

## Une méthode sans maillage basée sur la résolution de l'EDP par séries de Taylor

Y. Tampango<sup>1</sup>, M. Potier Ferry<sup>2</sup>, Y. Koutsawa<sup>3</sup>,

<sup>1</sup>LPMM, Université de Metz, France, tampangom@yahoo.fr,

<sup>2</sup>LPMM, Université de Metz, France, michel.potierferry@univ-metz.fr

<sup>3</sup>CRP Henri Tudor, Luxembourg, yao.koutsawa@tudor.lu

**Résumé** — L'objectif de ce travail est de présenter une méthode sans maillage basée sur les séries de Taylor. La formulation utilise une ou plusieurs séries de Taylor, dont les coefficients sont déterminés par les conditions aux limites discrétisées par une technique de collocation couplée avec la méthode des moindres carrés. Les résultats numériques confirment l'efficacité et l'exactitude de la méthode proposée.

**Mots clefs** — Méthode sans maillage, collocation, méthode des moindres carrés.

Dans nos travaux nous nous intéressons au développement d'une méthode sans maillage, en se basant sur les approximations de Taylor. Dans ces deux dernières décennies beaucoup de travaux ont été effectués sur les méthodes sans maillages [2,3]. Traditionnellement, on motive ces travaux par la difficulté de mailler ou de remailler le domaine. Toutefois le succès de ces méthodes reste limité par diverses raisons, la principale étant probablement la maitrise de l'opération d'intégration lorsque les fonctions de formes ne sont plus des polynômes de bas degré.

Dans cette communication on s'intéresse à une nouvelle méthode introduite dans [1]. C'est une approche où on ne discrétise que la frontière, l'équation étant résolue dans le domaine à l'aide de séries de Taylor. On discrétise les conditions aux limites par collocation pour éviter le coût de l'intégration et on stabilisera la méthode de collocation par une méthode de moindres carrés.

Contrairement à la plupart des méthodes sans maillages, la méthode proposée n'utilise pas des fonctions de formes prédéfinies. Les fonctions de formes sont obtenues par une résolution analytique de l'EDP, sous forme de polynômes. Si on prend l'exemple de l'équation de Laplace, la solution générale est une combinaison linéaire de polynômes, les inconnues du problème étant les coefficients de ces polynômes. Ainsi on forme une base de fonctions de formes et nous arrivons à réécrire notre série de Taylor sous forme :

$$u^{h}(x) = \sum_{i=0}^{m} p_{i}(x)a_{i} = p^{T}(x)\{a\}$$
 (1)

où  $p^{T}(x)$  est le vecteur des fonctions de formes et  $\{a\}$  le vecteur inconnu.

Après le calcul de séries nous appliquons les conditions aux limites pour déterminer les variables principales. Dans la littérature il existe plusieurs techniques pour l'application des conditions aux limites. La technique la plus simple est la technique de collocation, mais elle peut entrainer des instabilités numériques et des matrices mal conditionnées. Nous avons choisi la méthode des moindres carrés couplée à la méthode de collocation comme proposée par Zhang et al [4]. L'avantage de cette technique est qu'elle profite de la simplicité de la

technique de collocation et de l'efficacité des moindres carrés. Il s'agit de minimiser la fonctionnelle :

$$J(v) = \sum_{j=0}^{M} w(x - x_j) \left| u^h(x_j) - u(x_j) \right|^2 = \sum_{j=0}^{M} w(x - x_j) \left| p^T(x_j) \{a\} - u_j \right|^2$$
 (2)

où w est une fonction de pondération.

Dans notre exposé nous présenterons dans un premier temps l'idée générale de la méthode proposée et son application à des problèmes simples. A travers la résolution des problèmes comme le problème d'Helmholtz et de Laplace on prouvera l'efficacité de la méthode ainsi que les fondements mathématiques. Nous présenterons une étude de la stabilité des coefficients des séries solutions. Nous nous sommes aussi intéressés au domaine de convergence de notre solution. Ainsi nous avons introduit les approximants de Padé pour avoir une évaluation du domaine de convergence et évaluer dans quelles conditions on obtient une convergence exponentielle avec le degré. Les pôles des approximants de Padé révèlent plusieurs informations sur la nature de la solution analytique, et permettent de détecter les singularités apparaissant dans la solution des EDP.

Dans la seconde partie de notre exposé nous traiterons des problèmes non linéaires, en couplant notre méthode avec la méthode de Newton. Cette dernière nous permet de linéariser le problème. Une comparaison de nos résultats sera faite avec les résultats obtenus en utilisant d'autres méthodes.

## References

- [1] D. S. Zeze, M. Potier-Ferry, N. Damil. *A boundary meshless method with shape functions computed from the PDE*. Engineering Analysis with Boundary Elements. 34 (2010) 747-754.
- [2] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon. *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*. Computational Mechanics. 10 (1992) 307-318.
- [3] E. Onate, S. Idelshon, O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *A finite point method in computational mechanics. Application to convective fluid flow.* International Journal for Numerical Methods in Engineering. 39 (1996) 3839-3866.
- [4] X. Zhang, X. H. Liu, K. Z. Song, M. W. Lu. Least-squares collocation meshless method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 51 (2001) 1089-1100.