors représenté par la grandeur  $\gamma_{ij}$   $\left\{ \begin{array}{l} < 0 \text{ si contact} \\ = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$  qui est mise à jour à chaque pas de temps en utilisant à la fois le Principe Fondamental de la Dynamique et la solution du problème sous contraintes (6), voir [5] pour plus de détails.

## 2 Résultats

Les figures ci-dessous présentent les résultats des calculs 2D et 3D du déplacement de deux particules solides, de même rayon  $a = 0.05$ , dans un écoulement cisaillé (cavité ou boîte unitaire). Les positions initiales des particules sont  $\mathbf{X}_1 = (0.451, 0.51)^T$  et  $\mathbf{X}_2 = (0.549, 0.49)^T$  pour le cas 2D et  $\mathbf{X}_1 = (0.3, 0.525, 0.5)^T$  et  $\mathbf{X}_2 = (0.7, 0.475, 0.5)^T$  pour le cas 3D et les résultats sont présentés pour (-) le modèle sans correction, (- -) le modèle de collisions inélastiques et enfin (—) le modèle de contact visqueux. Ces résultats mettent en avant la capacité du modèle visqueux à éviter le recouvrement entre



(a) Distance normalisée entre les 2 particules pour le cas 2D (b) Distance normalisée entre les 2 particules pour le cas 3D

deux particules, observé sans correction, tout en préservant la réversibilité des équations de Stokes.

## Références

- [1] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Halsa, and D.D. Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flows*, 25 :755–794, 1999.
- [2] N.A. Patankar, P. Singh, D.D. Joseph, R. Glowinski, and T.-W. Pan. A new formulation of the distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. of Multiphase flow*, 26 :1509–1524, 2000.
- [3] T. Coupez, H. Dignonnet, E. Hachem, P. Laure, L. Silva, and R. Valette. Multidomain finite element computations : Application to multiphase problems. In M. Souli and D.J. Benson, editors, *Arbitrary LagrangianEulerian and FluidStructure Interaction*, pages 229–297. Wiley, 2009.
- [4] B. Maury. A gluey particle model. *ESAIM : Proc.*, 18 :133–142, 2007.
- [5] A. Lefebvre. Numerical simulation of gluey particles. *M2AN*, 43 :53–80, 2009.